

1.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(x^{\sqrt{x}})} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\sqrt{x} \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}}} \stackrel{L.P.}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} -2\sqrt{x}} = e^0 = 1.\end{aligned}$$

2. Домен функције је $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Израчунајмо први други извод дате функције

$$f'(x) = -4xe^{1-2x^2}, \quad f''(x) = 4(4x^2 - 1)e^{1-2x^2}.$$

Имамо да је $f''(x) = 0$ за $x = \frac{1}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$ и

$$\begin{aligned}f''(x) &< 0 \text{ за } x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \\ f''(x) &> 0 \text{ за } x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right),\end{aligned}$$

па закључујемо да је

$$\begin{aligned}f &\text{ конкавна на } \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \\ f &\text{ конвексна на } \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right).\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx &= \left[\begin{array}{l} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right] = \int \frac{t^3}{1 + t^2} 6t^5 dt = 6 \int \frac{t^8 - 1 + 1}{1 + t^2} dt = \\ &= 6 \int \frac{(t^2 - 1)(t^2 + 1)(t^4 + 1) + 1}{1 + t^2} dt = 6 \int \left(t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{1 + t^2} \right) dt = \\ &= \frac{6}{7} t^7 - \frac{6}{5} t^5 + 2t^3 - 6t + 6 \arctg t + c = \frac{6}{7} x^{\frac{7}{6}} - \frac{6}{5} x^{\frac{5}{6}} + 2\sqrt{x} - 6x^{\frac{1}{6}} + 6 \arctg x^{\frac{1}{6}} + c\end{aligned}$$

4. Најпре нађимо решење хомогене једначине $y'' - 5y' + 4y = 0$. Нуле карактеристичне једначине $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$ су $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, па је $y_h = c_1 e^x + c_2 e^{4x}$.Партикуларно решење је облика $y_p = x(Ax + B)e^x$. Израчунајмо први и други извод партикуларног решења и убацимо га у полазну једначину.

$$y'_p = (Ax^2 + x(2A + B) + B)e^x, \quad y''_p = (Ax^2 + x(4A + B) + 2A + 2B)e^x,$$

па је

$$(Ax^2 + x(4A + B) + 2A + 2B)e^x - 5(Ax^2 + x(2A + B) + B)e^x + 4x(Ax + B)e^x = xe^x$$

односно након сређивања

$$-6Ax + 2A - 3B = x,$$

па након изједначавања коефицијената уз x и 1 са леве и десне стране једнакости добијамо систем две једначине

$$-6A = 1, \quad 2A - 3B = 0,$$

чије је решење $A = -\frac{1}{6}$, $B = -\frac{1}{9}$, па је $y_p = x\left(-\frac{1}{6}x - \frac{1}{9}\right)e^x$.

Коначно, опште решење дате једначине је

$$y = y_h + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{4x} + x\left(-\frac{1}{6}x - \frac{1}{9}\right)e^x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

5. Нека је H_1 хипотеза да је изгубљена куглица са тимом из Шпаније, H_2 хипотеза да је изгубљена куглица са тимом из Енглеске, а догађај A догађај да се у обе извучене куглице налазе имена тимова из Шпаније.

а) Вероватноће тражених догађаја су

$$P(H_1) = \frac{3}{8}, \quad P(H_2) = \frac{5}{8}.$$

б) Знамо да важи

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2).$$

Израчунајмо непознате вероватноће које се појављују у претходној формули:

$$P(A|H_1) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{1}{21}, \quad P(A|H_2) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{1}{7},$$

па је

$$P(A) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{21} + \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{3}{28}.$$

6. а) Нека је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ред са позитивним члановима, такав да постоји $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = r$. Тада:

(1) ако је $r < 1$, онда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира;

(2) ако је $r > 1$, онда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира;

(3) ако је $r = 1$, онда у општем случају ништа не можемо рећи о конвергенцији.

б) Означимо $a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$. Тада је

$$\begin{aligned} r &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-(n+1)}\right)^{-(n+1) \cdot \frac{1}{-(n+1)} \cdot n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{n}{n+1}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{n}{n+1}\right)} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1, \end{aligned}$$

па дати ред конвергира по Кошијевом критеријуму.

7. Линеарна диференцијална једначина првог реда је једначина облика

$$y' + p(x)y = q(x),$$

где су $p(x)$ и $q(x)$ непрекидне функције. Опште решење диференцијалне једначине првог реда је фамилија функција

$$y = \varphi(x, C),$$

специјално за линеарну једначину биће

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left(C + \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx \right).$$

Решење $\varphi(x, C_0)$ које се добија из општег решења стављањем $C = C_0$ назива се партикуларно решење или решење Кошијевог проблема које задовољава почетни услов $y|_{x=x_0} = y_0$.

Група 2

1.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x})^x &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln((\sqrt{x})^x)} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln \sqrt{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sqrt{x}}{\frac{1}{x}}} \stackrel{L.P.}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{-\frac{1}{x^2}}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} (-\frac{1}{2}x)} = e^0 = 1.\end{aligned}$$

2. Домен функције је $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Израчунајмо први други извод дате функције

$$f'(x) = -16xe^{1-8x^2}, \quad f''(x) = 16(16x^2 - 1)e^{1-8x^2}.$$

Имамо да је $f''(x) = 0$ за $x = \frac{1}{4}$, $x = -\frac{1}{4}$ и

$$\begin{aligned}f''(x) &< 0 \text{ за } x \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \\ f''(x) &> 0 \text{ за } x \in \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, +\infty\right),\end{aligned}$$

па закључујемо да је

$$\begin{aligned}f &\text{ конкавна на } \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \\ f &\text{ конвексна на } \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, +\infty\right).\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{1 + \sqrt[3]{x}} dx &= \left[\frac{x = t^3}{dx = 3t^2 dt} \right] = \int \frac{t^3}{1+t} 3t^2 dt = 3 \int \frac{t^5 + 1 - 1}{1+t} dt = \\ &= 3 \int \frac{(t+1)(t^4 - t^3 + t^2 - t + 1) - 1}{1+t} dt = 3 \int \left(t^4 - t^3 + t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t} \right) dt = \\ &= \frac{3}{5}t^5 - \frac{3}{4}t^4 + t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 3t - 3 \ln|1+t| + c = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + x - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + 3\sqrt[3]{x} - 3 \ln|1 + \sqrt[3]{x}| + c\end{aligned}$$

4. Најпре нађимо решење хомогене једначине $y'' - 6y' + 8y = 0$. Нуле карактеристичне једначине $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$ су $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$, па је $y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{4x}$. Партикуларно решење је облика $y_p = A x e^{2x}$. Израчунајмо први и други извод партикуларног решења и убацимо га у полазну једначину.

$$y'_p = (2Ax + A)e^{2x}, \quad y''_p = (4Ax + 4A)e^{2x},$$

па је

$$(4Ax + 4A)e^{2x} - 6(2Ax + A)e^{2x} + 8Axe^{2x} = 2e^{2x},$$

односно након сређивања

$$-2A = 2,$$

па је $A = -1$. Партикуларно решење дате једначине је $y_p = -x e^{2x}$.

Коначно, опште решење дате једначине је

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{2x} + c_2 e^{4x} - x e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

5. Нека је H_1 хипотеза да је изгубљена куглица са тимом из Шпаније, H_2 хипотеза да је изгубљена куглица са тимом из Енглеске, а догађај A догађај да се у обе извучене куглице налазе имена тимова из Енглеске. а) Вероватноће тражених догађаја су

$$P(H_1) = \frac{3}{8}, \quad P(H_2) = \frac{5}{8}.$$

б) Знамо да важи

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2).$$

Израчунајмо непознате вероватноће које се појављују у претходној формули:

$$P(A|H_1) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{10}{21}, \quad P(A|H_2) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{2}{7},$$

па је

$$P(A) = \frac{3}{8} \cdot \frac{10}{21} + \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{5}{14}.$$

6. а) Нека је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ред са позитивним члановима, такав да постоји $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = r$. Тада:

(1) ако је $r < 1$, онда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира;

(2) ако је $r > 1$, онда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира;

(3) ако је $r = 1$, онда у општем случају ништа не можемо рећи о конвергенцији.

б) Означимо $a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$. Тада је

$$\begin{aligned} r &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-(n+1)}\right)^{-(n+1) \cdot \frac{1}{-(n+1)} \cdot n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{n}{n+1}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{n}{n+1}\right)} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1, \end{aligned}$$

па дати ред конвергира по Кошијевом критеријуму.

7. Линеарна диференцијална једначина првог реда је једначина облика

$$y' + p(x)y = q(x),$$

где су $p(x)$ и $q(x)$ непрекидне функције. Опште решење диференцијалне једначине првог реда је фамилија функција

$$y = \varphi(x, C),$$

специјално за линеарну једначину биће

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left(C + \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx \right).$$

Решење $\varphi(x, C_0)$ које се добија из општег решења стављањем $C = C_0$ назива се партикуларно решење или решење Кошијевог проблема које задовољава почетни услов $y|_{x=x_0} = y_0$.