

1. Означимо $a_n = \frac{n}{\ln^n(n+1)}$. Како је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{\ln^n(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln(n+1)} = 0 < 1,$$

то дати ред конвергира по Кошијевом критеријуму.

2. Како аргумент логаритамске функције мора бити позитиван, то је домен дате функције $D = (0, +\infty)$. Први и други извод дате функције су

$$f'(x) = \frac{2 \ln x}{x}, \quad f''(x) = \frac{2 - 2 \ln x}{x^2}.$$

Имамо да је

$$\begin{aligned} f'(x) &< 0 \text{ за } x \in (0, 1), \\ f'(x) &> 0 \text{ за } x \in (1, +\infty), \\ f'(x) &= 0 \text{ за } x = 1, \end{aligned}$$

и да је

$$\begin{aligned} f''(x) &< 0 \text{ за } x \in (e, +\infty), \\ f''(x) &> 0 \text{ за } x \in (0, e), \\ f''(x) &= 0 \text{ за } x = e, \end{aligned}$$

па закључујемо да

$$\begin{aligned} f &\text{ опада за } x \in (0, 1), \\ f &\text{ расте за } x \in (1, +\infty), \\ x = 1 &\text{ је локални минимум,} \\ f &\text{ је конкавна за } x \in (e, +\infty), \\ f &\text{ је конвексна за } x \in (0, e), \\ x = e &\text{ је превојна тачка.} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x}{\sin^4 x - \cos^4 x} dx &= \int \frac{\sin x}{(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x)} dx = \int \frac{\sin x}{1 - 2 \cos^2 x} dx = \\ &= \left[\begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right] = - \int \frac{1}{1 - 2t^2} dt = -\frac{1}{2} \int \frac{1 - \sqrt{2}t + 1 + \sqrt{2}t}{(1 - \sqrt{2}t)(1 + \sqrt{2}t)} dt = \\ &= -\frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1 + \sqrt{2}t} + \frac{1}{1 - \sqrt{2}t} \right) dt = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\ln(1 + \sqrt{2}t) - \ln(1 - \sqrt{2}t) \right) + c = \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\ln(1 + \sqrt{2} \cos x) - \ln(1 - \sqrt{2} \cos x) \right) + c. \end{aligned}$$

4. Најпре нађимо решење хомогене једначине $y'' + 16y = 0$. Нуле карактеристичне једначине $\lambda^2 + 16 = 0$ су $\lambda_1 = 4i$, $\lambda_2 = -4i$, па је $y_h = c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x$.

Партикуларно решење је облика $y_p = e^x(A \cos x + B \sin x)$. Израчунајмо први и други извод партикуларног решења и убацимо га у полазну једначину.

$$y'_p = ((A + B) \cos x + (B - A) \sin x) e^x,$$

$$y''_p = ((A + B + B - A) \cos x + (B - A - A - B) \sin x) e^x = (2B \cos x - 2A \sin x) e^x,$$

па је

$$(2B \cos x - 2A \sin x) e^x + 16(A \cos x + B \sin x) e^x = e^x \cos x$$

односно након сређивања

$$(2B + 16A) \cos x + (-2A + 16B) \sin x = \cos x,$$

па након изједначавања коефицијената уз $\cos x$ и $\sin x$ са леве и десне стране једнакости добијамо систем две једначине

$$2B + 16A = 1, \quad -2A + 16B = 0,$$

чије је решење $A = \frac{4}{65}$, $B = \frac{1}{130}$, па је $y_p = e^x \left(\frac{4}{65} \cos x + \frac{1}{130} \sin x \right)$.

Коначно, опште решење дате једначине је

$$y = y_h + y_p = c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x + e^x \left(\frac{4}{65} \cos x + \frac{1}{130} \sin x \right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

5. Означимо са H_1 и H_2 хипотезе да је одабрана прва односно друга кутија, а са A догађај да је извучена бела куглица. Како се одабир кутије одређује бацањем куглице, имамо да је

$$P(H_1) = \frac{1}{6}, \quad P(H_2) = \frac{5}{6}$$

као и

$$P(A|H_1) = \frac{2}{5}, \quad P(A|H_2) = \frac{8}{11}.$$

(а) Тражимо $P(A)$.

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) = \frac{2}{5} \frac{1}{6} + \frac{8}{11} \frac{5}{6} = \frac{37}{55}.$$

(б) Тражена вероватноћа је $P(H_1|A)$.

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{37}{55}} = \frac{11}{111}.$$

6. а) Нека су функције $f(x)$ и $g(x)$ диференцијабилне у околини тачке $a \in \mathbb{R}$ и уколико је

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ или } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty,$$

тада је

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

б) Имамо да је

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} \stackrel{L.P.}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0.$$

7. Линеарна хомогена диференцијална једначина другог реда са константним коефицијентима је облика

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Одговарајућа карактеристична једначина је облика

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

има два решења λ_1 и λ_2 .

1) Ако је $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$, онда је опште решење дато формулом

$$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2) Ако је $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, онда је опште решење дато формулом

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3) Ако је $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta \in \mathbb{C}$, онда је опште решење дато формулом

$$y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$