

ЛИНЕАРНА КОМБИНАЦИЈА

① Успростави полином $v = t^2 + 4t - 3$ као линеарну комбинацију полинома $p_1 = t^2 - 2t + 5$, $p_2 = 2t^2 - 3t$, $p_3 = t + 3$

$$v = x p_1 + y p_2 + z p_3 \quad x, y, z \in \mathbb{R} \text{ целочислени скалари}$$

$$t^2 + 4t - 3 = x(t^2 - 2t + 5) + y(2t^2 - 3t) + z(t + 3)$$

$$= t^2(x + 2y) + t(-2x - 3y + z) + 5x + 3z$$

$$\begin{array}{l} yz \quad 1 = x + 2y \\ yz \quad 4 = -2x - 3y + z \\ -3 = 5x + 3z \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \boxed{x} + 2y = 1 \quad / \cdot 2 \\ -2x - 3y + z = 4 \\ 5x + 3z = -3 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \boxed{x} + 2y = 1 \\ \boxed{y} + z = 6 \quad / \cdot 10 \\ -10y + 3z = -8 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} x + 2y = 1 \\ y + z = 6 \\ 13z = 52 \quad / : 13 \rightarrow \boxed{z = 4} \end{array} \Rightarrow \boxed{y = 2} \Rightarrow \boxed{x = -3}$$

$$\Rightarrow v = -3p_1 + 2p_2 + 4p_3$$

ЛИНЕАРНА ЗАВИСНОСТ И НЕЗАВИСНОСТ

Зекр. $v_1, \dots, v_m \in V$ су линеарно зависни ако $\exists$ скалари $d_1, \dots, d_m \in \mathbb{K}$ који нису сви нула и где је $d_1 v_1 + d_2 v_2 + \dots + d_m v_m = 0_v$ — нула вектор

Ако из $d_1 v_1 + d_2 v_2 + \dots + d_m v_m = 0 \Rightarrow d_1 = d_2 = \dots = d_m = 0$ вектори $v_1, v_2, \dots, v_m$ су линеарно независни.

— Показује се да су вектори $v_1, v_2, \dots, v_m$ линеарно зависни ако је један од њих линеарно комбинација осталих.

② Успостави да ли су следећи вектори из $\mathbb{R}^3$ лин. зависни.

а) $u = (1, -2, 1)$, $v = (2, 1, -1)$, $w = (7, -4, 1)$

$$x(1, -2, 1) + y(2, 1, -1) + z(7, -4, 1) = (0, 0, 0)$$

$$(x + 2y + 7z, -2x + y - 4z, x - y + z) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{array}{l} \boxed{x} + 2y + 7z = 0 \quad / \cdot 2 \\ -2x + y - 4z = 0 \quad / \cdot (-1) \\ x - y + z = 0 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} x + 2y + 7z = 0 \\ 5y + 10z = 0 \quad / : 5 \rightarrow y + 2z = 0 \\ -3y - 6z = 0 \quad / : -3 \rightarrow y + 2z = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + 2y + 7z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{одвецавањем добили} \\ 2 - y - 4z \\ 3 - y - 2z \end{array} \right. \Rightarrow \text{једна нео. система}$$

$\Rightarrow$ систем има неограничено решење
 $\Rightarrow u, v$ и w су лин. зав.

II НАМНАЧ:

$$\begin{array}{l} u_1 \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \\ u_2 \begin{bmatrix} 3 & 8 & -5 & 7 \end{bmatrix} \\ u_3 \begin{bmatrix} 2 & 9 & 4 & 23 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} / \cdot (-3) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \quad \begin{array}{l} u_1 \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \\ \sim u_2 - 3u_1 \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & -5 \end{bmatrix} \\ \sim u_3 - 2u_1 \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 & 15 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} / \cdot (-1) \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$\begin{array}{l} u_1 \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \\ \sim u_2 - 3u_1 \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & -5 \end{bmatrix} \\ u_3 - 2u_1 + 3u_2 - 3u_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Сваки од ових облика садржи нула брину
 $\Rightarrow$ вектори су линеарно зависни

$$-11u_1 + 3u_2 + u_3 = 0$$

1) $u_1 = (1, 3, -1, 4)$

$u_2 = (3, 8, -5, 7)$

$u_3 = (2, 9, 4, 23)$

$$xu_1 + yu_2 + zu_3 = 0$$

$$x(1, 3, -1, 4) + y(3, 8, -5, 7) + z(2, 9, 4, 23) = 0$$

$$\begin{array}{l} \boxed{x} + 3y + 2z = 0 \quad / \cdot (-3) \\ 3x + 8y + 9z = 0 \\ -x - 5y + 4z = 0 \\ 4x + 7y + 23z = 0 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \right.$$

$$-y + 3z = 0$$

$$-2y + 6z = 0 \quad / : 2 \rightarrow -y + 3z = 0$$

$$-5y + 15z = 0 \quad / : 5 \rightarrow -y + 3z = 0$$

$$\Rightarrow y = 3z, \quad z \text{ — слободна променљива}$$

$$z = a$$

$$y = 3a$$

$$x = -3y - 2z = -9a - 2a = -11a$$

Систем има неограничено решење $\Rightarrow$ вектори u_1, u_2 и u_3 су линеарно зависни.

③ $V = M_2(\mathbb{R})$. Укажем ли мы из матриц $A, B, C \in V$ линейно завис.

3.1 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$x A + y B + z C = 0$$

$$\begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z & z \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} x+y+z & x+z \\ x & x+y \end{bmatrix} = 0$$

$$x+y+z=0$$

$$x+z=0 \Rightarrow \boxed{z=0}$$

$$x=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

$$x+y=0 \Rightarrow \boxed{y=0}$$

$\Rightarrow A, B, C$ не л. завис.

4. Немо $\exists$ V вект. пространство размерности ≤ 3 . Укажем ли мы линейно завис. векторы.

$$u = t^3 - 4t^2 + 2t + 3$$

$$v = t^3 + 2t^2 + 4t - 1$$

$$w = 2t^3 - t^2 - 3t + 5$$

$$xu + yv + zw = 0$$

$$x(t^3 - 4t^2 + 2t + 3) + y(t^3 + 2t^2 + 4t - 1) + z(2t^3 - t^2 - 3t + 5) = 0$$

$$(x+y+2z)t^3 + (-4x+2y-z)t^2 + (2x+4y-3z)t + 3x-y+5z = 0$$

$$\begin{array}{rcl} x+y+2z=0 & / \cdot 4 & \\ -4x+2y-z=0 & + & \\ 2x+4y-3z=0 & & \\ 3x-y+5z=0 & & \end{array}$$

$$x+y+2z=0$$

$$4y+7z=0$$

$$2y-7z=0$$

$$-4y-z=0$$

$$\Rightarrow \boxed{x=0}$$

$$\Rightarrow \boxed{y=0}$$

$$\Rightarrow \boxed{z=0}$$

$\Rightarrow u, v, w$ не л. завис.

(используем 2.8) (D4)

5. Укажем ли мы линейно завис. векторы:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -5 & 7 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 4 & 23 \end{bmatrix}$$

$$xA + yB + zC = 0$$

$$x \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -5 & 7 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 4 & 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x+3y+2z & 3x+8y+9z \\ -x-5y+4z & 4x+7y+23z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl} x+3y+2z=0 & / \cdot (-3) & \\ 3x+8y+9z=0 & + & \\ -x-5y+4z=0 & & \\ 4x+7y+23z=0 & & \end{array}$$

$$-y+3z=0$$

$$-2y+6z=0 \quad / : 3 \rightarrow$$

$$-5y+15z=0 \quad / : 5 \rightarrow$$

A, B, C л. зав.

6. Укажем ли мы линейно завис. векторы:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$xA + yB + zC = 0$$

$$x \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7. ^{5.22.1} Нема је V векторски простор свих ф-ја из $\mathbb{R}$ у $\mathbb{R}$. Показати да су ф-је

4. $f(t) = \sin t$, $g(t) = \cos t$, $h(t) = t$ линеарно независне.

$$x \cdot \sin t + y \cdot \cos t + z \cdot t = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

у сва ф-ја $0(t) = 0$

$$t=0: x \cdot 0 + y \cdot 1 + z \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{y=0}$$

$$t=\frac{\pi}{2}: x \cdot 1 + y \cdot 0 + z \cdot \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\Rightarrow x + \frac{\pi}{2}z = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x=0}$$

✓

$$t=\pi: x \cdot 0 + y \cdot (-1) + z \cdot \pi = 0$$

$$-y + \pi z = 0 \Rightarrow \boxed{z=0}$$

5.22.1

8. Немају u, v, w линеарно независни вектори. Показати да су онда и

5. $u+v, u-v, u-2v+w$ линеарно независни.

$$x(u+v) + y(u-v) + z(u-2v+w) = 0$$

$$(x+y+z)u + (x-y-2z)v + z \cdot w = 0$$

$$u, v, w \text{ — л. н. в. } \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y-2z=0 \end{cases}$$

$$\boxed{z=0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$2x=0$$

$$\boxed{x=0}$$

$$\boxed{y=0}$$

$\Rightarrow u+v, u-v, u-2v+w$ су л. н. в.

БАЗА И ДИМЕНЗИЈА В. ПРОСТОРА V

Def.1 Скуп вектора $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ је БАЗА од V ако важи:

- 1) $u_1, u_2, \dots, u_n$ лн. нез.
- 2) $u_1, u_2, \dots, u_n$ генератриса

Тако је $V = \text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$

линеарна комбинација - скуп свих линеарних комбинација

Def.2 $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ чине БАЗУ од V ако се сваки вектор $v \in V$ може на јединствен начин представити као линеарна комбинација базних.

$\dim V = n$ ако V има базу од n елемената

векторски простор може имати више база, он оне морају имати исте (једнак) број вектора.

ПРИМЕРИ: 1) Вектори $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ су стандардна база за $\mathbb{R}^3$.

лн. независни су и генерисују $\mathbb{R}^3$

$$\forall u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \quad u = (a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) = a \cdot e_1 + b \cdot e_2 + c \cdot e_3$$

$$\Rightarrow \dim \mathbb{R}^3 = 3$$

2) $\mathbb{K}^n[x]$ - полиноми степена $\leq n$ са коефицијентима у домену $\mathbb{K}$.

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

имају базу $1, x, x^2, \dots, x^n$ од $n+1$ елемената

$$\Rightarrow \dim \mathbb{K}^n[x] = n+1$$

3) $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ - матрице формата $m \times n$ над полем $\mathbb{K}$

$$\text{база је } \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ & & & \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\dim M_{m \times n}(\mathbb{K}) = m \cdot n$$

Def.3 За векторе $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$ кажемо да генерису (генерисају) V ако је $V = \text{span}\{u_1, \dots, u_n\}$.
Уј. ако $\forall v \in V$ може да се представи као $v = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$ - линеарна комбинација.
Скуп $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ се зове ГЕНЕРАТРИСА.

Т Ако је $\dim V = n$, тада:
а) Сваки скуп од n лн. нез. вектора чини базу за V
б) Свака генератриса од n вектора чини базу за V .

ПРИМЕР: $V = \mathbb{R}^4$, $\dim V = 4$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{провери се да су} \\ \text{лн. нез.} \\ \Rightarrow \text{база} \end{array} \right.$$

1

Алгоритам за одређивање базе и димензије потпростора генерисаног датим векторима (страна 154.)

Korak 1. Од датих вектора, као вектора врста, формирати матрицу.

Korak 2. Свести матрицу на степенасту форму.

Korak 3. Вектори не-нула врста степенасте матрице чине базу; колико их је толика је димензија.

2

Користимо га да из датог скупа вектора издвојимо максималан линеарно независан подскуп; т.ј. да из датог скупа вектора издвојимо базу потпростора генерисаног датим скупом.

Нека је дат скуп (списак) вектора $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

Korak 1. Од датих вектора, као вектора колона, формирати матрицу.

Korak 2. Елементарним трансформацијама врста свести матрицу на степенасту форму.

Korak 3. Изbrisати из S све v_i -ове такве да се у i -тој колони степенасте матрице не налази pivot.

Korak 4. Преостали вектори чине максималан линеарно независан подскуп.

РАНГ МАТРИЦЕ

$$A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ m врата} \\ \text{и колона}$$

Свака врата матрице $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ је једно n -торно из $\mathbb{K}^n$ (има n n -торки)
 РАНГ ВРАТА матрице A је максималан број лн. нез. врата
 РАНГ КОЛОНА ————— || ————— колона.

Ⓣ Ранг врата и ранг колона матрице A су једнаки.

Зедф. Ранг матрице A , $r(A)$ је ранг врата или ранг колона

СУМА И ДИРЕКТНА СУМА

$$U, W \subseteq V \text{ (субвекторски простори)}$$

$$U+W \stackrel{\text{def}}{=} \{u+w \mid u \in U, w \in W\}$$

$$\text{СТАВ } U, W \subseteq V \Rightarrow U+W \subseteq V$$

$$1) 0 = 0+0 \in U+W \Rightarrow 0 \in U+W$$

$$2) u+w \in U+W \quad (u+w) + (u'+w') = (u+u') + (w+w') \in U+W$$

$$3) k \in \mathbb{K}, u+w \in U+W \quad k(u+w) = ku + kw \in U+W$$

$$\text{СТАВ } U, W \subseteq V \Rightarrow U \cap W \subseteq V$$

$$1) 0 \in U \cap W \text{ је } U \subseteq V \Rightarrow 0 \in U, W \subseteq V \Rightarrow 0 \in W \Rightarrow 0 \in U \cap W$$

$$2) u_1, u_2 \in U \cap W \Rightarrow u_1, u_2 \in U \text{ и } u_1, u_2 \in W$$

$$3) k \in \mathbb{K}, u \in U \cap W \Rightarrow u \in U \text{ и } u \in W$$

ЛЕМА: Ако су S_1 и S_2 скупови вектора, и нека $U_1 = \mathcal{L}(S_1), U_2 = \mathcal{L}(S_2)$, онда је $U_1 + U_2 = \mathcal{L}(S_1 \cup S_2)$.

$$\text{Ⓣ (ГРАСМАНОВА ФОРМУЛА)} \\ \dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

Зедф. Векторски простор V је ДИРЕКТНА СУМА векторских простора U и W , у ознаку $V = U \oplus W$ ако $\forall v \in V$ постоји јединствен начин да представимо као $v = u+w$, $u \in U, w \in W$.

Ⓣ V је директна сума векторских простора U и W ако

$$1) V = U+W \quad \text{и} \quad 2) U \cap W = \{0\}$$

$$\text{⊗ } U, W \subseteq V$$

$$a) U, W \subseteq U+W$$

$$b) U+W = \mathcal{L}(U \cup W)$$

$$5) \left. \begin{matrix} U+W \subseteq V \\ U, W \subseteq U+W \end{matrix} \right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{L}(U \cup W) \subseteq U+W}$$

$$a) u \in U$$

$$u = u+0 \in U+W$$

$$\Rightarrow U \subseteq U+W$$

$$w \in W$$

$$w = 0+w \in U+W$$

$$\Rightarrow W \subseteq U+W$$

$$u \in U+W$$

$$u = u+0 = 1 \cdot u + 1 \cdot 0$$

$$\Rightarrow u \text{ је лн. комб. елем. из } U \cup W$$

$$\Rightarrow u \in \mathcal{L}(U \cup W)$$

$$\Rightarrow \boxed{U+W \subseteq \mathcal{L}(U \cup W)}$$

1 Нека је W потпростор простора $\mathbb{R}^5$ генерисан векторима

$$u_1 = (1, -2, 1, 3, -1)$$

$$u_2 = (-2, 4, -2, -6, 2)$$

$$u_3 = (1, -3, 1, 2, 1)$$

$$u_4 = (3, -7, 3, 8, -1).$$

Одредити бар једну базу за W као и његову димензију.

Дате векторе запишемо по врстама матрице, коју затим сводимо на степенаци облику. Не-нула врсте степенасте матрице чине једну базу за W , а њихов број је $\dim W$.

$$\begin{array}{l} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -2 & -6 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -7 & 3 & 8 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{l} u_1 \\ u_2 + 2u_1 \\ u_3 - u_1 \\ u_4 - 3u_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{array}{l} u_1 \\ u_2 + 2u_1 \\ u_3 - u_1 \\ u_4 - 3u_1 - u_3 + u_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Једна база за W су не-нула врсте степенасте матрице, тј. вектори $(1, -2, 1, 3, -1)$ и $(0, -1, 0, -1, 2)$, а димензија је 2. Из друге врсте последње матрице можемо закључити да је $u_2 = -2u_1$, а и последње врсте да је $u_4 = 2u_1 + u_3$. Дакле, и вектори u_1 и u_3 такође формирају базу за W .

2 Нека је W потпростор простора $\mathbb{R}^5$ генерисан векторима

$$u_1 = (1, 1, -1, -2, 3)$$

$$u_2 = (1, 2, -1, -2, 1)$$

$$u_3 = (3, 5, -1, -2, 5)$$

$$u_4 = (1, 2, -1, -1, 4).$$

Наћи подскуп скупа вектора $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ који формира базу за W .

Од датог скупа вектора треба издвојити максималан линеарно независан подскуп. Векторе u_1, u_2, u_3, u_4 ћемо записати по колонама матрице коју ћемо елементарним трансформацијама врста свести на степенасту форму. Из почетног скупа вектора бришемо оне векторе којима одговарају колоне степенасте матрице без пивота.

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & -4 & -8 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Пивоти се налазе у првој, другој и четвртој колони, па вектори u_1, u_2 и u_4 формирају једну базу потпростора W .

3 Испитати да ли вектори

$$u_1 = (1, -1, 1)$$

$$u_2 = (1, -2, 3)$$

$$u_3 = (2, -1, 1)$$

чине базу векторског простора $\mathbb{R}^3$.

Пошто је простор $\mathbb{R}^3$ димензије 3, довољно је показати да су вектори u_1, u_2, u_3 линеарно независни.

$$\begin{array}{l} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{l} u_1 \\ u_2 - u_1 \\ u_3 - 2u_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{l} u_1 \\ u_2 - u_1 \\ u_3 - 2u_1 + 3(u_2 - u_1) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Степенаста матрица нема нула врста, па су полазни вектори u_1, u_2, u_3 линеарно независни.

4 Нека је V векторски простор квадратних матрица реда 2×2 над пољем $\mathbb{R}$. Наћи базу и димензију потпростора W који је генерисан векторима

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix} \text{ и } D = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Канонску базу за простор V чине вектори

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ и } E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Преласком на координате вектора у односу на базу $E = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ добијамо векторе из $\mathbb{R}^4$

$$[A]_E = (1, -5, -4, 2)$$

$$[B]_E = (1, 1, -1, 5)$$

$$[C]_E = (2, -4, -5, 7)$$

$$[D]_E = (1, -7, -5, 1).$$

Издвојимо из овог скупа вектора максималан линеарно независан подскуп.

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & -4 & -7 \\ -4 & -1 & -5 & -5 \\ 2 & 5 & 7 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{6} & 6 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{6} & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Пивоти се налазе у првој и другој колони, па прва два вектора A и B чине базу за W и $\dim W = 2$.

- 5 Наћи базу и димензију потпростора W векторског простора $P(t)$ генерисаног полиномима

$$u = t^3 + 2t^2 - 2t + 1,$$

$$v = t^3 + 3t^2 - t + 4,$$

$$w = 2t^3 + t^2 - 7t - 7.$$

Координате вектора u, v, w у канонској бази $e = \{t^3, t^2, t, 1\}$ простора полинома степена највише 3 су

$$[u]_e = (1, 2, -2, 1)$$

$$[v]_e = (1, 3, -1, 4)$$

$$[w]_e = (2, 1, -7, -7).$$

Формирамо од ових вектора матрицу ређајући их по врстама.

$$\begin{array}{l} u \\ v \\ w \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -7 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{l} u \\ v - u \\ w - 2u \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & -9 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{l} u \\ v - u \\ w - 2u + 3(v - u) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Из последње врсте степенасте матрице закључујемо да је $w = 5u - 3v$, па је једна база за потпростор W скуп $\{u, v\}$. Другу базу за W чине вектори $t^3 + 2t^2 - 2t + 1$ и $t^2 + t + 3$.

- 6 Нека је W векторски потпростор свих симетричних матрица реда 2×2 над пољем $\mathbb{R}$. Показати да је $\dim W = 3$.

$$W = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : A = A^T\}$$

Матрица $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ припада простору W ако и само ако је

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, \text{ тј. ако и само ако је } b = c.$$

Дакле, $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} : a, b, d \in \mathbb{R} \right\}.$

Свака матрица из простора W је облика

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ тј.}$$

линеарна је комбинација вектора

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ и } E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Одатле следи да је $W = \text{Span}(E_1, E_2, E_3)$, па су вектори E_1, E_2, E_3 генератриса за простор W . Лако се види да су они и линеарно независни, па чине једну базу за простор W који је онда димензије 3.

- 7 Нека су U и W потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4$ дати са $U = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : b - 2c + d = 0\}$ и $W = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a = d, b = 2c\}.$

Наћи бар по једну базу за потпросторе U и W , као и за потпростор $U \cap W$.

$$U = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : b = 2c - d\}$$

$$U = \{(a, 2c - d, c, d) : a, c, d \in \mathbb{R}\}$$

Сваки вектор из U можемо написати у облику

$$(a, 2c - d, c, d) = a(1, 0, 0, 0) + c(0, 2, 1, 0) + d(0, -1, 0, 1).$$

Дакле, простор U је генерисан векторима

$$e_1 = (1, 0, 0, 0), e_2 = (0, 2, 1, 0) \text{ и } e_3 = (0, -1, 0, 1).$$

Вектори e_1, e_2, e_3 су и линеарно независни јер степенаста матрица формирана помоћу њих нема нула врста

$$\begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{matrix} e_1 \\ e_3 \\ e_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{matrix} e_1 \\ e_3 \\ e_2 + 2e_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Једна база за U је $\{e_1, e_2, e_3\}$ и $\dim U = 3$.

$$W = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a = d, b = 2c\}$$

$$W = \{(d, 2c, c, d) : c, d \in \mathbb{R}\}$$

Сваки вектор из W можемо написати у облику

$$(d, 2c, c, d) = d(1, 0, 0, 1) + c(0, 2, 1, 0).$$

Дакле, простор W је генерисан векторима

$$f_1 = (1, 0, 0, 1) \text{ и } f_2 = (0, 2, 1, 0).$$

Вектори f_1, f_2 су и линеарно независни јер степенаста матрица формирана помоћу њих нема нула врста

$$\begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Једну базу за W чине вектори f_1 и f_2 , па је $\dim W = 2$.

$$U \cap W = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : b = 2c - d, a = d, b = 2c\}$$

$$U \cap W = \{(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}) \in \mathbb{R}^4 : a = d = 0, b = 2c\}$$

$$U \cap W = \{(0, 2c, c, 0) : c \in \mathbb{R}\} = \{c(0, 2, 1, 0) : c \in \mathbb{R}\}$$

$$U \cap W = \text{Span}((0, 2, 1, 0))$$

База за простор $U \cap W$ је $(0, 2, 1, 0)$, а $\dim(U \cap W) = 1$.

Ранг матрице

8

Наћи ранг матрице $A =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & -3 & 6 & 13 \end{bmatrix}.$$

Ранг матрице је максималан број линеарно независних врста, односно колона матрице.

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & -2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & -3 & 6 & 13 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица A има 3 линеарно независне врсте, па је $\text{rang}(A) = 3$.

Сума и директна сума потпростора

За потпросторе U и W векторског простора V , дефинишемо њихову суму са

$$U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}.$$

Векторски простор V је директна сума потпростора U и W , у ознаци $V = U \oplus W$, ако се сваки вектор $v \in V$ може на јединствен начин написати у облику

$$v = u + w, \text{ где је } u \in U, w \in W.$$

$V = U \oplus W$ ако и само ако је $V = U + W$ и $U \cap W = \{0\}$.

9 Нека су U и W потпростори векторског простора $\mathbb{R}^3$ дати са

$$U = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = b = c\} \text{ и}$$

$$W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = 0\}.$$

Показати да је $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

$U = \{(a, a, a) : a \in \mathbb{R}\}$ и

$W = \{(0, b, c) : b, c \in \mathbb{R}\}$

Произвољан вектор $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ можемо представити као збир једног вектора из U и једног вектора из W

$$(a, b, c) = (a, a, a) + (0, b - a, c - a).$$

Дакле, $\mathbb{R}^3 = U + W$.

Како је ово представљање јединствено, сума је и директна.

У то се можемо уверити и ако проверимо да је

$$U \cap W = \{0\}.$$

Нека је $v = (a, b, c) \in U \cap W$. Тада је $a = b = c$ и $a = 0$, па закључујемо да је $a = 0, b = 0, c = 0$, тј. да је $v = 0$.

10 Дати су потпростори U_1, U_2 и U_3 векторског простора $\mathbb{R}^3$

$$U_1 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a + b + c = 0\},$$

$$U_2 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = c\} \text{ и}$$

$$U_3 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = 0, b = 0\}.$$

Показати да је:

а) $\mathbb{R}^3 = U_1 + U_2$,

б) $\mathbb{R}^3 = U_2 + U_3$,

в) $\mathbb{R}^3 = U_1 + U_3$.

Када је сума и директна?

$$U_1 = \{(-b - c, b, c) : b, c \in \mathbb{R}\},$$

$$U_2 = \{(c, b, c) : b, c \in \mathbb{R}\} \text{ и}$$

$$U_3 = \{(0, 0, c) : c \in \mathbb{R}\}.$$

а) Произвољан вектор $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ можемо представити као збир једног вектора из U_1 и једног вектора из U_2

$$(a, b, c) = (a, -a - c, c) + (0, a + b + c, 0).$$

Дакле, $\mathbb{R}^3 = U_1 + U_2$.

Међутим, ово представљање није јединствено. Вектор (a, b, c) можемо представити и на други начин као збир једног вектора из U_1 и једног вектора из U_2

$$(a, b, c) = (a - c, -a + c, 0) + (c, a + b - c, c).$$

Сума дакле није директна.

То смо могли закључити и из чињенице да је

$$U_1 \cap U_2 \neq \{0\}.$$

$$U_1 \cap U_2 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a + b + c = 0, a = c\}, \text{ тј.}$$

$$U_1 \cap U_2 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = c, b = -2c\} = \{(c, -2c, c) : c \in \mathbb{R}\} \neq \{0\}.$$

б) Произвољан вектор $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ можемо представити као збир једног вектора из U_2 и једног вектора из U_3

$$(a, b, c) = (a, b, a) + (0, 0, c - a).$$

$$\text{Дакле, } \mathbb{R}^3 = U_2 + U_3.$$

Како је ово представљање јединствено, сума је и директна.

У то се можемо уверити и ако проверимо да је

$$U_2 \cap U_3 = \{0\}.$$

Нека је $v = (a, b, c) \in U_2 \cap U_3$. Тада је $a = c$ и $a = b = 0$, па закључујемо да је $a = 0, b = 0, c = 0$, тј. да је $v = 0$.

в) Произвољан вектор $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ можемо представити као збир једног вектора из U_1 и једног вектора из U_3

$$(a, b, c) = (a, b, -a - b) + (0, 0, a + b + c).$$

$$\text{Дакле, } \mathbb{R}^3 = U_1 + U_3.$$

Како је ово представљање јединствено, сума је и директна.

У то се можемо уверити и ако проверимо да је

$$U_1 \cap U_3 = \{0\}.$$

Нека је $v = (a, b, c) \in U_1 \cap U_3$. Тада је $a + b + c = 0$ и $a = b = 0$, па закључујемо да је $a = 0, b = 0, c = 0$, тј. да је $v = 0$.

