

Paraboličke jednačine

Paraboličke jednačine

Neka je $\Omega = (0, 1) \times (0, T)$, gdje je $T > 0$.

Posmatramo jednačinu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \quad (1)$$

sa graničnim uslovima

$$u(0, t) = u_1(t), \quad u(1, t) = u_2(t), \quad t \in [0, T] \quad (2)$$

i početnim uslovom

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [0, 1] \quad (3)$$

gde je

$$f \in C(\bar{\Omega}), \quad u_0 \in C^2[0, 1], \quad u_1, u_2 \in C^1[0, T]. \quad (3)$$

Ako su ispunjeni uslovi saglasnosti nultog reda:

$$u_0(0) = u_1(0) \quad \text{ i } \quad u_0(1) = u_2(0), \quad (4)$$

tada postoji jedinstveno rešenje problema koje je iz $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$.

Metoda konačnih razlika – opšta shema

Neka je $N \geq 2$, $h = \frac{1}{N}$. Označimo sa

$$\bar{\omega}_h = \{x_i \mid x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N\}, \quad h = \frac{1}{N} \quad (5)$$

ravnomernu mrežu na segmentu $[0, 1]$ i $\bar{\Omega}_{h,\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$, gde je $\bar{\omega}_\tau$ mreža sa vremenskim korakom τ definisana na sličan način kao i u 5 .

Neka je $v(x, t)$ mrežna funkcija definisana na $\bar{\Omega}_{h,\tau}$. Označavamo $v_i^j = v(x_i, t_j)$.

Problem (1)–(3) diskretizujemo na sledeći način:

$$v_{t,i}^j = \left(v_{\bar{x},i}^{j+1} + f_i^{j+1}\right)\sigma + \left(v_{\bar{x},i}^j + f_i^j\right)(1 - \sigma), \quad i = 1, \dots, N-1, \quad j = 0, \dots, M-1 \quad (6)$$

$$v_0^j = u_1^j, \quad v_N^j = u_2^j, \quad j = 0, \dots, M \quad (7)$$

$$v_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (8)$$

Parametar $\sigma \in [0, 1]$ nazivamo **vremenskim parametrom** a shemu 6 shemu sa težinom .

$\sigma = 0$ **eksplicitna shema**

$\sigma = \frac{1}{2}$ **Krank-Nikolsonova shema**

$\sigma = 1$ **implicitna shema**

Shema je apsolutno stabilna za $\sigma \geq \frac{1}{2}$, dok za $0 \leq \sigma < \frac{1}{2}$ konvergira ako je $\tau \leq \frac{h^2}{2-4\sigma}$ (uslovna stabilnost). Ako je $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in C(\bar{\Omega})$ shema je tačnosti $\mathcal{O}(h^2 + \tau)$. Ako je još $\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \in C(\bar{\Omega})$ i $\tau = \frac{1}{2}$, onda je tačnosti $\mathcal{O}(h^2 + \tau^2)$.

EksPLICITNA shema

Ako je $\sigma = 0$:

$$v_{t,i}^j = v_{\bar{x},i}^j + f_i^j, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad j = 0, \dots, M-1 \quad (9)$$

$$v_0^j = u_1^j, \quad v_N^j = u_2^j, \quad j = 0, \dots, M \quad (10)$$

$$v_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (11)$$

Shema je apsolutno stabilna ako je $\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$.

Primer 1

Neka je $h = 0,1$, $\tau = 0,01$. Eksplicitnom shemom rešiti mešoviti problem:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x + t, \quad 0 < x < 1, \quad 0 \leq t \leq 0,02$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \in [0, 0,02]$$

$$u(x, 0) = (0,1 x^2 + 1,5) \sin(\pi x), \quad x \in [0, 1].$$

Računati na četiri decimala.

Primećujemo da je $\frac{\tau}{h^2} = 1 \neq \frac{1}{2}$, pa shema **nije** apsolutno stabilna.

$h = \frac{1}{N}, N = \frac{1}{0,1} = 10, \tau = \frac{T}{M} \implies M = \frac{0,02}{0,01} = 2$. Funkcije $f(x, t) = 2x + t, u_1(t), u_2(t) \in C(\Omega)$ i $u_0(x) \in C^2(\Omega)$. Ispunjeni su uslovi saglasnosti $u_0(0) = u_1(0)$ i $u_0(1) = u_2(0)$ pa postoji jedinstveno rešenje problema klase $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. Jednačinu diskretizujemo eksplicitnom shemom:

$$\begin{aligned} v_{t,i}^j &= v_{\bar{x},i}^j + f_i^j \\ \frac{v_i^{j+1} - v_i^j}{\tau} &= \frac{v_{i+1}^j - 2v_i^j + v_{i-1}^j}{h^2} + f_i^j \quad / \tau \\ v_i^{j+1} &= v_i^j + \frac{\tau}{h^2} (v_{i+1}^j - 2v_i^j + v_{i-1}^j) + \tau f_i^j \\ v_i^{j+1} &= \frac{\tau}{h^2} v_{i-1}^j + \left(1 - 2\frac{\tau}{h^2}\right) v_i^j + \frac{\tau}{h^2} v_{i+1}^j + \tau f_i^j \end{aligned}$$

Za $i = 1, \dots, 9, \quad j = 0, 1$

$$v_0^j = u_1^j, \quad v_N^j = u_2^j, \quad j = 0, 1, 2.$$

$$v_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, 10$$

$\bar{\omega}_h = \{0, 0.1, 0.2, \dots, 1\}$. $\bar{\tau}_h = \{0, 0.01, 0.02\}$. Na nultom vremenskom sloju imamo zadate početne uslove

$$v_i^0 = v_0(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, 10.$$

koje direktno izračunavamo. Aproksimaciju upisujemo u tabeli

$i \backslash j$	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	
0	0.0000	0.0000	0.0000	$\leftarrow u_1(t)$
1	0.4669	0.4426	0.4165	
2	0.9025	0.8130	0.8056	
3	1.2936	1.2139	1.3319	
4	1.5940	1.4826	1.5711	
5	1.7750	1.6591	1.4940	
6	1.8032	1.6691	1.4940	
7	1.6946	1.4940	1.2934	
8	1.2933	1.1020	0.9448	
9	0.7389	0.5796	0.5524	
10	0.0000	0.0000	0.0000	$\leftarrow u_2(t)$

$$\begin{aligned} v_i^1 &= v_{i+1}^0 - v_i^0 + v_{i-1}^0 + 0,01f_i^0 \\ &= v_{i+1}^0 - v_i^0 + v_{i-1}^0 + 0,01(2x_i + 0), \quad i = 1, 2, \dots, 9. \end{aligned}$$

Recimo, možemo izračunati za $j = 1$

$$\begin{aligned} v_1^1 &= v_2^0 - v_1^0 + v_0^0 + 0.01 \cdot 2 \cdot 0.1 \\ &= 0.9075 - 0.4669 + 0.0020 = 0.4426, \quad i = 1, 2, \dots, 9. \end{aligned}$$

Za $j = 2$

$$v_i^2 = v_{i+1}^1 - v_i^1 + v_{i-1}^1 + 0,01f_i^1, \quad i = 1, 2, \dots, 9.$$

Za svaki vremenski sloj matrica sistema je ista dok desna strana zavisi od vremenskog sloja. S obzirom da je shema nestabilna rešenje može da oscilira. Smanjivanjem vremenskog koraka τ moguće je dobiti stabilnu shemu i izbeći oscilacije.

Implicitna shema

Za $\sigma = 1$:

$$v_{t,i}^j = v_{xx,i}^{j+1} + f_i^{j+1}, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad j = 0, \dots, M-1 \quad (12)$$

$$v_0^j = u_1^j, \quad v_N^j = u_2^j, \quad j = 0, \dots, M \quad (13)$$

$$v_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 0, N. \quad (14)$$

Kod implicitne sheme na svakom vremenskom sloju rešavamo sistem linearnih jednačina što otežava efikasnost i brzinu izvršavanja programa ali je zagarantovana stabilnost bez obzira na izbor koraka h i τ .

Primer 2

Rešavamo prethodni zadatak implicitnom shemom.

Diskretizacijom dobijamo:

$$\begin{aligned}\frac{v_i^{j+1} - v_i^j}{\tau} &= \frac{v_{i+1}^{j+1} - 2v_i^{j+1} + v_{i-1}^{j+1}}{h^2} + f_i^j / \tau \\ v_i^{j+1} &= v_i^j + \frac{\tau}{h^2} (v_{i+1}^{j+1} - 2v_i^{j+1} + v_{i-1}^{j+1}) + \tau f_i^{j+1} \\ v_i^{j+1} &= -\frac{\tau}{h^2} v_{i-1}^{j+1} + \left(1 - 2\frac{\tau}{h^2}\right) v_i^{j+1} - \frac{\tau}{h^2} v_{i+1}^{j+1} + \tau f_i^{j+1}\end{aligned}$$

Za $i = 1, \dots, 9, \quad j = 0, 1$

$$v_0^j = u_1^j, \quad v_N^j = u_2^j, \quad j = 0, 1, 2.$$

$$v_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, 10$$

Ovo je sistem linearnih jednačina $A \mathbf{v}^{j+1} = \tau \mathbf{F}^{j+1} + \mathbf{v}^j$ sa matricom:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

gde je $\mathbf{v}^{j+1} = (v_1^{j+1}, v_2^{j+1}, \dots, v_{N-1}^{j+1})^T, \mathbf{F}^{j+1} = (f_1^{j+1}, f_2^{j+1}, \dots, f_{N-1}^{j+1})^T$.

Matrica A je **ista na svakom vremenskom koraku**. U ovakvim situacijama zgodno je koristiti LU dekompoziciju za rešavanje svih dobijenih sistema linearnih jednačina. Koristi se **Thomasov algoritam** (LU dekompozicija tridiagonalnih matrica).

Rešenje koje se dobija korišćenjem Matlabovog operatora `\` je prikazano u sledećoj tabeli.

$i \backslash j$	$j = 0$	$j = 1$	$j = 2$	
0	0.0000	0.0000	0.0000	$\leftarrow u_1(t)$
1	0.4669	0.4460	0.4446	
2	0.9025	0.8175	0.8030	
3	1.2936	1.2433	1.1338	
4	1.5940	1.4847	1.3780	
5	1.7750	1.6336	1.5102	
6	1.8032	1.6464	1.5028	
7	1.6196	1.4842	1.3400	
8	1.2955	1.1430	1.0187	
9	0.7389	0.6333	0.5567	
10	0.0000	0.0000	0.0000	$\leftarrow u_2(t)$