

1. Означимо $a_n = \frac{(n!)^2}{6^{n^2}}$. Како је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{((n+1)!)^2}{6^{(n+1)^2}}}{\frac{(n!)^2}{6^{n^2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{6^{2n+1}} = 0 < 1,$$

то дати ред конвергира по Даламберовом критеријуму.

2. Најпре одредимо домен дате функције. Због корена, мора бити $x^2 - 1 \geq 0$, а због дељења је $x^2 - 1 \neq 0$ па је домен $\mathcal{D} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Први извод дате функције је

$$f'(x) = \left(\frac{e^{x^2}}{\sqrt{x^2 - 1}} \right)' = \frac{e^{x^2} x (2x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Имамо да је $f'(x) = 0$ за $x = 0$, $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$, али $x = 0$ не припада домену, па су преостале две тачке потенцијални екстремуми. Имамо да је

$$\begin{aligned} f'(x) &< 0 \text{ за } x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right) \cup \left(1, \frac{\sqrt{6}}{2}\right), \\ f'(x) &> 0 \text{ за } x \in \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, 1\right) \cup \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, +\infty\right), \end{aligned}$$

па закључујемо да

$$\begin{aligned} f &\text{ опада за } x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right) \cup \left(1, \frac{\sqrt{6}}{2}\right), \\ f &\text{ расте за } x \in \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, 1\right) \cup \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, +\infty\right), \\ x = -\frac{\sqrt{6}}{2} &\text{ је локални минимум,} \\ x = \frac{\sqrt{6}}{2} &\text{ је локални минимум.} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x \cos 2x dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x (2 \cos^2 x - 1) dx = \left[\begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ x = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = 0 \\ x = \pi \rightarrow t = 1 \end{array} \right] = \\ &= - \int_0^{-1} (2t^2 - 1) dt = - \left. \frac{2t^3}{3} + t \right|_0^{-1} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

4. Уведимо смену $u = y'$. Тада је $u' = y''$, па добијамо

$$2u = x(u' + x^2 e^x),$$

односно након сређивања добијамо линеарну диференцијалну једначину

$$u' - \frac{2}{x}u = x^2 e^x.$$

Решење ове једначине је

$$u = e^{\int \frac{2}{x} dx} \left(c + \int x^2 e^x e^{-\int \frac{2}{x} dx} \right) = x^2 \left(c + \int x^2 e^x \frac{1}{x^2} \right) = x^2 (c + e^x).$$

Како је $y' = u$, то је

$$\begin{aligned} y &= \int u dx = \int (cx^2 + x^2 e^x) dx = \frac{cx^3}{3} + \int x^2 e^x dx = \left[\begin{array}{ll} u = x^2 & dv = e^x dx \\ du = 2x dx & v = e^x \end{array} \right] = \\ &= \frac{cx^3}{3} + x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = \left[\begin{array}{ll} u = x & dv = e^x dx \\ du = dx & v = e^x \end{array} \right] = \frac{cx^3}{3} + x^2 e^x - 2x e^x + 2 \int e^x dx = \\ &= \frac{cx^3}{3} + x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + d. \end{aligned}$$

5. Приметимо да X може узети вредности из скупа $\{1, 2, 3, 4\}$. Случајна величина X има закон расподеле

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{pmatrix},$$

где је

$$\begin{aligned} p_1 &= P\{X = 1\} = \frac{1}{4}, \\ p_2 &= P\{X = 2\} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}, \\ p_3 &= P\{X = 3\} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \\ p_4 &= P\{X = 4\} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

па је

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Тражено математичко очекивање је

$$EX = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 3 + \frac{1}{4} \cdot 4 = \frac{5}{2}.$$

6. а) Ако растојање променљиве тачке графика функције $y = f(x)$ до неке сталне праве тежи нули, када се тачка неограничено удаљава од координатног почетка, онда се ова права назива асимптота графика функције.

Ако је $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \pm\infty$ или $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \pm\infty$, онда се права $x = x_0$ назива вертикална асимптота графика функције $y = f(x)$.

б) Најпре нађимо домен дате функције. Једини проблем прави дељење са $x + 1$ па је домен $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$\lim_{x \rightarrow -1-} \frac{2x^2 - x - 2}{x + 1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{2x^2 - x - 2}{x + 1} = +\infty,$$

па права $x = -1$ јесте вертикална асимптота функције.

Како је

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x - 2}{x + 1} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x - 2}{x + 1} = -\infty,$$

то функција нема хоризонталну асимптоту. Испитајмо да ли функција има косу асимптоту.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x - 2}{x(x + 1)} = 2,$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x^2 - x - 2}{x + 1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x - 2}{x + 1} = -3,$$

па је права $y = 2x - 3$ коса асимптота у $-\infty$ и у $+\infty$.

7. а) Густина расподеле вероватноћа случајне променљиве X је функција

$$\varphi(x) = F'(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

где је F функција расподеле случајне променљиве X и F је непрекидна и диференцијабилна.

Густина расподеле је функција са ненегативним вредностима јер како је $F(x)$ растућа функција, то је $\varphi(x) = F'(x) \geq 0$.

Имамо и да важи $P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b \varphi(x) dx$, као и $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1$. Може се показати да важи и $\int_0^x \varphi(t) dt = F(x)$.

Случајна променљива назива се непрекидном ако је њена функција расподеле $F(x)$ непрекидна, а густина расподеле $\varphi(x) = F'(x)$ постоји и непрекидна је свуда осим у дискретном скупу тачака.

б) Математичко очекивање непрекидне случајне променљиве X , са густином $\varphi(x)$, дато је интегралом

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \varphi(x) dx.$$

Дисперзија непрекидне случајне променљиве X , са густином расподеле $\varphi(x)$ и математичким очекивањем m , дато је интегралом

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 \varphi(x) dx.$$

1. Означимо $a_n = \frac{n!}{n^n}$. Како је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1,$$

то дати ред конвергира по Даламберовом критеријуму.

2. Најпре одредимо домен дате функције. Због корена, мора бити $x^4 - 1 \geq 0$, а због дељења је $x^4 - 1 \neq 0$ па је домен $\mathcal{D} = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$. Први извод дате функције је

$$f'(x) = \left(\frac{e^{x^2}}{\sqrt{x^2 - 4}} \right)' = \frac{e^{x^2} x (2x^2 - 9)}{(x^2 - 4)^{\frac{3}{2}}}.$$

Имамо да је $f'(x) = 0$ за $x = 0$, $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$, али $x = 0$ не припада домену, па су преостале две тачке потенцијални екстремуми. Имамо да је

$$\begin{aligned} f'(x) &< 0 \text{ за } x \in \left(-\infty, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(2, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right), \\ f'(x) &> 0 \text{ за } x \in \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, 2\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, +\infty\right), \end{aligned}$$

па закључујемо да

$$\begin{aligned} f &\text{ опада за } x \in \left(-\infty, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(2, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right), \\ f &\text{ расте за } x \in \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, 2\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, +\infty\right), \\ x = -\frac{3\sqrt{2}}{2} &\text{ је локални минимум,} \\ x = \frac{3\sqrt{2}}{2} &\text{ је локални минимум.} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos 2x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x (1 - 2\sin^2 x) dx = \left[\begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \\ x = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = 1 \end{array} \right] = \\ &= \int_0^1 (1 - 2t^2) dt = t - \frac{2t^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

4. Уведимо смену $u = y'$. Тада је $u' = y''$, па добијамо

$$2u = x(u' + x),$$

односно након сређивања добијамо линеарну диференцијалну једначину

$$u' - \frac{2}{x}u = x.$$

Решење ове једначине је

$$u = e^{\int \frac{2}{x} dx} \left(c + \int x e^{-\int \frac{2}{x} dx} dx \right) = x^2 \left(c + \int x \frac{1}{x^2} dx \right) = x^2 (c + \ln |x|).$$

Претпоставимо $x > 0$ (случај $x < 0$ се слично решава). Како је $y' = u$, то је

$$y = \int u dx = \int (cx^2 + x^2 \ln x) dx = \frac{cx^3}{3} + \int x^2 \ln x dx = \left[\begin{array}{ll} u = \ln x & dv = x^2 dx \\ du = \frac{1}{x} dx & v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{cx^3}{3} + \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{cx^3}{3} + \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{9} x^3 + d.$$

5. Приметимо да X може узети вредности из скупа $\{1, 2, 3, 4\}$. Случајна величина X има закон расподеле

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{pmatrix},$$

где је

$$p_1 = P\{X = 1\} = \frac{1}{4},$$

$$p_2 = P\{X = 2\} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4},$$

$$p_3 = P\{X = 3\} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$p_4 = P\{X = 4\} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{4},$$

па је

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Тражено математичко очекивање је

$$EX = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 3 + \frac{1}{4} \cdot 4 = \frac{5}{2}.$$

6. а) Ако растојање променљиве тачке графика функције $y = f(x)$ до неке сталне праве тежи нули, када се тачка неограничено удаљава од координатног почетка, онда се ова права назива асимптота графика функције.

Ако је $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \pm\infty$ или $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \pm\infty$, онда се права $x = x_0$ назива вертикална асимптота графика функције $y = f(x)$.

б) Најпре нађимо домен дате функције. Једини проблем прави дељење са $x + 1$ па је домен $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$\lim_{x \rightarrow -1-} \frac{2x^2 - x - 2}{x + 1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{2x^2 - x - 2}{x + 1} = +\infty,$$

па права $x = -1$ јесте вертикална асимптота функције.

Како је

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x - 2}{x + 1} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x - 2}{x + 1} = -\infty,$$

то функција нема хоризонталну асимптоту. Испитајмо да ли функција има косу асимптоту.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x - 2}{x(x + 1)} = 2,$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x^2 - x - 2}{x + 1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x - 2}{x + 1} = -3,$$

па је права $y = 2x - 3$ коса асимптота у $-\infty$ и у $+\infty$.

7. а) Густина расподеле вероватноћа случајне променљиве X је функција

$$\varphi(x) = F'(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

где је F функција расподеле случајне променљиве X и F је непрекидна и диференцијабилна.

Густина расподеле је функција са ненегативним вредностима јер како је $F(x)$ растућа функција, то је $\varphi(x) = F'(x) \geq 0$.

Имамо и да важи $P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b \varphi(x) dx$, као и $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1$. Може се

показати да важи и $\int_0^x \varphi(t) dt = F(x)$.

Случајна променљива назива се непрекидном ако је њена функција расподеле $F(x)$ непрекидна, а густина расподеле $\varphi(x) = F'(x)$ постоји и непрекидна је свуда осим у дискретном скупу тачака.

б) Математичко очекивање непрекидне случајне променљиве X , са густином $\varphi(x)$, дато је интегралом

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \varphi(x) dx.$$

Дисперзија непрекидне случајне променљиве X , са густином расподеле $\varphi(x)$ и математичким очекивањем m , дато је интегралом

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 \varphi(x) dx.$$