

Numeričke metode za početne probleme — višekoračne metode

Sadržaj

Eksplisitne Adamsove	1
Adamsove implicitne formule	4
Milnove metode	4
Ponovo razmatramo početni problem	

$$\begin{aligned}y' &= f(x, y), \quad x < x_0 \\ y(x_0) &= y_0,\end{aligned}$$

gde su x_0 i y_0 zadate realne vrednosti i f zadata funkcije. Jednačinu integralimo u granicama x_j do x_{j+1} , na ekvidistantnoj mreži i dobijamo

$$y(x_{j+1}) = y(x_j) + \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x, y(x)) dx.$$

Kod Runge-Kuta metoda integral smo aproksimirali kvadraturnom formulom

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x, y(x)) dx \approx h \sum_{i=1}^n c_i f(\xi_i, y(\xi_i)),$$

gde su c_i koeficijenti kvadrature formule, a $\xi_i \in [x_j, x_{j+1}]$ odgovarajući čvorovi. Imali smo problem što vrednosti $y(\xi_i)$ nisu poznate, pa smo ih aproksimirali koristeći Ojlerovu metodu na svakom koraku. Međutim, računski efikasnije bi bilo iskoristiti već izračunate aproksimacije rešenja, umesto ovih međuvrednosti. Takvu metodu možemo dobiti tako što konstruisemo interpolacioni polinom funkcije $f(x, y)$ nad nekim skupom čvorova koji predstavljaju tačke naše mreže. Time dobijamo tzv. višekoračne metode.

Dakle, kod višekoračnih metoda, umesto da koristimo samo jednu (početnu) vrednost kako bismo izračunali novu aproksimaciju, koristimo nekoliko prethodno izračunatih vrednosti. Ove metode su bolje od jednokoračnih u situacijama kada nam je neophodna velika tačnost (manje računa).

Eksplisitne Adamsove

Eksplisitne Adamsove formule, dobijaju se tako što podintegralnu funkciju $f(x, y)$ aproksimiramo interpolacionim polinomom koji je konstruisan nad s čvorova.

Dakle, pretpostavimo da smo na neki način odredili aproksimacije

$$y_0, y_1, \dots, y_{s-1}.$$

Pitanje je kako da odredimo novu aproksimaciju y_s . Iskoristićemo interpolacioni polinom Lagranža

$$L_{s-1}(x) = \sum_{i=0}^{s-1} \prod_{k=0, k \neq i}^{s-1} \frac{x - x_k}{x_i - x_k} f_i = \sum_{i=0}^{s-1} l_i(x) f_i = \sum_{i=1}^s l_{i-1}(x) f_{i-1},$$

gde je

$$l_i(x) = \prod_{k=0, k \neq i} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}.$$

Kada formulu budemo koristili, kretaćemo se unazad, pa preindeksirajmo formulu u

$$L_{s-1}(x) = \sum_{i=1}^s l_{s-i}(x) f_{s-i},$$

$$l_{s-i} = \prod_{k=1, k \neq i}^s \frac{x - x_{s-k}}{x_{s-i} - x_{s-k}}$$

Na kraju, uopštimo formulu, tj. zamenimo s sa $j+1$, pa dobijamo

$$L_{s-1}(x) = \sum_{i=1}^s f_{j+1-i} l_{j+1-i}(x)$$

$$l_{j+1-i}(x) = \prod_{k=1, k \neq i}^s \frac{x - x_{j+1-k}}{x_{j+1-i} - x_{j+1-k}}, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Zamenom interpolacionog polinoma u integralni oblik početnog problema dobijamo

$$y_{j+1} = y_j + \sum_{i=1}^s f_{j+1-i} \int_{x_j}^{x_{j+1}} l_{j+1-i}(x) dx.$$

Ako uvedemo linearnu smenu promenljive $x = ht + x_j = h(t-1) + x_{j+1}$, koja interval $[x_j, x_{j+1}]$ preslikava na interval $[0, 1]$, i iskoristimo da je $x_{j+1-k} = x_{j+1} - hk$, integral osnovnih polinoma se svodi na

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} l_{j+1-i}(x) dx = h \int_0^1 \prod_{k=1, k \neq i}^s \frac{t + k - 1}{k - i} dt,$$

što nam omogućava određivanje koeficijenata interpolacionog polinoma, nezavisno od intervala na kome se on konstruiše. Naime ako označimo

$$p_{j+1-i} = \int_0^1 \prod_{k=1, k \neq i}^s \frac{t + k - 1}{k - i} dt,$$

ove vrednosti možemo odrediti nezavisno od izbora čvorova.

Na primer, za $s = 2$, na osnovu opšte formule dobijamo da metoda ima oblik

$$y_{j+1} = y_j + \sum_{i=1}^2 f_{j+1-i} \int_{x_j}^{x_{j+1}} l_{j+1-i}(x) dx = y_j + h \sum_{i=1}^2 f_{j+1-i} p_{j+1-i},$$

gde su p_{j+1-i} koeficijenti koje trebamo odrediti. Kako je

$$p_{j+1-i} = \int_0^1 \prod_{k=1, k \neq i}^2 \frac{t + k - 1}{k - i} dt,$$

za $i = 1$ dobijamo

$$p_j = \int_0^1 (t + 1) dt = \frac{3}{2},$$

dok je za $i = 2$

$$p_{j-1} = \int_0^1 \frac{t}{-1} dt = -\frac{1}{2}.$$

Time smo odredili Adamsovu formulu reda 2:

$$y_{j+1} = y_j + h \left(\frac{3}{2}f_j - \frac{1}{2}f_{j-1} \right).$$

Za izvođenje Adamsovih formula se koriste i drugi oblici interpolacionih polinoma, npr. Njutnovi interpolacioni polinomi u slučaju kada je mreža ekvidistantna. Ovde smo koristili Lagranžov interpolacioni polinom, jer pomoću njega direktno dobijamo koeficijente kojima se množe vrednosti funkcije f_{j+1-i} , $i = 1, 2, \dots, s$. Ujedno, ovaj oblik je jednostavan i za programiranje. Zgodno je kreirati Octave funkciju koja će određivati koeficijente p_{j+1-i} , za $i = 1, 2, \dots, s$. Neka to bude funkcija `koefAdamsE`. Kao ulazni argument je dovoljan samo red metode s , a kao izlazni, vektor koji sadrži koeficijente Adamsove metode (pogledati kodove).

Sada koeficijente Adamsove formule, npr. reda 4, dobijamo jednostavnim pozivom

```
>> p=koefAdamsE(4)
p =

    2.2917    -2.4583     1.5417    -0.3750
```

Ako želimo decimalne vrednosti videti u racionalnom obliku tada koristimo funkciju `rats()`

```
>> rats(p)
ans =

    55/24    -59/24     37/24     -3/8
```

Navedimo još nekoliko obrazaca eksplicitne Adamsove metode za različite redove s :

$$\begin{aligned} s=1: & \quad y_{j+1} = y_j + hf_j, \quad j=0, 1, \dots \\ s=2: & \quad y_{j+1} = y_j + h \left(\frac{3}{2}f_j - \frac{1}{2}f_{j-1} \right), \quad j=1, 2, \dots \\ s=3: & \quad y_{j+1} = y_j + h \left(\frac{23}{12}f_j - \frac{4}{3}f_{j-1} + \frac{5}{12}f_{j-2} \right), \quad j=2, 3, \dots \\ s=4: & \quad y_{j+1} = y_j + h \left(\frac{55}{24}f_j - \frac{59}{24}f_{j-1} + \frac{37}{24}f_{j-2} - \frac{3}{8}f_{j-3} \right), \quad j=3, 4, \dots \\ s=5: & \quad y_{j+1} = y_j + h \left(\frac{1901}{720}f_j - \frac{1387}{360}f_{j-1} + \frac{109}{30}f_{j-2} - \frac{637}{360}f_{j-3} + \frac{251}{720}f_{j-4} \right), \quad j=4, 5, \dots \end{aligned}$$

Određivanje početnih vrednosti

Iz ovih formula je očigledno da nam je za primenu Adamsove metode reda s , nepohodno s početnih vrednosti $y_0, y_1, \dots, y_{s-1}$. S obzirom na to da imamo samo jednu početnu vrednost y_0 , preostale moramo odrediti koristeći neku drugu numeričku metodu. Najčešće se koriste metode Runge - Kuta. Kako bi red tačnosti ostao s , biramo i Runge - Kuta metodu reda s . Možemo koristiti i metodu višeg reda tačnosti od eksplicitne Adamsove, što ćemo i uraditi pri implementaciji Adamsove metode u Matlabu. Treba imati u vidu da će to bespotrebno povećavati broj računskih operacija i time smanjiti efikasnost metode, a red tačnosti se neće povećati. Kod jednostavnih primera i malih mreža to nije problem. Niži red tačnosti metode Runge - Kuta u odnosu na metodu Adamsa nije dobro koristiti, jer će to uticati na snižavanje reda tačnosti Adamsove metode.

Adamsovu metodu u kombinaciji sa metodom Runge-Kuta implementiraćemo u Octavu. Funkciju ćemo nazvati npr. $[x, y] = \text{AdamsE}(b, \text{primer}, h, s)$. Za ulazne argumente ćemo izabrati 'primer' - ime skript fajla u kome se nalaze podaci početnog problema (isti kao i ranije), zatim korak podele mreže h , red metode s i tačka b -kraj intervala na kome želimo dobiti vrednosti aproksimacije. A za izlazne, x -čvorovi mreže i y -aproksimacija. Pogledati kod funkcije `AdamsE`.

Fukciju koja koristi Adamsovu prediktor-korektor metodu ili Milnovu metodu možemo na skoro identičan način implementirati kao i funkciju `Adamas(primer, P, h)` (pogledati kodove).

Adamsove implicitne formule

$$\begin{aligned}s = 1: & \quad y_{j+1} = y_j + hf_{j+1}, \quad j = 0, 1, \dots \\s = 2: & \quad y_{j+1} = y_j + h \left(\frac{1}{2}f_{j+1} + \frac{1}{2}f_j \right), \quad j = 0, 1, \dots \\s = 3: & \quad y_{j+1} = y_j + h \left(\frac{5}{12}f_{j+1} + \frac{2}{3}f_j - \frac{1}{12}f_{j-1} \right), \quad j = 1, 2, \dots \\s = 4: & \quad y_{j+1} = y_j + h \left(\frac{3}{8}f_{j+1} + \frac{19}{24}f_j - \frac{5}{24}f_{j-1} + \frac{1}{24}f_{j-2} \right), \quad j = 2, 3, \dots \\s = 5: & \quad y_{j+1} = y_j + h \left(\frac{251}{720}f_{j+1} + \frac{323}{360}f_j - \frac{11}{30}f_{j-1} - \frac{53}{360}f_{j-2} - \frac{19}{720}f_{j-3} \right), \quad j = 3, 4, \dots\end{aligned}$$

S obzirom na to da je formula implicitna, da bismo dobili novu vrednost y_{j+1} neophodno je rešiti nelinearnu jednačinu nekom numeričkom metodom. Najčešće se koristi Njutnova metoda za određivanje nule nelinearne jednačine.

Prediktor - korektor Adamsove metode

Prediktor - korektor Adamsove metode Slično kao i kod metoda Runge - Kuta, implicitne Adamsove metode se mogu koristiti u paru sa eksplicitnim, kako bi se izbeglo rešavanje nelinearne jednačine. Tako da se dobijaju prediktor-korektor metode, sa tim da se uzimaju kao par metode istog reda tačnosti s . Na primer, za $s = 1$, Adamsova prediktor - korektor metoda bi glasila

$$\begin{aligned}y_{j+1}^* &= y_j + hf_j \\y_{j+1} &= y_j + hf_{j+1}^*, \quad f_{j+1}^* = f(x_{j+1}, y_{j+1}^*) \quad j = 0, 1, \dots\end{aligned}$$

Milnove metode

Sada jednačina početnog problema integralimo od x_{j-1} do x_{j+1}

$$y(x_{j+1}) = y(x_{j-1}) + \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} f(x, y(x)) dx$$

a zatim integral aproksimirajmo Simpsonovom kvadraturnom formulom

$$y_{j+1} = y_{j-1} + \frac{h}{3} (f_{j+1} + 4f_j + f_{j-1})$$

Ovo je implicitna numerička metoda. Eksplicitna se dobija ako se jednačina početnog problema integriro u granicama od x_{j-3} do x_{j+1} , a zatim se $f(x, y)$ aproksimira interpolacionim polinomom trećeg stepena nad čvorovima

$$y(x_{j+1}) = y(x_{j-3}) + \int_{x_{j-3}}^{x_{j+1}} f(x, y(x)) dx$$

a zatim se podintegralna funkcija interpolira sa čvorovima $x_{j-3}, x_{j-2}, x_{j-1}, x_j$. Nakon integraljenja interpolacionog polinoma se dobija

$$y_{j+1} = y_{j-3} + \frac{4h}{3} (2f_j - f_{j-1} + 2f_{j-2}).$$

Eksplicitna i implicitna Milnova metoda se najčešće koriste u paru, kao prediktor - korektor metoda:

$$\begin{aligned}y_{j+1}^* &= y_{j-3} + \frac{4h}{3} (2f_j - f_{j-1} + 2f_{j-2}), \\y_{j+1} &= y_{j-1} + \frac{h}{3} (f_{j+1}^* + 4f_j + f_{j-1}), \quad j = 3, 4, \dots, f_{j+1}^* = f(x_{j+1}, y_{j+1}^*).\end{aligned}$$

Funkciju koja koristi Adamsovu prediktor-korektor metodu ili Milnovu metodu možemo na skoro identičan način implementirati kao i funkciju `Adamas(primer, P, h)` (pogledati kodove). Ako želimo da implementiramo recimo Milnovu prediktor korektor metodu bila bi mala izmena u sintaksi.

```
for j=4:n % Milnova prediktor-korektor metoda
y(j+1)=y(j-3)+4*h/3*(2*(F(j)-F(j-1))+2*F(j-2)');
y(j+1)=y(j-1)+h/3(f(x(j+1))+4*F(j)+F(j-1));
F(j+1)=f(x(j+1), y(j+1)); % upisujemo novu vrednost desne strane
end
```