

1. Означимо $a_n = \frac{2^n}{n3^n}$. Како је

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3 \sqrt[n]{n}} = \frac{2}{3} < 1,$$

то дати ред конвергира на основу Кошијевог критеријума.

2.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin \frac{x}{2} + \cos x}{1 + \sin^2 x + \cos x} &\stackrel{L.P.}{=} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} - \sin x}{2 \sin x \cos x - \sin x} \\ &\stackrel{L.P.}{=} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\frac{1}{4} \sin \frac{x}{2} - \cos x}{2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x - \cos x} \\ &= \frac{-\frac{1}{4} \cdot 1 - (-1)}{2 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot 0 - (-1)} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} &= \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 4} \\ &= \int \frac{dx}{4 \left(\left(\frac{x+1}{2} \right)^2 + 1 \right)} \\ &= \left[\begin{array}{l} t = \frac{x+1}{2} \\ dt = \frac{1}{2} dx \\ dx = 2dt \end{array} \right] \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{2dt}{(t^2 + 1)} \\ &= \frac{1}{2} \arctgt + c \\ &= \frac{1}{2} \arctg \frac{x+1}{2} + c \end{aligned}$$

4. Прво тражимо решење хомогене једначине $y'' - 5y' + 6y = 0$. Одговарајућа карактеристична једначина је $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, чија су решења $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, па је решење хомогене једначине једнако

$$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}.$$

Партикуларно решење је облика $y_p = e^x (A \cos x + B \sin x)$. Израчунајмо y'_p и y''_p и убацимо резултат у полазну једначину.

$$y'_p = e^x ((A+B) \cos x + (B-A) \sin x)$$

$$y''_p = 2e^x (B \cos x - A \sin x)$$

$$2e^x (B \cos x - A \sin x) - 5e^x ((A+B) \cos x + (B-A) \sin x) + 6e^x (A \cos x + B \sin x) = e^x \sin x$$

Издавањем коефицијената уз $\sin x$ и $\cos x$ у последњој једнакости добијамо систем

$$A - 3B = 0$$

$$3A + B = 1$$

чије је решење $A = \frac{3}{10}$, $B = \frac{1}{10}$, па је партикуларно решење једнако

$$y_p = e^x \left(\frac{3}{10} \cos x + \frac{1}{10} \sin x \right).$$

Коначно, тражено опште решење је

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + e^x \left(\frac{3}{10} \cos x + \frac{1}{10} \sin x \right).$$

5. Скуп елементарних исхода је

$$\Omega = \{2, 12, 32, 132, 312\}.$$

Примећујемо да је $X \in \{1, 2, 3\}$ (укупан број извлачења може бити 1, 2 или 3). Како је

$$P\{X = 1\} = \frac{1}{3},$$

$$P\{X = 2\} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3},$$

$$P\{X = 3\} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{3},$$

па случајна променљива X има расподелу

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Сада лако можемо израчунати очекивање и дисперзију.

$$EX = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} = 2,$$

$$EX^2 = 1^2 \cdot \frac{1}{3} + 2^2 \cdot \frac{1}{3} + 3^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{14}{3},$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{14}{3} - 4 = \frac{2}{3}.$$

6. Погледати у уџбенику.

7. Погледати у уџбенику.