

Metaheurističke metode 3.nedelja

November 3, 2024

Problem p -centra

- Dati su skup korisnika $I = \{1, 2, \dots, n\}$ i skup potencijalnih uslužnih centara $J = \{1, 2, \dots, m\}$
- Za svaki par (i, j) data je cena transportnih troškova c_{ij} .
- Zadat je broj p , tj. broj centara koje treba otvoriti
- Cilj je odrediti tačno p centara t.d. maksimalno rastojanje korisnika do njemu najbližeg centra bude minimalno
- Definišemo promenljive:

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{ako je na lokaciji } j \text{ otvoren centar} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}, j = \overline{1, m}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je korisnik } i \text{ pridružen centru } j \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}, j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}.$$

PCP: Model

w -pomocna promenljiva koja predstavlja maksimalno rastojanje korisnika do njemu najblizeg otvorenog centra

$$(min) \quad w$$

$$\sum_{j=1}^m y_j = p \quad (\text{Uspostavlja se tačno } p \text{ centara.})$$

$$x_{ij} \leq y_j, \quad j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n} \quad (\text{Onemogućava se pridruživanje korisnika centru koji nije uspostavljen.})$$

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, n} \quad (\text{Svaki korisnik se pridružuje tačno jednom centru.})$$

$$\sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} - w \leq 0, i = \overline{1, n} \quad (\text{vrednost } w \text{ se postavlja na maksimalno rastojanje- sva druga rastojanja su manja ili jednaka } w)$$

$$x_{ij}, y_j \in \{0, 1\} \quad j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}$$

PCP: format instance

n

m

p

$c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1m}$

$c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2m}$

$\dots$

$c_{n1}, c_{n2}, \dots, c_{nm}$

check

Lokacijski problem maksimalnog pokrivanja

The maximal covering location problem

- Dati su skup korisnika $I = \{1, 2, \dots, n\}$ i skup potencijalnih lokacija snabdevača $J = \{1, 2, \dots, m\}$
- Zadat je broj p , tj. broj lokacija snabdevača koje treba izabrati
- Za svaki par (i, j) dato je rastojanje c_{ij} .
- a_i -potražnja (populacija) korisnika i
- S -parametar koji definiše pokrivenost (korisnik i je pokriven snabdevačem na lokaciji j ukoliko je $c_{ij} \leq S$)
- Označimo: $N_i = \{j \in J | c_{ij} \leq S\}$ -skup lokacija (snabdevača) koje mogu da pokrivaju lokaciju (korisnika) i
- Cilj je nalaženje p čvorova na mreži (lokacije snabdevača), takvih da se iz njih za neko unapred zadato rastojanje (ili vreme putovanja, troškove) pokriva najveći broj (tražnja) korisnika.

MCLP: Model

Definišemo promenljive:

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{ako je lokacija } j \text{ odabrana za snabdevača} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}, j = \overline{1, m}$$

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{ako je korisnik } i \text{ pokriven} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}, i = \overline{1, n}.$$

$$\begin{aligned} (\max) \quad & \sum_{i=1}^n a_i x_i \\ & \sum_{j \in N_i} y_j \geq x_i, \quad i = \overline{1, n}, \text{ (Onemogućava se pokrivanje korisnika } i \text{ ukoliko je } y_j = 0, \forall j \in N_i.) \\ & \sum_{j=1}^m y_j = p, \text{ (Zahteva se odabir tačno } p \text{ lokacija snabdevača.)} \\ & x_i, y_j \in \{0, 1\}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m} \end{aligned}$$

MCLP: format instance

n

m

p

$c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1m}$

$c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2m}$

$\dots$

$c_{n1}, c_{n2}, \dots, c_{nm}$

$a_1, a_2, \dots, a_n$

S

check

Lokacijski problem anti-pokrivanja

Anti-covering location problem

- Dat je $G = (N, A)$ kompletan neusmereni graf, gde je $N = \{1, \dots, i, j, \dots, m\}$ skup čvorova potencijalnih lokacija, a A skup grana (i, j) , $i, j \in N$.
- Svakoj grani je pridružen nenegativni skalar c_{ij} koji predstavlja minimalnu udaljenost (prostornu ili vremensku) za svaki par čvorova $i, j \in N$.
- Svakom čvoru $i \in N$ pridružen je težinski koeficijent v_i koji predstavlja korisnost (važnost) lokacije.
- Neka je sa R označena vrednost minimalne dozvoljene udaljenosti između izabranih lokacija.
- Neka je $P(i) = \{j \in J | c_{ij} \leq R, i \neq j\}$, tj. podskup onih čvorova $j \in N$ koji su od čvora $i \in N$ udaljeni manje od unapred zadate dozvoljene udaljenosti R .
- M - zadata pozitivna konstanta (dovoljno velika)
- Cilj je naći vektor rešenja $x = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_m)$ kojom se maksimizuje korisnost datih lokacija.

ACLP: Model

Definišemo promenljive:

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{na lokaciji } i \text{ je uspostavljen centar} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}, i = \overline{1, m}$$

$$(max) \quad \sum_{i=1}^m v_i x_i$$

$$Mx_i + \sum_{j \in P(i)} x_j \leq M, \quad i = \overline{1, m}$$

$$x_i \in \{0, 1\}, i = \overline{1, m}$$

(Ograničenjima se garantuje da u R - okolini svake odabrane lokacije nema drugih odabranih lokacija, tj. odabrane lokacije se moraju nalaziti na međusobnom rastojanju većem od R .)

ACLP: format instance

m

$c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1m}$

$c_{21}, c_{22}, \dots, c_{2m}$

$\dots$

$c_{m1}, c_{m2}, \dots, c_{mm}$

$v_1, v_2, \dots, v_m$

R

M

$check$

Hab lokacijski problemi

- Prisutni su u mrežama za hitnu isporuku pošiljaka, telekomunikacionim mrežama, tj. u situacijama u kojima treba uspostaviti saobraćaj od početnog čvora (snabdevača) do krajnjeg čvora (korisnika).
- Transport se ne uspostavlja direktno, već je usmeren preko skupa čvorova koji su označeni kao habovi.
- Opšti tip HLP: lociranje habova, gde se kao kriterijum optimalnosti koji se minimizuje pojavljuje suma rastojanja od svakog izvorišnog čvora preko haba do svakog odredišnog čvora.
- Habovi predstavljaju centre konsolidacije i kolekcije protoka u mreži. Korišćenjem habova za preusmeravanja protoka, kapacitet mreže se može iskoristiti dosta efikasnije, a troškovi transporta se mogu dosta smanjiti.

HLP: Podele

- 1 Prema tipu alokacije (kako su ne-hab čvorovi alocirani habovima):
 - šema jednostruke alokacije (single allocation scheme), kod koje je svaki snabdevač/korisnik pridružen tačno jednom habu, tako da se sav transport od/do tog čvora obavlja isključivo preko odredjenog haba.
 - šema višestruke alokacije (multiple allocation scheme) dopušta svakom ne-hab čvoru da komunicira sa jednim ili više habova čime se ostvaruje veća fleksibilnost modela
- 2 Prema kapacitetu (ograničenja količine protoka kroz svaki hab)
 - HLP neograničenog kapaciteta (Uncapacitated hub location problem - UHLP)
 - HLP ograničenog kapaciteta (Capacitated hub location problem - CHLP). Ograničenja kapaciteta u mreži mogu biti: ograničena količina robe koja prolazi kroz hab čvor, ograničen protok između habova, ograničeni kapaciteti ne-hab čvorova i sl.

Hab lokacijski problem neograničenih kapaciteta sa jednostrukim alokacijama (Uncapacitated single allocation hub location problem)

- Dat je skup čvorova $I = \{1, 2, \dots, m\}$ i c_{ij} - rastojanja izmedju čvorova i i j , $i, j \in I$,
- f_k - fiksni trošak uspostavljanja haba na lokaciji k
- W_{ij} - količina robe koju treba transportovati od čvora i do čvora j ,
- Parametri λ, α, δ redom označavaju troškove (cenu) kolekcije, transfera i distribucije robe po jedinici količine. Npr, cena transporta jedinice količine robe duž puta $i \rightarrow k \rightarrow l \rightarrow j$ je $\lambda c_{ik} + \alpha c_{kl} + \delta c_{lj}$.
- Cilj je locirati habove i pridružiti im ne-hab čvorove t.d. suma transportnih troškova u mreži i fiksnih troškova lociranja habova bude minimalna. Broj habova nije unapred zadat, ne-hab čvorovi mogu biti dodeljeni tačno jednom habu i postoje fiksni troškovi za uspostavljanje habova.
- $O_i = \sum_{j \in I} W_{ij}$ - količina protoka koji polazi iz čvora i ,
- $D_j = \sum_{i \in I} W_{ij}$ - količina protoka koji dolazi u čvor j ,

USAHLP Model:

Definišemo promenljive:

$$z_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{ne-hab čvor } i \text{ je pridružen hab čvoru } k \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$z_{kk} = 1$, ako je na lokaciji k uspostavljen hab, inače je 0.

y_{kl}^i —količina protoka koji prolazi od snabdevača i i prenosi se preko habova k i l

$$(min) \quad \sum_{i,k \in I} c_{ik} z_{ik} (\lambda O_i + \delta D_i) + \sum_{i,k,l \in I} \alpha c_{kl} y_{kl}^i + \sum_{k \in I} z_{kk} f_k,$$

$$\sum_{k \in I} z_{ik} = 1, \quad \forall i \in I,$$

$$z_{ik} \leq z_{kk}, \quad \forall i, k \in I,$$

$$\sum_{j \in I} w_{ij} z_{jk} + \sum_{l \in I} y_{kl}^i = \sum_{l \in I} y_{lk}^i + O_i z_{ik}, \quad \forall i, k \in I$$

$$z_{ik} \in \{0, 1\}, y_{ik}^l \geq 0, \quad \forall i, k, l \in I$$

Prvi i drugi skup ograničenja sprečavaju direktnu komunikaciju između ne-hab čvorova. Očuvanje protoka u mreži obezbeđeno je trećim ograničenjem.

USAHLP: istanca

m

$c_{11}, \dots, c_{1m}$

$c_{21}, \dots, c_{2m}$

...

$c_{m1}, \dots, c_{mm}$

$w_{11}, \dots, w_{1m}$

$w_{21}, \dots, w_{2m}$

...

$w_{m1}, \dots, w_{mm}$

$f_1, \dots, f_m$

λ

α

δ

check

Hab lokacijski problem ograničenih kapaciteta sa jednostrukim alokacijama pozicije habova (Capacitated single allocation hub location problem)

Slične oznake kao za USAHLP:

- $I = \{1, 2, \dots, m\}$ - skup čvorova
- c_{ij} - rastojanje između čvorova i, j ,
- W_{ij} - količina protoka od snabdevača i do korisnika j ,
- f_k - fiksni troškovi uspostavljanja haba k ,
- M_k - kapacitet haba k ,
- $O_i = \sum_{j \in I} W_{ij}$ - količina protoka koji polazi iz čvora i ,
- $D_j = \sum_{i \in I} W_{ij}$ - količina protoka koji dolazi u čvor j ,
- Parametri λ, α, δ redom označavaju troškove (cenu) kolekcije, transfera i distribucije robe po jedinici količine
- Cilj: Minimizovati ukupne troškove transporta u mreži i fiksne troškove uspostavljanja habova.

CSAHL P: Model

Definišemo promenljive z_{ik} na isti način kao za USAHL P.

y_{kl}^i —količina protoka koji prolazi od snabdevača i i prenosi se preko habova k i l

$$\begin{aligned} (\min) \quad & \sum_{i,k \in I} c_{ik} z_{ik} (\lambda O_i + \delta D_i) + \sum_{i,k,l \in I} \alpha c_{kl} y_{kl}^i + \sum_{k \in I} z_{kk} f_k, \\ & \sum_{k \in I} z_{ik} = 1, \quad \forall i \in I, \\ & z_{ik} \leq z_{kk}, \quad \forall i, k \in I, \\ & \sum_{j \in I} w_{ij} z_{jk} + \sum_{l \in I} y_{kl}^i = \sum_{l \in I} y_{lk}^i + O_i z_{ik}, \quad \forall i, k \in I \\ & \sum_{i \in I} O_i z_{ik} \leq M_k z_{kk}, \quad \forall k \in I \\ & z_{ik} \in \{0, 1\}, y_{ik}^l \geq 0, \quad \forall i, k, l \in I \end{aligned}$$

Prvi i drugi skup ograničenja sprečavaju direktnu komunikaciju između ne-hab čvorova. Očuvanje protoka u mreži obezbeđeno je trećim ograničenjem, dok se četvrtim skupom ograničenja onemogućuje prekoračenje kapaciteta habova.

CSAHLP: Instanca

m

$c_{11}, \dots, c_{1m}$

$c_{21}, \dots, c_{2m}$

$\dots$

$c_{m1}, \dots, c_{mm}$

$w_{11}, \dots, w_{1m}$

$w_{21}, \dots, w_{2m}$

$\dots$

$w_{m1}, \dots, w_{mm}$

$f_1, \dots, f_m$

$M_1, M_2, \dots, M_m$

λ

α

δ

check

Questions?

