

1. Означимо $a_n = \left(\frac{3n}{n+5}\right)^n \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$. Тада је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{n+5} \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{n+5} \left(1 - \frac{1}{n+3}\right)^{-(n+3) \cdot \frac{n}{n+3}} = 3e^{-1} > 1,$$

па ред дивергира по Кошијевом критеријуму.

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{1+2\ln(2x)}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln\left(x^{\frac{1}{1+2\ln(2x)}}\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1+2\ln(2x)}} \stackrel{LP}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{2}{x}}} = \sqrt{e}.$$

3. Домен функције $f(x) = \frac{x^3+2}{x^2-4}$ је $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

$$\lim_{x \rightarrow -2+} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2-} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2+} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2-} = -\infty,$$

па су праве $x = -2$ и $x = 2$ вертикалне асимптоте функције f .

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty,$$

па f нема хоризонталних асимптота.

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = 0,$$

па је права $y = x$ коса асимптота у $-\infty$ и у $+\infty$.

4. Полином $x^2 - x + 1$ нема реалних нула, па је домен функције f једнак $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2 - 3x + 2)}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{e^x(x-1)(x-2)}{(x^2 - x + 1)^2}.$$

Имамо да је $f'(x) = 0$ за $x = 1$ и $x = 2$, па су 1 и 2 стационарне тачке. Такође, имамо да је $f(x) > 0$ за $x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$ и $f(x) < 0$ за $x \in (1, 2)$, па закључујемо:

f расте на $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$,

f опада на $(1, 2)$,

$x = 1$ је локални максимум и

$x = 2$ је локални минимум.

5. Раставимо најпре полином $6x^2 + 5x + 1$. На основу формуле за решавање квадратне једначине имамо

$$x_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{12}, \quad x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = -\frac{1}{3},$$

па имамо да је $6x^2 + 5x + 1 = (2x + 1)(3x + 1)$. На основу теореме о представљању рационалних функција имамо да је

$$\frac{x}{6x^2 + 5x + 1} = \frac{A}{2x + 1} + \frac{B}{3x + 1}$$

одакле рачуном добијамо да је $A = 1$ и $B = -1$, па је

$$\int \frac{x dx}{6x^2 + 5x + 1} = \int \frac{dx}{2x + 1} - \int \frac{dx}{3x + 1} = \frac{1}{2} \ln |2x + 1| - \frac{1}{3} \ln |3x + 1| + c.$$

Група 2

1. Означимо $a_n = \left(\frac{n+2}{4n+6}\right)^n \left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{n(n+1)}$. Тада је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{4n+6} \left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{4n+6} \left(1 - \frac{4}{n+2}\right)^{-\frac{n+2}{4} \cdot \frac{-4n}{n+2}} = \frac{1}{4} e^{-4} < 1,$$

па ред конвергира по Кошијевом критеријуму.

2.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \sin \frac{x}{2})^{\frac{1}{2x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln((\cos x + \sin \frac{x}{2})^{\frac{1}{2x}})} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x + \sin \frac{x}{2})}{2x}} = \frac{LP}{\frac{0}{0}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos x + \sin \frac{x}{2}}} = e^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{e}. \end{aligned}$$

3. Домен функције $f(x) = \frac{x^3+3}{x^2-9}$ је $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$.

$$\lim_{x \rightarrow -3+} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -3-} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3+} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3-} = -\infty,$$

па су праве $x = -3$ и $x = 3$ вертикалне асимптоте функције f .

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty,$$

па f нема хоризонталних асимптота.

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = 0,$$

па је права $y = x$ коса асимптота у $-\infty$ и у $+\infty$.

4. Полином $x^2 - 3x + 3$ нема реалних нула, па је домен функције f једнак $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2 - 5x + 6)}{(x^2 - 3x + 3)^2} = \frac{e^x(x-2)(x-3)}{(x^2 - x + 1)^2}.$$

Имамо да је $f'(x) = 0$ за $x = 2$ и $x = 3$, па су 2 и 3 стационарне тачке. Такође, имамо да је $f(x) > 0$ за $x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$ и $f(x) < 0$ за $x \in (2, 3)$, па закључујемо:

f расте на $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$,
 f опада на $(2, 3)$,
 $x = 2$ је локални максимум и
 $x = 3$ је локални минимум.

5.

$$\begin{aligned} \int x^2 \operatorname{arctg} x dx &= \left\{ u = \operatorname{arctg} x \quad dv = x^2 dx \right\} = \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{1+x^2} dx = \\ &= \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3 + x - x}{1+x^2} dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{3} \int \frac{x(x^2+1) - x}{1+x^2} dx = \\ &= \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{3} \int \left(x - \frac{x}{1+x^2} \right) dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{3} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln |x^2+1| \right) + c = \\ &= \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{6} \ln |x^2+1| + c. \end{aligned}$$

Група 3

1. Означимо $a_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n \left(\frac{n+4}{n+6}\right)^{3n^2}$. Тада је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} \left(\frac{n+4}{n+6}\right)^{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} \left(1 - \frac{2}{n+6}\right)^{-\frac{n+6}{2} \cdot \frac{-6n}{n+6}} = \frac{1}{2} e^{-6} < 1,$$

па ред конвергира по Кошијевом критеријуму.

2.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\sin \frac{\pi x}{2} \right)^{\frac{1}{1-x}} &= \lim_{x \rightarrow 1} e^{\ln \left(\left(\sin \frac{\pi x}{2} \right)^{\frac{1}{1-x}} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \left(\sin \frac{\pi x}{2} \right)}{1-x}} \stackrel{LP}{=} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}}{\sin \frac{\pi x}{2}} \cdot \frac{\frac{\pi x}{2}}{-1}} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

3. Домен функције $f(x) = \frac{x^3+4}{x^2-16}$ је $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$.

$$\lim_{x \rightarrow -4+} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -4-} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 4+} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 4-} = -\infty,$$

па су праве $x = -4$ и $x = 4$ вертикалне асимптоте функције f .

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty,$$

па f нема хоризонталних асимптота.

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = 0,$$

па је права $y = x$ коса асимптота у $-\infty$ и у $+\infty$.

4. Полином $x^2 - 5x + 7$ нема реалних нула, па је домен функције f једнак $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2 - 7x + 12)}{(x^2 - 5x + 7)^2} = \frac{e^x(x-3)(x-4)}{(x^2 - 5x + 7)^2}.$$

Имамо да је $f'(x) = 0$ за $x = 3$ и $x = 4$, па су 3 и 4 стационарне тачке. Такође, имамо да је $f(x) > 0$ за $x \in (-\infty, 3) \cup (4, +\infty)$ и $f(x) < 0$ за $x \in (3, 4)$, па закључујемо:

$$\begin{aligned} f &\text{ расте на } (-\infty, 3) \cup (4, +\infty), \\ f &\text{ опада на } (3, 4), \\ x = 3 &\text{ је локални максимум и} \\ x = 4 &\text{ је локални минимум.} \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} \int x^{\frac{3}{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx &= \left\{ \begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} \sqrt{x} & dv = x^{\frac{3}{2}} dx \\ du = \frac{dx}{2\sqrt{x}(1+x)} & v = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \end{array} \right\} = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{1}{5} \int \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{x}(1+x)} dx = \\ &= \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{1}{5} \int \frac{x^2 - 1 + 1}{1+x} dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{1}{5} \int \frac{(x-1)(x+1) + 1}{1+x} dx = \\ &= \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{1}{5} \int \left(x - 1 + \frac{1}{1+x} \right) dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{1}{10} x^2 + \frac{1}{5} x - \frac{1}{5} \ln |x+1| + c. \end{aligned}$$