

Системи лінійних рівнянь

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right\} (*)$$

- $x_1, \dots, x_n$ - променливе (непознате)
- a_{ij}, b_i - константи
 $j \in \{1, \dots, n\}$
 $i \in \{1, \dots, m\}$
- формата овог система је $m \times n \leftarrow$ број променljivих
 $\uparrow$
 број једначина

• Решење система (*) је n -торка бројева $s = (s_1, \dots, s_n)$ који је решење сваке j -не система Π_j . који када се замени даје тачну једнакост.

$$\begin{aligned} a_{11}c_1 + \dots + a_{1n}c_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}c_1 + \dots + a_{mn}c_n &= b_m \end{aligned}$$

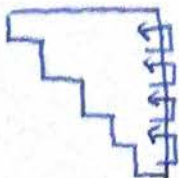
- Систем може да има јединствено решење, да има више решења или да их уопште нема.

• Два sistema linearnih jednačina sa istim brojem neznanih su EKVIVALENTNA ako imaju isti skup rešenja (naj. broj neznanih mora da bude isti, a broj jednačina ne mora)

- Са полазног система можемо прећи на њему еквивалентан систем применом низа елементарних трансформација:

- 1) $J_i \leftrightarrow J_k$ (замена места i -те и k -те једнотине)
- 2) $J_i \rightarrow \alpha J_i$, $\alpha \in K$, $\alpha \neq 0$ (i -ту једнотину помножимо са скаларом α)
- 3) $J_i \rightarrow J_i + \alpha J_k$, $\alpha \in K$ (i -тој j -ни додато k -ту помножену са скаларом α)

• Ове три елементарне трансформације користимо да сведено цолизни систем на једну еквивалентан систем у трајугоном облику.



Гаусов метод, елиминације

Прећемо да је $a_{11} \neq 0$.

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \quad \begin{array}{l} \left[\cdot \left(-\frac{a_{21}}{a_{11}} \right) \right] + \\ \left[\cdot \left(-\frac{a_{31}}{a_{11}} \right) \right] + \dots \left[\cdot \left(-\frac{a_{m1}}{a_{11}} \right) \right] + \end{array}$$

Дакле, прву ј-ту множимо са $-\frac{a_{j1}}{a_{11}}$ и додајемо другој линији. Така добијемо

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}'x_2 + \dots + a_{2n}'x_n = b_2' \\ a_{32}'x_2 + \dots + a_{3n}'x_n = b_3' \\ \vdots \\ a_{m2}'x_2 + \dots + a_{mn}'x_n = b_m' \end{array}$$

Настављамо даље поступак.

1. Решити системе:

$$\begin{array}{l} \text{а) } 2x + 3y = 1 \quad \left[\cdot \left(-\frac{5}{2} \right) \right] + \\ \quad 5x + 7y = 3 \\ \hline 2x + 3y = 1 \\ \left(-\frac{15}{2} + 7 \right) y = -\frac{5}{2} + 3 \\ -\frac{1}{2}y = \frac{1}{2} \\ \boxed{y = -1} \\ \curvearrowleft \\ 2x + 3y = 1 \\ 2x - 3 = 1 \\ 2x = 4 \\ \boxed{x = 2} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{б) } 2x + 4y = 10 \quad / :2 \\ \quad 3x + 6y = 15 \quad / :3 \\ \hline x + 2y = 5 \\ x + 2y = 5 \\ \hline x = 5 - 2y \\ \Rightarrow x \text{ је зависна променљива, а } y \text{ слободна.} \\ y = \lambda \quad \Rightarrow x = 5 - 2\lambda \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{\{(5 - 2\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \text{ је скуп решења}}$$

$\boxed{(2, -1)}$ ← јединствено решење система

$$\begin{array}{l} \text{в) } 4x - 2y = 5 \quad / :3 \\ \quad -6x + 3y = 1 \quad / :2 \\ \hline 12x - 6y = 15 \\ -12x + 6y = 2 \quad \left[\cdot \right] + \\ \hline 0 = 17 \quad \downarrow \end{array}$$

$\Rightarrow$ систем нема решење

② Rješavanje sustava:

$$\begin{array}{rcl} a) & 2x + y - 3z = 5 & \cdot 2 \\ & 3x - 2y + 2z = 5 & \cdot 3 \\ & 5x - 3y - z = 16 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 2x + y - 3z = 5 \\ 7x - 4z = 15 & \cdot (-\frac{11}{7}) \\ 11x - 10z = 31 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 2x + y - 3z = 5 \\ 7x - 4z = 15 \\ -26z = 52 \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{z = -2}$$

$$7x = 15 + 4z = 15 - 8 = 7$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 1}$$

$$y = 5 - 2x + 3z = 5 - 2 - 6 = -3$$

$$\Rightarrow \boxed{y = -3}$$

$$\boxed{(1, -3, -2)} \text{ je rješenje}$$

$$\begin{aligned} -4 \cdot (-\frac{11}{7}) - 10 &= \frac{44}{7} - \frac{70}{7} = -\frac{26}{7} \\ 15 \cdot (-\frac{11}{7}) + 31 &= -\frac{165}{7} + \frac{217}{7} = \frac{52}{7} \\ -\frac{26}{7}z &= \frac{52}{7} \Rightarrow -26z = 52 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} \delta) & 2x + 3y - 2z = 5 \\ & x - 2y + 3z = 2 \\ & 4x - y + 4z = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \boxed{x} + 2y + 3z = 2 & \cdot (-2) \\ 2x + 3y - 2z = 5 & \cdot (-4) \\ 4x - y + 4z = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x - 2y + 3z = 2 \\ 7y - 8z = 1 \\ 7y - 8z = -7 \end{array}$$

$$0 = -8$$

$\Rightarrow$ sustav nema rješenja

$$\begin{array}{rcl} \epsilon) & \boxed{x} + 2y + 3z = 3 & \cdot (-2) \\ & 2x + 3y + 8z = 4 & \cdot (-3) \\ & 3x + 2y + 17z = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x + 2y + 3z = 3 \\ -y + 2z = -2 & \cdot (-4) \\ -4y + 8z = -8 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x + 2y + 3z = 3 \\ -y + 2z = -2 \\ 0 = 0 \end{array}$$

$$y = 2z + 2$$

$$x = 3 - 2y - 3z = 3 - 4z - 4 - 3z = -7z - 1$$

$$z = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y = 2\lambda + 2, x = -7\lambda - 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\{(-7\lambda - 1, 2\lambda + 2, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \text{ je skup rješenja}}$$

3) Решить систему:

$$\begin{array}{l} a) \begin{cases} x+2y+2z=2 \\ 3x-2y-z=5 \\ 2x-5y+3z=-4 \\ x+4y+6z=0 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x+2y+2z=2 \\ -8y-7z=-1 \\ -9y-z=-8 \\ 2y+4z=-2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x+2y+2z=2 \\ 9y+z=8 \\ -8y-7z=-1 \\ y+2z=-1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x+2y+2z=2 \\ 9y+z=8 \\ 55y=55 \\ -17y=-17 \end{array} \Rightarrow \boxed{y=1}$$

$$\begin{array}{l} z=8-9y=8-9=-1 \\ \Rightarrow \boxed{z=-1} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x=2-2y-2z=2-2+2=2 \\ \Rightarrow \boxed{x=2} \end{array}$$

$\boxed{(2, 1, -1) \text{ — решение}}$

$$\begin{array}{l} b) \begin{cases} x+5y+4z-13w=3 \\ 3x-y+2z+5w=2 \\ 2x+2y+3z-4w=1 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x+5y+4z-13w=3 \\ -16y-10z+44w=-7 \\ -8y-5z+22w=-5 \end{array}$$

$$\text{применяю: } -16y-10z+44w=-7 \quad /:2$$

$$\Rightarrow -8y-5z+22w=-\frac{7}{2}$$

$$\text{с другой строки } -8y-5z+22w=-5$$

$\Rightarrow \boxed{\text{система не имеет решения}}$

4) Решить систему:

$$\begin{array}{l} \begin{cases} x+2y-3z+2w=2 \\ 2x+5y-8z+6w=5 \\ x-y+3z-4w=-1 \\ 4x+9y-10z+10w=9 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x+2y-3z+2w=2 \\ y-2z+2w=1 \\ -3y+6z-6w=-3 \\ y+2z+2w=1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x+2y-3z+2w=2 \\ y-2z+2w=1 \\ 0=0 \\ 4z=0 \end{array} \Rightarrow \boxed{z=0}$$

$$\begin{array}{l} y=1-2w \\ x=2-2w-2y=2-2w-2(1-2w)=2w \end{array}$$

$$w=\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\{(2\lambda, 1-2\lambda, 0, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}}$$

5. Решить систему:

$$\begin{cases} x - y - 2z + 2w = -1 \\ 2x + 2y - 2z - w = 2 \\ 3x - 5y + 4z + 3w = -5 \\ x + 5y - 6z - 2w = 5 \end{cases}$$

$$2x + 2y - 2z - w = 2$$

$$3x - 5y + 4z + 3w = -5$$

$$x + 5y - 6z - 2w = 5$$

$$x - y - 2z + 2w = -1$$

$$4y + 2z - 5w = 4$$

$$-2y + 10z - 3w = -2$$

$$6y - 4z - 4w = 6$$

$$x - y - 2z + 2w = -1$$

$$-2y + 10z - 3w = -2$$

$$22z - 11w = 0$$

$$26z - 13w = 0$$

$$\left. \begin{matrix} 22z - 11w = 0 \\ 26z - 13w = 0 \end{matrix} \right\} z = w$$

$$y = \frac{1}{2}(10z - 3w + 2) = \frac{1}{2}(10z - 6z + 2) = \frac{1}{2}(4z + 2) = 2z + 1$$

$$x = -1 + y + 2z - 2w = -1 + 2z + 1 + 2z - 4z = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

$$z = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{\{(0, 2\lambda + 1, \lambda, 2\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}}$$

6. Определить $d \in \mathbb{R}$ тако же, чтобы система:

1) точно решалась

2) не имела решения

3) имела бесконечно много решений

$$\begin{cases} x + y + dz = 2 \\ 3x + 4y + 2z = d \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

$$3x + 4y + 2z = d$$

$$2x + 3y - z = 1$$

$$x + y + dz = 2$$

$$y + (2 - 3d)z = d - 6$$

$$y + (-1 - 2d)z = -3$$

$$x + y + dz = 2$$

$$y + (2 - 3d)z = d - 6$$

$$(-1 - 2d - 2 + 3d)z = -3 - d + 6$$

$$(-3 + d)z = 3 - d$$

$$y = d - 6 + 2 - 3d$$

$$\Rightarrow \boxed{y = -2d - 4}$$

$$x = 2 + d + 2d + 4$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 6 + 3d}$$

$$\boxed{(6 + 3d, -2d - 4, -1)} \text{ — единственное решение}$$

$$2^\circ \underline{d = 3}$$

$$\Rightarrow 0 \cdot z = 0$$

$$\boxed{y = -3 + 7z}$$

$$x = 2 - 3z + 3 - 7z \Rightarrow \boxed{x = -10z + 5}$$

$$z = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\{(-10\lambda + 5, -3 + 7\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}}$$

$$\Rightarrow \boxed{1) d \neq 3 \quad 2) \text{ / } \quad 3) d = 3}$$

$$1^\circ \underline{d \neq 3}$$

$$z = \frac{3-d}{d-3} = -1 \Rightarrow \boxed{z = -1}$$

7. Решить систему в зависимости от параметра d :

$$\begin{array}{rcl} \boxed{X} & -3z = -3 & \left. \begin{array}{l} \cdot (-2) \\ \cdot (-1) \end{array} \right\} + \\ 2x + dy - z = -2 & & \\ \hline x + 2y + dz = 1 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x & -3z = -3 & \\ dy + 5z = 4 & \left. \begin{array}{l} \cdot (-2) \\ \cdot d \end{array} \right\} + \\ 2y + (d+3)z = 4 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x & -3z = -3 & \\ 2y + (d+3)z = 4 & & \\ \hline (-10 + d(d+3))z = -8 + 4d & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} (d^2 + 3d - 10)z &= 4d - 8 \\ (d-2)(d+5)z &= 4(d-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + \quad d^2 + 3d - 10 &= \\ &= d^2 + 5d - 2d - 10 \\ &= d(d+5) - 2(d+5) \\ &= (d-2)(d+5) \end{aligned}$$

1° $d \neq 2 \wedge d \neq -5$

$$\boxed{z = \frac{4}{d+5}}$$

$$\Delta \quad x = -3 + 3z = -3 + \frac{12}{d+5} = \frac{-3d-15+12}{d+5} = \frac{-3d-3}{d+5} = -3 \cdot \frac{d+1}{d+5} \Rightarrow \boxed{x = -3 \frac{d+1}{d+5}}$$

$$\begin{aligned} \Delta \quad y &= \frac{1}{2}(4 - (d+3)z) = \frac{1}{2}(4 - (d+3) \cdot \frac{4}{d+5}) = 2 - \frac{2(d+3)}{d+5} = \\ &= \frac{2d+10-2d-6}{d+5} = \frac{4}{d+5} \Rightarrow \boxed{y = \frac{4}{d+5}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(-3 \frac{d+1}{d+5}, \frac{4}{d+5}, \frac{4}{d+5}\right)}$$

2° $d = 2$

$$\begin{array}{rcl} x & -3z = -3 & \\ 2y + 5z = 4 & & \\ 0 \cdot z = 0 & & \\ \hline y = \frac{1}{2}(4 - 5z) & & \\ x = -3 + 3z & & \end{array}$$

$$z = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\left\{(-3+3\lambda, \frac{1}{2}(4-5\lambda), \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}}$$

3° $d = -5$

$$\begin{aligned} 0 \cdot z &= 4 \cdot (-7) \downarrow \\ \Rightarrow &\boxed{\text{НЕНА РЕШЕТА}} \end{aligned}$$