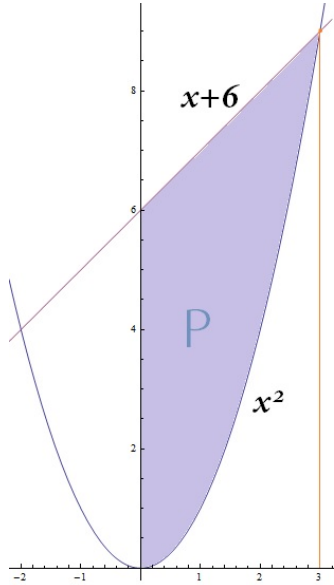


РЕШЕЊА ДРУГОГ КОЛОКВИЈУМА ИЗ МАТЕМАТИКЕ 13.01.2018.

Група 1

1. Пресечна тачка графика функција x^2 и $x+6$ је решење једначине $x^2 = x+6$. Решења ове једначине су $x_1 = -2$ и $x = 3$, али како гледамо део $x \geq 0$, горња граница интеграла биће 3. Тражена површина је

$$P = \int_0^3 (x+6-x^2)dx = \left. \frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3} \right|_0^3 = \frac{27}{2},$$



2. Делењем полазне једначине са x^4 , за $x \neq 0$ добијамо линеарну диференцијалну једначину

$$y' + \frac{4}{x}y = \frac{\sin^2 x \cos x}{x^4}.$$

Решење ове једначине је

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \frac{4}{x} dx} \left(c + \int \frac{\sin^2 x \cos x}{x^4} e^{\int \frac{4}{x} dx} dx \right) = \frac{1}{x^4} \left(c + \int \frac{\sin^2 x \cos x}{x^4} x^4 dx \right) = \\ &= \left[\frac{t = \sin x}{dt = \cos x dx} \right] = \frac{1}{x^4} \left(c + \int t^2 dt \right) = \frac{1}{x^4} \left(c + \frac{\sin^3 x}{3} \right). \end{aligned}$$

3. Најпре решавамо хомогену једначину

$$y'' + 4y' + 13y = 0.$$

Њена карактеристична једначина је

$$\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0,$$

па је

$$\lambda_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = -2 \pm 3i,$$

па закључујемо да је решење хомогене једначине

$$y_h = e^{-2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Сада тражимо партикуларно решење полазне једначине. Оно ће бити облика $y_p = Ae^{-2x}$. Нађимо први и други извод и убацимо добијене вредности у полазну једначину.

$$y_p' = -2Ae^{-2x}, \quad y_p'' = 4Ae^{-2x}.$$

Након убацивања, добијамо

$$4Ae^{-2x} - 8Ae^{-2x} + 13Ae^{-2x} = 18e^{-2x},$$

одакле је $A = 2$, односно $y_p = 2e^{-2x}$. Коначно, опште решење дате једначине је

$$y = y_h + y_p = e^{-2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x) + 2e^{-2x}.$$

4. Нека је A_i догађај да је i -ти стрелац погодио мету, $i \in \{1, 2, 3\}$, а догађај B догађај да је мету погодио тачно један стрелац.

а) Тражимо вероватноћу догађаја B . Приметимо

$$B = A_1 \overline{A_2} \overline{A_3} \cup \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} \cup \overline{A_1} \overline{A_2} A_3,$$

па је

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \overline{A_2} \overline{A_3} \cup \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} \cup \overline{A_1} \overline{A_2} A_3) = P(A_1 \overline{A_2} \overline{A_3}) + P(\overline{A_1} A_2 \overline{A_3}) + P(\overline{A_1} \overline{A_2} A_3) = \\ &= P(A_1)P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{31}{72}. \end{aligned}$$

б) Тражимо вероватноћу догађаја A_1 при услову да је испуњен догађај B тј.

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1 B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{31}{72}} = \frac{6}{31}.$$

5. а) Да би функција расподеле била добро дефинисана, сума вероватноћа мора да буде 1 тј.

$$a^2 + \frac{a}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Решавајући ову једначину, добијамо да је $a = \frac{1}{2}$ или $a = -1$, али како вероватноће морају бити бројеви у интервалу $[0, 1]$, то могућност да је $a = -1$ отпада. Дакле, $a = \frac{1}{2}$, па наша функција расподеле изгледа овако:

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}.$$

б)

$$EX = -1 \cdot \frac{1}{8} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{3}{8} = \frac{5}{4}.$$

в) Приметимо најпре да X^2 има расподелу

$$X^2 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 9 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix},$$

односно кад групишемо исте вредности

$$X^2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 9 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix},$$

па је

$$EX^2 = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 9 \cdot \frac{3}{8} = \frac{30}{8} = \frac{15}{4}.$$

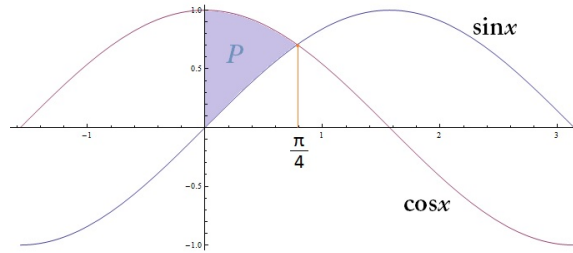
Коначно, тражена дисперзија биће

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{15}{4} - \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{35}{16}.$$

Група 2

1. Са слике видимо да се графици функција $\sin x$ и $\cos x$ секу управо у $x = \frac{\pi}{4}$, па ће тражена површина бити

$$P = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx = \sin x + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1,$$



2. Дељењем полазне једначине са x^2 , за $x \neq 0$ добијамо линеарну диференцијалну једначину

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{\sin x \cos^2 x}{x^2}.$$

Решење ове једначине је

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \frac{2}{x} dx} \left(c + \int \frac{\sin x \cos^2 x}{x^2} e^{\int \frac{2}{x} dx} dx \right) = \frac{1}{x^2} \left(c + \int \frac{\sin x \cos^2 x}{x^2} x^2 dx \right) = \\ &= \left[\frac{t = \cos x}{dt = -\sin x dx} \right] = \frac{1}{x^2} \left(c - \int t^2 dt \right) = \frac{1}{x^2} \left(c - \frac{\cos^3 x}{3} \right). \end{aligned}$$

3. Најпре решавамо хомогену једначину

$$y'' + y' + y = 0.$$

Њена карактеристична једначина је

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0,$$

па је

$$\lambda_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

па закључујемо да је решење хомогене једначине

$$y_h = e^{-\frac{x}{2}} \left(c_1 \cos \frac{x\sqrt{3}}{2} + c_2 \sin \frac{x\sqrt{3}}{2} \right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Сада тражимо партикуларно решење полазне једначине. Оно ће бити облика $y_p = Ae^{-2x}$. Нађимо први и други извод и убацимо добијене вредности у полазну једначину.

$$y'_p = -2Ae^{-2x}, \quad y''_p = 4Ae^{-2x}.$$

Након убацивања, добијамо

$$4Ae^{-2x} - 2Ae^{-2x} + Ae^{-2x} = 3e^{-2x},$$

одакле је $A = 1$, односно $y_p = e^{-2x}$. Коначно, опште решење дате једначине је

$$y = y_h + y_p = e^{-\frac{x}{2}} \left(c_1 \cos \frac{x\sqrt{3}}{2} + c_2 \sin \frac{x\sqrt{3}}{2} \right) + e^{-2x}.$$

4. Нека је A_i догађај да је i -ти стрелац погодио мету, $i \in \{1, 2, 3\}$, а догађај B догађај да су мету промашила тачно два стрелца.

а) Тражимо вероватноћу догађаја B . Приметимо

$$B = A_1 \overline{A_2} \overline{A_3} \cup \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} \cup \overline{A_1} \overline{A_2} A_3,$$

па је

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \overline{A_2} \overline{A_3} \cup \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} \cup \overline{A_1} \overline{A_2} A_3) = P(A_1 \overline{A_2} \overline{A_3}) + P(\overline{A_1} A_2 \overline{A_3}) + P(\overline{A_1} \overline{A_2} A_3) = \\ &= P(A_1)P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{31}{72}. \end{aligned}$$

б) Тражимо вероватноћу догађаја A_2 при услову да је испуњен догађај B тј.

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2 B)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{31}{72}} = \frac{10}{31}.$$

5. а) Да би функција расподеле била добро дефинисана, сума вероватноћа мора да буде 1 тј.

$$a^2 + \frac{2}{3}a + \frac{2}{3} = 1.$$

Решавајући ову једначину, добијамо да је $a = \frac{1}{3}$ или $a = -1$, али како вероватноће морају бити бројеви у интервалу $[0, 1]$, то могућност да је $a = -1$ отпада. Дакле, $a = \frac{1}{3}$, па наша функција расподеле изгледа овако:

$$X: \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

б)

$$EX = -3 \cdot \frac{1}{9} + (-2) \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot \frac{1}{9} + 1 \cdot \frac{1}{9} = -\frac{14}{9}.$$

в) Приметимо најпре да X^2 има расподелу

$$X^2: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{3} & \frac{1}{9} \end{pmatrix},$$

па је

$$EX^2 = 0 \cdot \frac{1}{9} + 1 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{2}{3} + 9 \cdot \frac{1}{9} = \frac{34}{9}.$$

Коначно, тражена дисперзија биће

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{34}{9} - \left(-\frac{14}{9}\right)^2 = \frac{110}{81}.$$