

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -10 & -20 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 6 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 8 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

МАТРИЦЕ И СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ 3-4

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \right\}$$

m лн. j -то
и координат

$$AX = B$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

расширенная матрица
система

$\uparrow$ $m \times n$ $n \times 1$ $m \times 1$
A (матрица системы)

- Систему можно решать и так: либо расширенную матрицу сводим до ступенчатой, а затем на канонич. форму.

12) Решить систему канонич. расширенную матрицу M.

$$x + 2y - z = 3$$

$$x + 3y + z = 5$$

$$3x + 8y + 4z = 12$$

$$M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 12 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{I \cdot (-1) \\ I \cdot (-3)}} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 8 \end{array} \right] \xrightarrow{I \cdot (-2)} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{I \cdot \left(\frac{1}{3}\right)} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{array} \right] \xrightarrow{I \cdot (-2)} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 + \frac{8}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 2 - \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{array} \right] \xrightarrow{I \cdot (-2)} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{12}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{12}{3} \\ y &= -\frac{2}{3} \\ z &= -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

13) Найти инверз матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{I \cdot (-2) \\ I \cdot (-1)}} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{I \cdot (-2)} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{I \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \\ I \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 7 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{I \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 7 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{I \cdot (-3)} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{29}{2} & -\frac{17}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array} \right]$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 29 & -17 & 7 \\ -5 & 3 & -1 \\ 6 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

14) Найти инверз матрице

$$D = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{1/a_1, 1/a_2, \dots, 1/a_n}} \sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}$$

Диагональная
матрица

D — инверз матрицы A, т.к. D — диагональная матрица, все диагональные ее элементы равны $1/a_i$.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \in \mathbb{R}[x] \quad f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \\ \text{полином са реалним коефицијентима} \\ \text{и независном } x \\ A \in M_n(\mathbb{R}) \leftarrow \text{квадратна матрица} \\ \text{реда } n \\ f(A) = a_0 I + a_1 A + \dots + a_n A^n \end{array} \right\} (*)$$

(ДОМАЋИ)

15) $f(x) = x^2 - 6x + 13$, $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$. Наћи $f(A)$.

$$f(A) = A^2 - 6A + 13I = \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 24 & 17 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -12 \\ 24 & 30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{матрица } A \text{ доминира} \\ \text{полном } f, \text{ тј. } f(A) = 0.$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 24 & 17 \end{bmatrix}$$

16) Наћи сву матрицу које комутирају са $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$$U = \{ X \in M_2(\mathbb{R}) \mid AX = XA \}$$

$$X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x+z & 2y+t \\ 2x+2z & 2y+2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+2y & x+2y \\ 2z+2t & z+2t \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} z = 2y \\ t = x \\ 2x = 2t \\ 2y = z \end{array} \quad \begin{array}{l} t = x \\ z = 2y \end{array} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$$X = \begin{bmatrix} x & y \\ 2y & x \end{bmatrix}$$

$$U = \{ X = \begin{bmatrix} x & y \\ 2y & x \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \}$$

$$U = \left\{ x \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_B + y \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}_C : x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

линеарна комбинација
 $B \cup C$

(НЕ РАДИ)

17) Наћи A^n ако је $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$.

$$A^1 = A$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\dots$$

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Доказуемо по математичком индукцијом, до } n.$$

$n=1$: $A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ и база индукције

$n=k$: ако сврђене важи за $n=k$ индуктивна претпоставка

$$A^k = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$n=k+1$: доказуемо да сврђене важи и за $n=k+1$ индуктивни корак

$$A^{k+1} = A^k \cdot A \stackrel{\text{и.х.}}{=} \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + k \cdot 0 & 1 \cdot 1 + k \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

По принципу м. индукције важи да је $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, за свако $n \in \mathbb{N}$

18) Решити матричну ј-цу:

$$XA = B \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -10 & -4 \\ -30 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -4 \\ -30 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5x+10y & 2x+4y \\ 5z+10t & 2z+4t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -4 \\ -30 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} 5x+10y = -10 : 5 \rightarrow x+2y = -2 \Rightarrow x = -2-2y \\ 2x+4y = -4 : 2 \end{array} \Rightarrow y=0, x=-2$$

$$\begin{array}{l} 5z+10t = -30 : 5 \rightarrow z+2t = -6 \Rightarrow z = -6-2t \\ 2z+4t = -12 : 2 \end{array} \Rightarrow z = -6-2t$$

$$y=0, t=0, x=-2, z=-6$$

$$X = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}$$

19. ИСХОДНОМНО МНОЖЕЊЕ МАТРИЦА (НЕ МОРА)

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & O_{2 \times 3} \\ O_{2 \times 2} & A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & O_{3 \times 2} \\ O_{3 \times 2} & B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} A_1 & O_{2 \times 3} \\ O_{2 \times 2} & A_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_1 & O_{3 \times 2} \\ O_{3 \times 2} & B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 B_1 + O_{2 \times 3} \cdot O_{3 \times 2} & A_1 \cdot O_{2 \times 2} + O_{2 \times 3} \cdot B_2 \\ O_{2 \times 2} B_1 + A_2 \cdot O_{3 \times 2} & O_{2 \times 2} \cdot O_{2 \times 2} + A_2 \cdot B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 B_1 & O_{2 \times 2} \\ O_{2 \times 2} & A_2 B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 0 & 0 \\ 17 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & -5 \end{bmatrix}$$

20. Дате су матрице:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Изразицаи: $A+B, A+C, 3A-4B, A \cdot B, AC, AD, BC, BD, CD, A^T, A^T C, D^T A^T$

$$A+B = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$A+C$ није гедр.

$$3A-4B = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 0 & 9 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 16 & 0 & -12 \\ -4 & -8 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & -3 & 18 \\ 4 & 17 & 0 \end{bmatrix}$$

$A \cdot B$ није гедр.

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 4 & 5 \\ 11 & -3 & -12 & 18 \end{bmatrix}$$

$$AD = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \end{bmatrix}$$

(ДОМАРА)
 $BC =$

$$BD = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

CD није гедр.

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$A^T \cdot C$ није гедр.

$$D^T \cdot A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 9 \end{bmatrix}$$

$$(AD)^T = D^T \cdot A^T$$

† $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ у општем сл.

формула за квадрати бинома важи ако матрице A и B комутирају ($AB=BA$)

$$(A+B)^2 = (A+B) \cdot (A+B) = A(A+B) + B(A+B) = A \cdot A + AB + BA + B \cdot B = A^2 + AB + BA + B^2$$

гедра дистрибутивности

матрице A и B није комутиративне.

21. Хоћу $(A+B)^2$ ако је $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$.

$$(A+B)^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$\gg AB \neq BA$, паk овде је $AB \neq BA$

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

22) Ако је $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, то је

$$\begin{aligned} A^2 - C^2 + AB - AC + CA + CB &= A^2 + AB - AC - C^2 + CA + CB = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{избачење "левог" } A \\ \text{и "левог" } C}}{A(A+B-C)} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{избачење "десног" } \\ A+B-C}}{C(A+B-C)} = (A+C)(A+B-C) = \\ &= \underset{A+C}{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}} \left(\underset{A+B-C}{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 14 & -28 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\nabla A(B+C) = AB+AC$
 $(B+C)A = BA+CA \nabla$

4. ВЕКТОРСКИ ПРОСТОРИ

Def. $V \neq \emptyset$ векторски простор над полем K је не празан скуп V на коме су дефинисане операције $+$ и $\cdot$ за $u, v \in V$ за које важи:

$$\begin{aligned} u+v &\in V && \text{ЗАБИРАЊЕ} \\ \lambda \cdot u &\in V && \text{МНОЖЕЊЕ СКАЛАРОМ} \end{aligned}$$

- (A1) $(\forall u, v, w \in V) (u+v)+w = u+(v+w)$ АСОЦИЈАТИВНОСТ
 (A2) $(\exists 0 \in V) (\forall u \in V) u+0 = u$ НЕЈТРАЛ
 (A3) $(\forall u \in V) (\exists -u \in V) u+(-u) = 0$ ИНВЕРЗ
 (A4) $(\forall u, v \in V) u+v = v+u$ КОМУТАТИВНОСТ
 (M1) $(\forall \lambda \in K) (\forall u, v \in V) \lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$
 (M2) $(\forall \lambda, \beta \in K) (\forall u \in V) (\lambda + \beta)u = \lambda u + \beta u$
 (M3) $(\forall \lambda, \beta \in K) (\forall u \in V) (\lambda \beta)u = \lambda(\beta u)$
 (M4) $(\forall u \in V) 1 \cdot u = u$

Потога је V векторски простор.

ПРИМЕРИ: 1) K^n - уређене n -торке над полем K

2) $M_{m \times n}$ над полем K - матрице $m \times n$ над полем K

3) $K[x]$ - полиноми са коефицијентима у пољу K

4) ϕ -је из $X \rightarrow K$
 векторски простор

Neka je X proizvoljan skup i neka je $F(X)$ skup svih funkcija $f: X \rightarrow R$. Definišemo zbir f-ja (+) i množenje f-je skalarom na 'prirodan' način:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad (kf)(x) = kf(x)$$

0-funkcija je definisana $0(x) = 0$ za sve $x \in X$ dok je $(-f)(x) = -f(x)$

Потога је $W \subseteq V$ је ВЕКТОРСКИ ПОТПРОСТОР од V ако је W сам за себе векторски простор над полем K .

Def. $W \subseteq V$ је ВЕКТОРСКИ ПОТПРОСТОР од V ако

1) $0 \in W$

2) W затворен за сабирање

$$u, v \in W \Rightarrow u+v \in W$$

3) W затворен за множење скаларом

$$\lambda \in K, u \in W \Rightarrow \lambda u \in W$$

$$(\forall \lambda, \beta \in K) (\forall u, v \in W) \lambda u + \beta v \in W$$

Потомо, $W \leq V$.

① Доказати да је $W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a+b+c=0\}$ векторски простор од $\mathbb{R}^3$

$$W \subseteq \mathbb{R}^3 \text{ и}$$

1) $0 = (0, 0, 0) \in W$ јер $0+0+0=0$ и

2) н.а. да $u = (a, b, c), w = (a', b', c') \in W \Rightarrow u+w \in W$
 $a+b+c=0 \quad a'+b'+c'=0 \quad u+w = (a+a', b+b', c+c')$

$$a+a'+b+b'+c+c' = (a+b+c) + (a'+b'+c') = 0+0=0 \Rightarrow u+w \in W$$

3) $\lambda \in \mathbb{R}, u \in W, \lambda u = (\lambda a, \lambda b, \lambda c)$

$$\lambda a + \lambda b + \lambda c = \lambda(a+b+c) = \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lambda u \in W$$

② Ако је $V = M_n(K), W = \{A \in V \mid AT = TA\}$ - све матрице које комутирају са датом T , доказати да је $W \leq V$.

$$W \subseteq V \text{ и}$$

1) $0 \in W$ јер $0 \cdot T = T \cdot 0 = 0$ и

2) $A, B \in W \Rightarrow A+B \in W$

$$AT = TA \quad BT = TB$$

$$(A+B)T = AT+BT = TA+TB = T(A+B) \Rightarrow A+B \in W$$

3) $A \in W, \lambda \in K \Rightarrow \lambda A \in W$

$$(\lambda A)T = \lambda(AT) = \lambda(TA) = T(\lambda A) \Rightarrow \lambda A \in W$$

3. Нека је $V = M_n(\mathbb{K})$ и $W = \{A \in V \mid A = A^T\}$ - симетричне матрице. Докажи да је $W \leq V$.

$W \subseteq V$ ✓

1) $0 \in W$ јер $0 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ јесте симетрична матрица ✓

2) $A, B \in W \Rightarrow A+B \in W$

$$A = A^T, B = B^T \Rightarrow A+B = A^T+B^T = (A+B)^T \Rightarrow A+B \in W \quad \checkmark$$

3) $A \in W, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda A \in W$

$$A = A^T \Rightarrow \lambda A = \lambda \cdot A^T = (\lambda A)^T \Rightarrow \lambda A \in W \quad \checkmark$$

$\begin{pmatrix} \dots & 3 & 1 & 0 \\ 3 & \dots & 7 & 5 \\ 1 & 7 & \dots & 9 \\ 0 & 5 & 9 & \dots \end{pmatrix} \quad (\dots \text{ je bilo šta}).$

4. Нека је $W = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(-x) = f(x) \text{ за } \forall x \in \mathbb{R}\}$ - парне ф-је. Докажи да је $W \leq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ - две ф-је из $\mathbb{R}$ у $\mathbb{R}$.

$W \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ✓

1) $0(x) = 0$ - јуно ф-ја

$$0(-x) = 0 = 0(x) \Rightarrow 0 \in W \quad \checkmark$$

2) $f, g \in W \Rightarrow f+g \in W$

$$\begin{aligned} f(-x) &= f(x) \\ g(-x) &= g(x) \end{aligned} \Rightarrow (f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x) \Rightarrow f+g \in W \quad \checkmark$$

3) $\lambda \in \mathbb{R}, f \in W \Rightarrow \lambda f \in W$

$$(\lambda f)(-x) = \lambda \cdot f(-x) = \lambda \cdot f(x) = (\lambda f)(x) \Rightarrow \lambda f \in W \quad \checkmark$$

5. Нека је $V = M_2(\mathbb{R})$ - скуп двеу квадратних матрица реда 2 над полем $\mathbb{R}$. Истражи да ли је скуп

a) $W_1 = \{A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, a=0\}$ б) $W_2 = \{A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, a+b=1\}$

затворен за сабирање матрица и множење скаларом.

a) $A_1, A_2 \in W_1 \Rightarrow A_1 + A_2 \in W_1$

$$\lambda \in \mathbb{R}, A \in W_1 \Rightarrow \lambda A \in W_1$$

$$1) A_1 = \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$$

$$A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix} \in W_1$$

$$\text{Дакле, } (\forall A_1, A_2 \in W_1) A_1 + A_2 \in W_1$$

$$2) A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \lambda A = \begin{bmatrix} 0 & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{bmatrix} \in W_1$$

$$\text{Дакле, } (\forall \lambda \in \mathbb{R}) (\forall A \in W_1) \lambda A \in W_1$$

$$\text{НАПОМЕНА: } 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in W_1$$

$$\Rightarrow W_1 \leq M_2(\mathbb{R})$$

б) $A \in W_2, a+b=1$

$$1) A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & 1-a_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & 1-a_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$$

$$A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} a_1+a_2 & 2-(a_1+a_2) \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix} \notin W_2 \text{ јер } (a_1+a_2) + (2-(a_1+a_2)) = 2 \neq 1$$

контрпример:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in W_2 \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \notin W_2$$

Дакле, W_2 није затворен за сабирање.

$$2) A = \begin{bmatrix} a & 1-a \\ c & d \end{bmatrix} \quad \lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda(1-a) \\ \lambda c & \lambda d \end{bmatrix} \notin W_2 \text{ јер } \lambda a + \lambda(1-a) = \lambda \neq 1$$

контрпример:

$$5 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \notin W_2$$

Дакле, W_2 није затворен ни за множење скаларом.

$$\text{НАПОМЕНА: } 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \notin W_2 \text{ јер } a+b=0+0 \neq 1 \Rightarrow W_2 \not\leq M_2(\mathbb{R})$$

6. Нека је U скуп двеу матрица из $M_2(\mathbb{R})$ које комутирају са матрицом $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Истражи да ли је U затворен за сабирање и множење скаларом.

$$U = \{X \in M_2(\mathbb{R}) : AX = XA\}$$

1) $X_1, X_2 \in U \Rightarrow X_1 + X_2 \in U$

$$\begin{aligned} AX_1 &= X_1 A \\ AX_2 &= X_2 A \end{aligned} \quad \begin{aligned} A(X_1+X_2) &= AX_1 + AX_2 = X_1 A + X_2 A = (X_1+X_2)A \end{aligned} \Rightarrow X_1+X_2 \in U$$

2) $\lambda \in \mathbb{R}, X \in U \Rightarrow \lambda X \in U$

$$AX = XA \quad A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda(XA) = (\lambda X)A \Rightarrow \lambda X \in U$$

$$\text{НАПОМЕНА: } 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in U \text{ јер } A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$$

$$\Rightarrow U \leq M_2(\mathbb{R})$$

II НАУЧЫ

$$X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in U$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3x-2z & 3y-2t \\ 4x+3z & 4y+3t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x+4y & -2x+3y \\ 3z+4t & -2z+3t \end{bmatrix}$$

$$-2z = 4y \Rightarrow \underline{z = -2y}$$

$$-2t = -2x$$

$$4x = 4t \Rightarrow \underline{x = t}$$

$$4y = -2z$$

$$\text{Таким образом, } X \in U \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} x & y \\ -2y & x \end{bmatrix}$$

$$x_1, x_2 \in U \stackrel{?}{\Rightarrow} x_1 + x_2 \in U$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ -2y_1 & x_1 \end{bmatrix}}_{x_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ -2y_2 & x_2 \end{bmatrix}}_{x_2} = \begin{bmatrix} x_1+x_2 & y_1+y_2 \\ -2y_1-2y_2 & x_1+x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+x_2 & y_1+y_2 \\ -2(y_1+y_2) & x_1+x_2 \end{bmatrix} \in U \quad \checkmark$$

$$\lambda \in \mathbb{R}, X \in U \stackrel{?}{\Rightarrow} \lambda X \in U$$

$$X = \begin{bmatrix} x & y \\ -2y & x \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda X = \begin{bmatrix} \lambda x & \lambda y \\ -2\lambda y & \lambda x \end{bmatrix} \in U \quad \checkmark$$

1.

а) Установите, что ли $W \leq \mathbb{R}^3$

$$\text{а) } W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = 2b\} \\ = \{(2b, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid b, c \in \mathbb{R}\}$$

$$W \subseteq \mathbb{R}^3 \quad \checkmark$$

$$1) 0 = (0, 0, 0) \in W \quad \checkmark$$

$$2) x_1 = (2b_1, b_1, c_1) \in W, x_2 = (2b_2, b_2, c_2) \in W \Rightarrow x_1 + x_2 = (2b_1+2b_2, b_1+b_2, c_1+c_2) = (2(b_1+b_2), b_1+b_2, c_1+c_2) \in W \quad \checkmark$$

$$3) \lambda \in \mathbb{R}, x = (2b, b, c) \in W \Rightarrow \lambda x = \lambda(2b, b, c) = (2\lambda b, \lambda b, \lambda c) \in W \quad \checkmark$$

W является л. подпространством $\mathbb{R}^3$

$$\text{б) } W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq b \leq c\} \subseteq \mathbb{R}^3 \quad \checkmark$$

$$1) 0 = (0, 0, 0) \in W \text{ так } 0 \leq 0 \leq 0 \quad \checkmark$$

2)

$$3) \text{ контрпример: } (1, 2, 3) \in W, -2 \in \mathbb{R} \Rightarrow -2 \cdot (1, 2, 3) = (-2, -4, -6) \notin W \\ 1 \leq 2 \leq 3 \quad -2 \leq -4 \leq -6$$

$$W \not\leq \mathbb{R}^3$$

$$\text{в) } W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid ab = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3 \\ a=0 \text{ или } b=0$$

$$1) (0, 0, 0) \in W \quad \checkmark$$

$$2) (1, 0, 0) \in W, (0, 1, 0) \in W \Rightarrow (1, 0, 0) + (0, 1, 0) = (1, 1, 0) \notin W \\ \text{так } 1 \cdot 1 \neq 0$$

$$\text{Таким образом, } W \not\leq \mathbb{R}^3$$

$$\text{г) } W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = b = c\} = \{(a, a, a) \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$1) (0, 0, 0) \in W, \text{ так } 0 = 0 = 0$$

$$2) (a, a, a) \in W, (b, b, b) \in W \Rightarrow (a+b, a+b, a+b) \in W$$

$$\Rightarrow W \leq \mathbb{R}^3$$

$$3) \lambda \in \mathbb{R}, (a, a, a) \in W \Rightarrow (\lambda a, \lambda a, \lambda a) \in W$$

$$\text{д) } W = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a = b^2\} \subseteq \mathbb{R}^3 \\ = \{(b^2, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid b, c \in \mathbb{R}\}$$

$$1) (0, 0, 0) \in W \text{ так } 0^2 = 0$$

$$2) (b_1^2, b_1, c_1) \in W, (b_2^2, b_2, c_2) \in W \Rightarrow (b_1^2+b_2^2, b_1+b_2, c_1+c_2) \notin W \\ \text{пример: } (1, 1, 0) \in W, (1, 1, 0) \in W \Rightarrow (2, 2, 0) \notin W$$

$$\text{контрпример: } (3, 3, 0) \in W, (13, 5, 0) \notin W \\ (4, 2, 0) \in W, \text{ так } 4^2 \neq 13$$

$$\text{Таким образом, } W \not\leq \mathbb{R}^3$$

8) Heno je $W = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(-x) = -f(x) \text{ } \forall x \in \mathbb{R}\}$ - vektorski prostori. Dokaži da je $W \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ - de je uz $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}$.

$$W \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$

$$1) 0(x) = 0 \text{ - uga } \phi \text{ je}$$

$$0(-x) = 0 = -0 = -0(x) \Rightarrow 0 \in W$$

$$2) f, g \in W \Rightarrow f+g \in W$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= -f(x) \\ g(-x) &= -g(x) \end{aligned} \Rightarrow (f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f(x) + g(x)) = -(f+g)(x) \Rightarrow f+g \in W$$

$$3) \lambda \in \mathbb{R}, f \in W \Rightarrow \lambda f \in W$$

$$(\lambda f)(-x) = \lambda f(-x) = \lambda(-f(x)) = -\lambda f(x) = -(\lambda f)(x) \Rightarrow \lambda f \in W$$

15.

9) Heno je $U = \{p \in \mathbb{R}^4[x] \mid p(0) + p(1) = 0\}$, $W = \{p \in \mathbb{R}^4[x] \mid p(1) = p'(1) = 0\}$. Dokaži da su U i W vektorski prostori podprostora $\mathbb{R}^4[x]$ u ogreanu $U \cap W$.

$$U = \{p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \mid p(0) + p(1) = 0\} = \{p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \mid a + b + c + 2d = 0\} =$$

$$p(0) = d$$

$$p(1) = a + b + c + d$$

$$= \{p(x) = (-b - c - 2d)x^3 + bx^2 + cx + d \mid b, c, d \in \mathbb{R}\} = \{p(x) = \underbrace{b(-x^3 + x^2)}_{e_1} + \underbrace{c(-x^3 + x)}_{e_2} + \underbrace{d(-2x^3 + 1)}_{e_3} \mid b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{be_1 + ce_2 + de_3 \mid b, c, d \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4[x]$$

$$1) 0 \in U \text{ jer } 0 = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$$

$$2) p, q \in U \Rightarrow p+q \in U$$

$$p = b_1 e_1 + c_1 e_2 + d_1 e_3 \Rightarrow p+q = (b_1 + b_2)e_1 + (c_1 + c_2)e_2 + (d_1 + d_2)e_3 \Rightarrow p+q \in U$$

$$q = b_2 e_1 + c_2 e_2 + d_2 e_3$$

$$3) \lambda \in \mathbb{R}, p \in U \Rightarrow \lambda p \in U$$

$$p = b e_1 + c e_2 + d e_3 \Rightarrow \lambda p = \lambda b e_1 + \lambda c e_2 + \lambda d e_3 \Rightarrow \lambda p \in U$$

II HAYH:

$$1) 0 \in U \text{ jer } 0(0) + 0(1) = 0$$

$$2) p, q \in U \Rightarrow p+q \in U$$

$$p(0) + p(1) = 0$$

$$q(0) + q(1) = 0$$

$$\Rightarrow (p+q)(0) + (p+q)(1) = p(0) + q(0) + p(1) + q(1) =$$

$$= \underbrace{p(0) + p(1)}_{=0} + \underbrace{q(0) + q(1)}_{=0} = 0 + 0 = 0$$

$$3) \lambda \in \mathbb{R}, p \in U \Rightarrow \lambda p \in U$$

$$(\lambda p)(0) + (\lambda p)(1) = \lambda p(0) + \lambda p(1) = \lambda(p(0) + p(1)) = \lambda \cdot 0 = 0$$

$$W = \{p \in \mathbb{R}^4[x] \mid p(1) = p'(1) = 0\} = \{p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \mid p(1) = p'(1) = 0\}$$

$$p(1) = a + b + c + d = 0$$

$$p'(1) = 3a + 2b + c = 0$$

$$\begin{aligned} p(1) &= a + b + c + d = 0 \\ p'(1) &= 3a + 2b + c = 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &1. - 3) \\ &2. + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 0 \\ -6 - 2a - 3d &= 0 \end{aligned}$$

$$c, d \in \mathbb{R} \quad b = -2c - 3d$$

$$a = -b - c - d = 2c + 3d - c - d = c + 2d$$

$$W = \{(c+2d)x^3 + (-2c-3d)x^2 + cx + d \mid c, d \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{c \underbrace{(x^3 - 2x^2 + x)}_{f_1} + d \underbrace{(2x^3 - 3x^2 + 1)}_{f_2} \mid c, d \in \mathbb{R}\} = \Omega(f_1, f_2)$$

$$1) 0 \in U \text{ jer } 0 = 0 \cdot f_1 + 0 \cdot f_2$$

$$2) p, q \in U \Rightarrow p+q \in U$$

$$3) \lambda \in \mathbb{R}, p \in U \Rightarrow \lambda p \in U$$

$$U \cap W = \{ p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \mid p(0) + p(1) = 0, p(1) = p'(1) = 0 \}$$

$$p(0) = 0 \Rightarrow \boxed{d=0} \quad \Rightarrow p(0) = 0$$

$$p(1) = 0 \Rightarrow a + b + c + d = 0$$

$$p'(1) = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = 0$$

$$\begin{array}{r} \boxed{a} + b + c = 0 \quad / \cdot (-3) \\ 3a + 2b + c = 0 \quad \times + \\ \hline a + b + c = 0 \\ -b - 2c = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} c \in \mathbb{R} \quad \boxed{b = -2c} \\ a = -b - c = 2c - c \Rightarrow \boxed{a = c} \\ d = 0 \end{array}$$

$$U \cap W = \{ cx^3 - 2cx^2 + cx \mid c \in \mathbb{R} \} = \{ c \underbrace{(x^3 - 2x^2 + x)}_{g_1} \mid c \in \mathbb{R} \} = \Omega(g_1)$$