

1.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \frac{\sin x}{\cos x} \\
&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x \right) \sin x}{\cos x} \\
&\stackrel{L.P.}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x + \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cos x}{-\sin x} \\
&\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x + \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cos x}{-\sin x} \\
&= 1
\end{aligned}$$

2. Домен дате функције $\mathcal{D} = [0, +\infty)$. Први и други извод дате функције су

$$f'(x) = \frac{e^x(2x+1)}{2\sqrt{x}}, \quad f''(x) = \frac{e^x(4x^2+4x-1)}{4x\sqrt{x}}.$$

Имамо да је

$$\begin{aligned}
f''(x) &< 0 \text{ за } x \in \left[0, \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right), \\
f''(x) &> 0 \text{ за } x \in \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}, +\infty\right), \\
f''(x) &= 0 \text{ за } x = \frac{\sqrt{2}-1}{2},
\end{aligned}$$

па закључујемо да

$$\begin{aligned}
f &\text{ је конкавна за } x \in \left[0, \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right), \\
f &\text{ је конвексна за } x \in \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}, +\infty\right), \\
x = \frac{\sqrt{2}-1}{2} &\text{ је превојна тачка.}
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} &= \left[\frac{1-x=t^2}{d=-2tdt} \right] \\
&= \int_0^1 \frac{2t}{(1+t^2)t} dt \\
&= 2 \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt \\
&= 2 \operatorname{arctg} t \Big|_0^1 \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

4. Уведимо смену $u = y'$. Тада дата једначина постаје линеарна диференцијална једначина

$$u' + \frac{2x}{1+x^2}u = \frac{x^3}{1+x^2}$$

чије је решење

$$\begin{aligned}u(x) &= e^{-\int \frac{2x}{1+x^2} dx} \left(c + \int e^{\int \frac{2x}{1+x^2} dx} \frac{x^3}{1+x^2} dx \right) \\&= e^{-\ln(1+x^2)} \left(c + \int e^{\ln(1+x^2)} \frac{x^3}{1+x^2} dx \right) \\&= \frac{1}{1+x^2} \left(c + \int x^3 dx \right) \\&= \frac{1}{1+x^2} \left(c + \frac{x^4}{4} \right), \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Остаје још да нађемо y .

$$\begin{aligned}y(x) &= \int \frac{1}{1+x^2} \left(c + \frac{x^4}{4} \right) dx \\&= \int \left(c \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{4} \frac{x^4 - 1 + 1}{1+x^2} \right) dx \\&= \left(c + \frac{1}{4} \right) \int \frac{dx}{1+x^2} + \frac{1}{4} \int (x^2 - 1) dx \\&= \left(c + \frac{1}{4} \right) \operatorname{arctg} x + \frac{x^3}{12} - \frac{x}{4} + d, \quad c, d \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

5. Приметимо прво да је $X \in \{0, 1, 2\}$. Имамо да је

$$P\{X = 0\} = \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} = \frac{3}{11}, \quad P\{X = 1\} = \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} + \frac{5}{11} \cdot \frac{6}{10} = \frac{6}{11}, \quad P\{X = 2\} = \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} = \frac{2}{11},$$

па X има расподелу

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{3}{11} & \frac{6}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix}.$$

Остаје још да израчунамо очекивање и дисперзију.

$$E(X) = 0 \cdot \frac{3}{11} + 1 \cdot \frac{6}{11} + 2 \cdot \frac{2}{11} = \frac{10}{11},$$

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 0^2 \cdot \frac{3}{11} + 1^2 \cdot \frac{6}{11} + 2^2 \cdot \frac{2}{11} - \left(\frac{10}{11} \right)^2 = \frac{54}{121}.$$

6. а) Погледати у уџбенику.

б) Како је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n + \sin n}{n^3 - 3n^2 + 10}}{\frac{2}{n^2}} = 1,$$

то су редови

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n + \sin n}{n^3 - 3n^2 + 10} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$$

еквиконвергенти. Знамо да ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ конвергира, па на основу поредбеног критеријума, конвергира и дати ред.

7. Погледати у уџбенику.