

Хиперболическе једначине

①

Нека је $T > 0$ и $\Omega = (0,1) \times (0,T)$. Разматрамо хиперболичку једначину

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega, \quad (1)$$

са граничним

$$u(0,t) = u_2(t), \quad u(1,t) = u_3(t), \quad t \in [0,T] \quad (2)$$

и почетним условима

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \quad x \in [0,1], \quad (3)$$

где је $f \in C(\bar{\Omega})$, $u_i \in C^2[0,1]$, $i=0,1$, $u_j \in C^2[0,T]$, $j=2,3$.

Метода коначних разлика

Нека је $N \gg 2$ и $M \gg 2$, $h = \frac{1}{N}$, $\tau = \frac{T}{M}$,

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_j \mid t_j = j \cdot \tau, \quad j=0,1,\dots,M, \quad \tau = \frac{T}{M}\},$$

$$\bar{\omega}_h = \{x_i \mid x_i = i \cdot h, \quad i=0,1,\dots,N, \quad h = \frac{1}{N}\},$$

и

$$\bar{\Omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$$

равномерна мрежа на $\bar{\Omega}$. Нека је $v(x,t)$ ф-ја дефинисана на мрежи $\bar{\Omega}_{h\tau}$. Њене вредности у зворовима мреже означавамо са

$$v_{ij} = v(x_i, t_j).$$

Проблем (1)-(3) дискретизујемо на следећи начин:

$$\begin{aligned} v_{t\bar{t},i}^j &= \sigma v_{x\bar{x},i}^{j+1} + (1-2\sigma) v_{x\bar{x},i}^j + \sigma v_{x\bar{x},i}^{j-1} + f_i^j \\ i &= 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 1, 2, \dots, M-1, \\ v_0^j &= u_2^j, \quad v_N^j = u_3^j \quad j = 0, 1, \dots, M, \\ v_i^0 &= u_0(x_i), \\ v_i^1 &= u_0(x_i) + \tau u_1(x_i) + \frac{\tau^2}{2} [u_0''(x_i) + f(x_i, 0)], \quad i = 0, 1, \dots, N, \end{aligned} \tag{4}$$

где је $\sigma \in \mathbb{R}$ мезански параметар.

За $\sigma \gg \frac{1}{4}$ схема (4) је асимптотично стабилна, док је за $\sigma < \frac{1}{4}$ стабилност условљена са

$$\tau \leq h \sqrt{\frac{1-\sigma}{1-4\sigma}},$$

односно

$$1 - \tau^2(0,25 - \sigma) \cdot \frac{4}{h^2} \geq \epsilon > 0.$$

Схема је магнитички $O(h^2 + \tau^2)$.

Апроксимација другог магнитичког услова се добија из Пејноровог развоја:

$$u(x, \tau) = \overset{u_0(x)}{u(x, 0)} + \tau \overset{u_1(x)}{\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)} + \frac{\tau^2}{2} \overset{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_0''(x)}{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, 0)} + f(x, 0) + O(\tau^3)$$

$$\Rightarrow u(x, \tau) \approx u_0(x) + \tau u_1(x) + \frac{\tau^2}{2} (u_0''(x) + f(x, 0))$$

Пример 1:

Експлицитном схемом ($\sigma=0$) са корауима $h=0.2$ и $\tau=0.1$ решити мешовити проблем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-t} \sin \pi x, \quad (x, t) \in (0, 1) \times (0, 0.5)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = -\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \frac{\sin \pi x}{\pi^2 + 1}$$

и одредити грешку, ако је тачно решење $u(x, t) = \frac{e^{-t} \sin \pi x}{\pi^2 + 1}$.
Разунајте са 4 децимале. (Користити маштаб).

Решење:

Прво формирајмо мрежу:

$$h = \frac{1}{N} \Rightarrow N = \frac{1}{0.2} = 5,$$

$$\tau = \frac{T}{M} \Rightarrow M = \frac{0.5}{0.1} = 5.$$

Затим је

$$\psi(x, t) = e^{-t} \sin \pi x$$

$$u_0(x) = \frac{\sin \pi x}{1 + \pi^2}, \quad u_1(x) = -u_0(x),$$

$$u_2(x) = u_3(x) = 0.$$

Једначину дискретизујемо експлицитном схемом:

$$v_{t\bar{t}, i}^j = v_{x\bar{x}, i}^j + f_i^j, \quad i = \overline{1, 4}, \quad j = \overline{1, 4}$$

$$\frac{v_{i+1}^{j+1} - 2v_i^{j+1} + v_{i-1}^{j+1}}{\tau^2} = \frac{v_{i+1}^j - 2v_i^j + v_{i-1}^j}{h^2} + f_i^j \quad / \cdot \tau^2$$

$$\underline{v_i^{j+1}} - 2v_i^j + v_{i-1}^{j+1} = \frac{\tau^2}{h^2} (v_{i+1}^j - 2v_i^j + v_{i-1}^j) + \tau^2 f_i^j$$

$$v_i^{j+1} = \frac{\tau^2}{h^2} (v_{i+1}^j + v_{i-1}^j) + 2(1 - \frac{\tau^2}{h^2}) v_i^j - v_i^{j-1} + \tau^2 \varphi_i^j, \quad i=\overline{1,4}, j=\overline{1,4} \quad (5)$$

и $v_0^j = 0, v_N^j = 0, j=\overline{0,5}$

$$v_i^0 = u_0(x_i), \quad i=\overline{0,5} \quad (8)$$

$$v_i^1 = u_0(x_i) + \tau u_1(x_i) + \frac{\tau^2}{2} [u_0''(x_i) + \varphi(x_i, 0)], \quad i=\overline{1,5}.$$

Приметимо да је услов

$$1 - \tau^2(0.25 - \sigma^0) \cdot \frac{4}{h^2} > 0 \Rightarrow 1 - \frac{\tau^2}{h^2} > 0 \Rightarrow \frac{\tau^2}{h^2} < 1$$

испуњен, па је схема стабилна.

Вредности $v_i^0, v_i^1, i=\overline{1,5}$ и $v_0^j, v_N^j, j=\overline{1,5}$ одређујемо из (8) и уписујемо у табелу, а ваши и остале користимо (5):

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0541	0.0489	0.0719 0.0444	0.0405	0.0371	0.0340
2	0.0875	0.0792	0.0719	0.0656	0.0600	0.0551
3	0.0875	0.0792	0.0719 0.0444	0.0656	0.0600	0.0551
4	0.0541	0.0489	0.0444	0.0405	0.0371	0.0340
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Трешка:

$$e = \max_{1 \leq i, j \leq 5} |v_i^j - u(x_i, t_j)| = 0.0020.$$

Пример 2:

Прейходни задатак решити користећи схему са коефицијентом $\sigma = 1/4$.

Решење: Једначину апроксимирамо постоју:

$$v_{x\bar{x},i}^j = \sigma v_{x\bar{x},i}^{j+1} + (1-2\sigma) v_{x\bar{x},i}^j + \sigma v_{x\bar{x},i}^{j-1} + \varphi_i^j$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\tau^2} (v_{i+1}^{j+1} - 2v_i^{j+1} + v_{i-1}^{j+1}) = \frac{1}{\Delta^2} \cdot \frac{1}{4} (v_{i+1}^{j+1} - 2v_i^{j+1} + v_{i-1}^{j+1}) + \frac{1}{\Delta^2} \cdot \frac{1}{2} (v_{i+1}^j - 2v_i^j + v_{i-1}^j) + \frac{1}{\Delta^2} \cdot \frac{1}{4} (v_{i+1}^{j-1} - 2v_i^{j-1} + v_{i-1}^{j-1}) + \varphi_i^j \quad / \cdot \tau^2$$

$$\Rightarrow \left[-\frac{\tau^2}{4\Delta^2} v_{i+1}^{j+1} + \left(\frac{2}{4} \cdot \frac{\tau^2}{\Delta^2} + 1 \right) v_i^{j+1} - \frac{\tau^2}{4\Delta^2} v_{i-1}^{j+1} = \frac{\tau^2}{\Delta^2} \cdot \frac{1}{2} (v_{i+1}^j - 2v_i^j + v_{i-1}^j) + \frac{\tau^2}{\Delta^2} \cdot \frac{1}{4} (v_{i+1}^{j-1} - 2v_i^{j-1} + v_{i-1}^{j-1}) + \varphi_i^j \cdot \tau^2 \right]$$

$i, j = \overline{1, 4}$

Добити смо пропорционални систем једначина са матрицом:

$$A = \begin{bmatrix} 1.1250 & -0.0625 & 0 & 0 \\ -0.0625 & 1.1250 & -0.0625 & 0 \\ 0 & -0.0625 & 1.1250 & -0.0625 \\ 0 & 0 & -0.0625 & 1.1250 \end{bmatrix}$$

Следи табела са решењима. Унесите у само вредности које се разликују од вредности прейходне табеле.

$\begin{matrix} d \\ i \end{matrix}$	0	1	2	3	4	5
0						
1					0.0370	0.0339
2				0.0655	0.0599	0.0549
3				0.0655	0.0599	0.0549
4					0.0370	0.0339
5						