

1. Означимо са $a_n = \frac{2^n}{(n+1)!}$. Како је

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+2)!}}{\frac{2^n}{(n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1,$$

па дати ред конвергира на основу Даламберовог критеријума.

2. Домен дате функције $\mathcal{D} = (-\infty, 10]$. Први и други извод дате функције су

$$f'(x) = \sqrt{10-x} - \frac{x-1}{2\sqrt{10-x}} = \frac{2(10-x) - (x-1)}{2\sqrt{10-x}} = \frac{21-3x}{2\sqrt{10-x}}$$

Имамо да је

$$\begin{aligned} f''(x) &< 0 \text{ за } x \in (7, 10], \\ f''(x) &> 0 \text{ за } x \in (-\infty, 7), \\ f''(x) &= 0 \text{ за } x = 7, \end{aligned}$$

па закључујемо да

$$\begin{aligned} f &\text{ опада на } x \in (7, 10], \\ f &\text{ расте на } x \in (-\infty, 7), \\ x = 7 &\text{ је тачка локалног максимума.} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 dx}{x^2 - 1} &= \int \left(x + \frac{x}{x^2 - 1} \right) dx \\ &= \int \left(x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x-1+x+1}{(x-1)(x+1)} \right) dx \\ &= \int x dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} \\ &= \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} \ln(x+1) + \frac{1}{2} \ln(x-1) + c \end{aligned}$$

4. Уведимо смену $u = y'$ и поделимо целу једначину са x . Тада дата једначина постаје линеарна диференцијална једначина

$$u' + \frac{1}{x}u = x,$$

чије је решење

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left(c + \int e^{\int \frac{1}{x} dx} x dx \right) \\ &= e^{-\ln|x|} \left(c + \int e^{\ln|x|} x dx \right) \\ &= \frac{1}{x} \left(c + \int x^2 dx \right) \\ &= \frac{1}{x} \left(c + \frac{x^3}{3} \right), \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Остаје још да нађемо y .

$$\begin{aligned} y(x) &= \int \frac{1}{x} \left(c + \frac{x^3}{3} \right) dx \\ &= \int \left(\frac{c}{x} + \frac{x^2}{3} \right) dx \\ &= c \ln x + \frac{x^3}{9} + d, \quad c, d \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

5. Означимо са A догађај да је извучена лоптица која садржи цифру 1, са H_1 хипотезу да се куглица извлачи из прве кутије, а H_2 хипотеза да се куглица извлачи из друге кутије. Имамо

$$\begin{aligned} P(H_1) &= \frac{1}{6}, \quad P(H_2) = \frac{5}{6}, \\ P(A|H_1) &= \frac{6}{11}, \quad P(A|H_2) = \frac{5}{13}, \end{aligned}$$

па је коначно тражена вероватноћа једнака

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{11} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{13} = \frac{353}{858}.$$

6. (а) Видети у уџбенику.

(б) Означимо са

$$a_n = \frac{4^n + 3^n + n}{5^n}.$$

Како је

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4^{n+1} + 3^{n+1} + n+1}{5^{n+1}}}{\frac{4^n + 3^n + n}{5^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1} + 3^{n+1} + n + 1}{5(4^n + 3^n + n)} \cdot \frac{\frac{1}{4^n}}{\frac{1}{4^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{n+1}{4^n}}{5 \left(1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{n}{4^n}\right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + 3 \cdot 0 + 0}{5(1 + 0 + 0)} \\ &= \frac{4}{5} < 1 \end{aligned}$$

па дати ред конвергира по Даламберовом критеријуму.

7. Видети у уџбенику.