

Ispit iz Matematike 1, Hemija, oktobar 2013

- 1) Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3e^n}{2^{2n+1}}$.
- 2) Ispitati monotonost i odrediti ekstreme funkcije $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 4}}$.
- 3) Iyračunati $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$.
- 4) Odrediti vrednost integrala $\int x(\ln x)^2 dx$.
- 5) Odrediti partikularno rešenje diferencijalne jednačine $y' - y \tan x = \frac{1}{\cos x}$ koje zadovoljava uslov $y = 0$ za $x = 0$.
- 6) U kutiji se nalazi pet belih i tri crne kuglice. Odjednom se izvlače dve. Odrediti raspodelu slučajne promenljive X koja predstavlja broj izvučenih crnih kuglica.

Ispit iz Matematike 1, Hemija, oktobar 2013

- 1) Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3e^n}{2^{2n+1}}$.
- 2) Ispitati monotonost i odrediti ekstreme funkcije $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 4}}$.
- 3) Iyračunati $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$.
- 4) Odrediti vrednost integrala $\int x(\ln x)^2 dx$.
- 5) Odrediti partikularno rešenje diferencijalne jednačine $y' - y \tan x = \frac{1}{\cos x}$ koje zadovoljava uslov $y = 0$ za $x = 0$.
- 6) U kutiji se nalazi pet belih i tri crne kuglice. Odjednom se izvlače dve. Odrediti raspodelu slučajne promenljive X koja predstavlja broj izvučenih crnih kuglica.

Ispit iz Matematike 1, Hemija, oktobar 2013

- 1) Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3e^n}{2^{2n+1}}$.
- 2) Ispitati monotonost i odrediti ekstreme funkcije $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 4}}$.
- 3) Iyračunati $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$.
- 4) Odrediti vrednost integrala $\int x(\ln x)^2 dx$.
- 5) Odrediti partikularno rešenje diferencijalne jednačine $y' - y \tan x = \frac{1}{\cos x}$ koje zadovoljava uslov $y = 0$ za $x = 0$.
- 6) U kutiji se nalazi pet belih i tri crne kuglice. Odjednom se izvlače dve. Odrediti raspodelu slučajne promenljive X koja predstavlja broj izvučenih crnih kuglica.

Rešenje:

1) Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3e^n}{2^{2n+1}}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3e^{n+1}}{2^{2n+2+1}} \frac{2^{2n+1}}{3e^n} = \frac{e}{4} < 1,$$

pa prema Dalamberovom kriterijumu red konvergira.

2) Ispitati monotonost i odrediti ekstreme funkcije

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 4}}.$$

$D(f) = R \setminus \{\pm 2\}$, $f'(x) = \frac{x^2 - 12}{3(x^2 - 4)^{4/3}}$. Funkcija opada za $x \in (-2\sqrt{3}, -2) \cup (2, 2\sqrt{3})$ i raste za $x \in (-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (-2, 2) \cup (2\sqrt{3}, \infty)$. Koordinate minimuma su $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$, a maksimuma $(-2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$.

3) Iyračunati $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} \stackrel{LP}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{3x} = -\frac{1}{3}.$$

4) Odrediti vrednost integrala $\int x(\ln x)^2 dx$.

$$\int x(\ln x)^2 dx = \{u = (\ln x)^2, du = 2 \ln x \frac{1}{x} dx, v = \int x dx = \frac{x^2}{2}\} = \frac{x^2}{2} (\ln x)^2 - \int x \ln x dx = \{u = \ln x, du = \frac{1}{x}, \int x dx = \frac{x^2}{2}\} = \frac{x^2}{2} (\ln x - 1) \ln x + \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2} (\ln x - 1) \ln x + \frac{x^2}{4} + C.$$

5) Odrediti partikularno rešenje diferencijalne jednačine $y' - y \tan x = \frac{1}{\cos x}$ koje zadovoljava uslov $y = 0$ za $x = 0$.

Opšte rešenje je

$$y(x) = e^{\int \tan x dx} \left(C + \int \frac{1}{\cos x} e^{-\int \tan x dx} dx \right) = e^{-\ln \cos x} \left(C + \int \frac{1}{\cos x} e^{\ln \cos x} dx \right) = \frac{C + x}{\cos x},$$

a partikularno $y = \frac{x}{\cos x}$ se dobija za $C = 0$.

6) U kutiji se nalazi pet belih i tri crne kuglice. Odjednom se izvlače dve. Odrediti raspodelu slučajne promenljive X koja predstavlja broj izvučenih crnih kuglica.

$$P(X = 0) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{10}{28}$$

$$P(X = 1) = \frac{\binom{5}{1} \binom{3}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{15}{28}$$

$$P(X = 2) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{28}$$