

Временске серије и примене у финансијама (скрипта)

др Јелена Јоцковић,
Математички факултет, Београд

Садржај

1	Основни појмови и циљеви анализе временских серија	4
1.1	Дефиниција временске серије	4
1.2	Циљеви и технике анализе временских серија	4
1.3	Подела временских серија	5
1.4	Компоненте временских серија	5
1.5	Општи модел временске серије	6
1.6	Специфичности временских серија које се појављују у економији и финансијама	7
1.7	Оператори у анализи временских серија	9
1.8	Бели шум	10
2	Описивање временске серије	10
2.1	Корасти при описивању временске серије	10
2.2	Метода покретних просека	12
2.2.1	Једноставни покретни просеци	13
2.2.2	Покретни просеци који „пропуштају” произвољни полиноми- јални тренд	14
2.2.3	Напомене и допуне	16
2.3	Експоненцијално изравнавање	16
2.3.1	Једноструко експоненцијално изравнавање	17
2.3.2	Напомене и допуне	18
2.4	Регресионе методе издвајања тренда	18
2.4.1	Одређивање степена полинома	19
2.4.2	Одређивање коефицијената полинома	20
2.5	Издавање и елиминација сезонске компоненте временске серије	21
2.5.1	Сезонско диференцирање	21
2.5.2	Метода константних трендова	22
2.5.3	Метода покретних просека	22
2.5.4	Напомене и допуне	23
3	Модел временских серија	24
3.1	Стационарне временске серије	24
3.2	Аутоковаријациона и аутокорељациона функција	24
3.2.1	Особине γ_k и ρ_k	25
3.3	Ергодичност временских серија	26
3.4	Оцене средње вредности, аутоковаријационе и аутокорељационе функ- ције на основу реализоване серије	27
3.5	Линеарни процес	28
3.5.1	Особине линеарног процеса	30
3.5.2	Модел за слабо стационарне временске серије	32
3.6	Ауторегресиони модели	32
3.6.1	Ауторегресиони модел првог реда ($AR(1)$)	32
3.6.2	Примери нестационарних $AR(1)$ серија	34
3.6.3	Ауторегресиони модел реда p ($AR(p)$)	36

5.6.4	Природа ауторегресионог модела у зависности од решења карактеристичне једначине	40
5.7	Модел покретних просека	42
5.7.1	Модел покретних просека првог реда ($MA(1)$)	42
5.7.2	Модел покретних просека реда q ($MA(q)$)	44
5.8	Ауторегресиони модели покретних просека ($ARMA$)	45
5.8.1	Ауторегресиони модел покретних просека првог реда ($ARMA(1, 1)$)	45
5.8.2	Ауторегресиони модел покретних просека реда (p, q) ($ARMA(p, q)$)	46
5.9	Парцијална аутокорељациона функција	47
5.9.1	Парцијална аутокорељациона функција AR модела	49
5.9.2	Парцијална аутокорељациона функција MA модела	50
5.9.3	Парцијална аутокорељациона функција $ARMA$ модела	51
6	Прогнозирање стационарних временских серија	51
6.1	Прогноза са минималном средње квадратном грешком	51
6.2	Прогноза за линеарни процес	53
6.2.1	Закључак	54
6.3	Прогноза за MA моделе	54
6.3.1	Прогноза за $MA(1)$ модел	54
6.3.2	Прогноза за $MA(q)$ модел, $q > 1$	55
6.3.3	Закључак	55
6.4	Прогноза за AR моделе	56
6.4.1	Прогноза за $AR(1)$ модел	56
6.4.2	Закључак	56
6.5	Прогноза за $ARMA$ моделе	57
6.5.1	Прогноза за $ARMA(1, 1)$ модел	57
6.5.2	Закључак	58
6.6	Ревизија прогнозе	58
7	Оцењивање параметара $ARMA$ модела	59
7.1	Метода момената	59
7.1.1	$AR(p)$ модел	59
7.1.2	$MA(1)$ модел	60
7.1.3	$ARMA(1, 1)$ модел	61
7.2	Метода најмањих квадрата	61
7.2.1	$AR(1)$ модел	61
7.2.2	Особине оцено $\hat{\phi}_1$	62
7.2.3	$MA(1)$ модел	63
7.2.4	$ARMA(1, 1)$ модел	63
7.3	Метода нелинеарних најмањих квадрата	64
7.4	Метода максималне веродостојности	65
8	Нестационарне временске серије	67
8.1	Детерминистички и стохастички тренд	67
8.1.1	Тренд - стационарна класа модела	67
8.1.2	Диференчно - стационарна класа модела	67
8.1.3	Мешовити модел	69

8.2	Тестови јединичног корена	70
8.2.1	Dickey-Fuller тест за $AR(1)$ модел	70
8.2.2	Модификације Dickey-Fuller теста	72
8.3	Ауторегресиони модели покретних просека за интегрисане временске серије ($ARIMA$)	74
8.3.1	Примери $ARIMA$ модела	74
8.3.2	Изградња $ARIMA$ модела	76
8.4	Модел за сезонске временске серије	77
8.4.1	Сезонски $ARIMA$ модели ($SARIMA$)	77
8.4.2	Примери $SARIMA$ модела	78
8.5	Прогнозирање $ARIMA$ и $SARIMA$ модела	79
8.7	Моделовање структурног лома	81
8.8	Моделовање условне хетероскедастичности	83
8.8.1	$ARCH(p)$ модели	84
8.8.2	Предности и мане $ARCH$ модела	86
8.8.3	$GARCH(p, q)$ модел	86
9	Вишедимензионе временске серије	87
9.1	Векторске временске серије	87
9.2	Услов стационарности VAR модела	90
9.3	Вишедимензиони $ARCH$ и $GARCH$ модели	91
9.4	Узрочност временских серија	92
9.4.1	Значај појма узрочности временских серија	93
9.5	Коинтеграција временских серија	93
9.5.1	Тестирање коинтеграције на основу реализованих серија	95
9.5.2	Општији модел коинтеграције временских серија	96
9.5.3	Смисао разматрања коинтеграције временских серија	96
10	Допуна - модели временских серија који нису детаљно разматрани у току курса	96
10.1	Анализа временских серија у временском/фреквентном домену	96
10.2	Нелинеарни модели временских серија	97
10.2.1	Неке (једноставне) врсте нелинеарних модела	97

1 Основни појмови и циљеви анализе временских серија

1.1 Дефиниција временске серије

Основни појам са којим радимо је **временска серија**. Шта је тачно временска серија? То можемо да објаснимо на више начина.

Временска серија је **низ података (опсервација)** са дефинисаним редоследом. Тај редослед је, обично, хронолошки.

Временска серија може да се схвати и као **случајни процес** $\{X(t), t \in T\}$, са непрекидним или дискретним параметром, при чему засеци $X(t)$ и $X(s)$, $t \neq s$ у општем случају нису некорелисани.

Временска серија може да се швати и као **реализација** таквог случајног процеса.

1.2 Циљеви и технике анализе временских серија

Анализа временских серија је релативно нова грана математике (развија се крајем 19. и почетком 20. века), али је идеја стара (кажу да су још астрономи у Вавилону користили серије релативних положаја небеских тела да би предвиђали астрономске догађаје).

Ова област се разликује од „обичне” статистике (у којој је полазни појам прост случајни узорак) и базира се на испитивању **корелационе структуре** (квалитета корелационе повезаности чланова серије). То нам омогућава да одредимо правилност у кретању временске серије и да предвидимо њен будући ток.

Техника рада са (реализованим) временским серијама састоји се од следећих корака:

- описивање: припрема („улепшавање”) серије за даљу анализу;
- објашњење: избор математичког модела - рекурзивне формуле по којој се мењају вредности серије;
- предвиђање (прогнозирање): на основу вредности серије у неком периоду у прошлости, треба предвидети њене вредности у будућности;
- контрола: ако серија описује некакву физичку или друштвену појаву/експеримент, онда на основу прогнозе те серије треба предузети одговарајуће кораке у садашњости, да би појава/експеримент имала жељени исход у будућности.

Важне претпоставке у анализи временских серија су **стационарност** и **ергодичност**. Ми смо се са овим претпоставкама срили раније, у контексту случајних процеса, а овде ћемо моћи мало јасније да видимо њихов значај. Конкретно, стационарност серије омогућава релативно прецизно предвиђање њених будућних вредности, а ергодичност омогућава да се серија опише помоћу математичког модела који има коначно много параметара. Ово ћемо касније детаљније разматрати.

1.3 Подела временских серија

Постоје различити типови временских серија, а поделу можемо вршити по следећим критеријумима:

1. непрекидне и прекидне серије:

Ова подела је аналогна подели на случајне процесе са непрекидним и дискретним параметром. Од непрекидних серија се могу добити прекидне (поделом времена на једнаке интервале и одабиром вредности у почетној, средишњој или крајњој тачки сваког интервала).

Напомена 1.1. У овом курсу бавимо се искључиво прекидним серијама, али због боље видљивости, графички приказ ће се, у принципу, односити на непрекидне серије.

2. једнодимензионе и вишедимензионе серије:

И ова подела је аналогна подели коју имамо код случајних процеса. Вишедимензионе серије су, заправо, векторски случајни процеси и случајна поља.

Пример 1.1. Пример једнодимензионе серије је $\{X(t), t \geq 0\}$, где је $X(t)$ температура измерена на неком одређеном месту у тренутку t . Или $\{X_t, t \in \mathbb{N}\}$, где је X_t цена акција неке компаније на берзи у тренутку (дану) t . За овај пример је карактеристично да је то дискретна серија, али вредности нису регистроване у једнаким временским интервалима (јер берза не ради викендом).

Примери вишедимензионих серија су $\{(X(t), Y(t)), t \geq 0\}$ где су $X(t)$ и $Y(t)$ температура и влажност ваздуха измерени у на неком месту у тренутку t (векторски случајни процес), или $\{X(t, s, d, h), (t, s, d, h) \in D\}$, где је $X(t, s, d, h)$ број сунчаних дана у претходној години, у зависности од времена, географске ширине, географске дужине и надморске висине (случајно поље). Ако је $Y(t, s, d, h)$ количина продатих крема за сунчање у претходној години, у зависности од истих параметара, онда је $\{(X(t, s, d, h), Y(t, s, d, h)), (t, s, d, h) \in D\}$ векторско случајно поље.

3. стационарне и нестационарне временске серије:

И ова подела нам је позната из рада са случајним процесима, али овде, ћемо, најзад, видети и њену примену. Кретање стационарних серија може да се (релативно прецизно) предвиди, па је зато погодно, кад год је то могуће, серије разним трансформацијама свести на стационарне.

1.4 Компоненте временских серија

1. тренд:

Тренд је дугорочна правилност у кретању временске серије. Може бити **детерминистички** (описује се неком детерминистичком функцијом и, кад се таква функција одреди, може тачно да се предвиди) или **стохастички** (који не може да се предвиди на основу историјских података, односно, реализоване серије). Баш такав, „непредвидив” тренд је честа појава у економији.

Пример тренда је глобално загревање (у временској серији која се односи на максималну/минималну/просечну температуру измерену на неком месту).

2. **сезонска** компонента:

Сезонска компонента обухвата правилности у кретању временске серије које се јављају у току једне календарске године. Постојање сезонске компоненте значи да постоји већи степен корелације између опсервација које одговарају истим месецима у различитим годинама, него различитим месецима у истој години.

Примери сезонских варијација су понашање температуре (која је слична у одређеном периоду сваке године) и правилности у кретању цена одређених производа (сезонска снижења).

3. **цикличне** варијације:

Цикличне варијације се односе на правилности у кретању временске серије које се јављају са периодом различитим (обично већим) од једне године. Ради прогнозирања серије у којој постоје цикличне варијације потребно је одредити њихов период.

Примери цикличних варијација су пролазак неке комете близу Земље после одређеног броја година (кад су у питању серије међусобних положаја небеских тела), повратак одређене моде после неког броја година (кад је у питању серија која се односи на потрошњу неких производа).

4. **случајна** компонента:

Случајна компонента односи се на промене у кретању (нивоу) серије које су случајног карактера.

Са становишта анализе временских серија, случајна компонента је убедљиво најинтересантнија, најважнија и једина компонента која **ОБАВЕЗНО** постоји у временској серији (јер би, у супротном случају, био у питању детерминистички низ, а не временска серија).

Пример случајне компоненте могле би бити поплаве или суше (у серији која се односи на количину падавина на неком месту).

1.5 Општи модел временске серије

Нека је (од сада, па надаље):

- X_t : вредност (ниво) серије у тренутку t ;
- f_t : вредност тренда серије у тренутку t ;
- s_t : вредност сезонске компоненте серије у тренутку t ;
- c_t : вредност цикличне компоненте серије у тренутку t ;
- ϵ_t : вредност случајне компоненте серије у тренутку t .

Ове компоненте можемо „поређати” на различите начине и тако „сазидати” разне врсте модела. Њих, грубо, можемо поделити у три групе:

1. **адитивни** модел:

$$X_t = f_t + s_t + c_t + \epsilon_t$$

(све компоненте серије се сабирају);

2. **мультипликативни** модел:

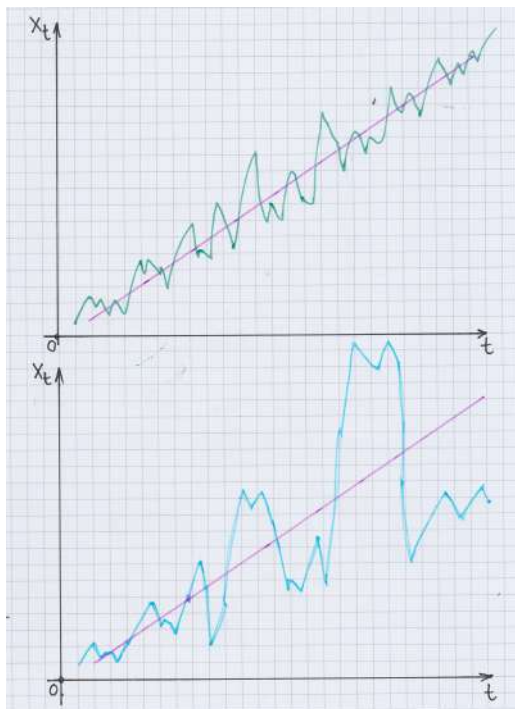
$$X_t = f_t \cdot s_t \cdot c_t \cdot \epsilon_t$$

(све компоненте серије се множе);

3. **мешовити** модел: то је све оно „између” адитивног и мультипликативног модела, на пример,

$$X_t = f_t \cdot s_t \cdot c_t + \epsilon_t, \quad X_t = f_t \cdot c_t \cdot (s_t + \epsilon_t - 1), \dots$$

Како на основу графичког приказа реализоване серије препознати да ли се ради о адитивном или мультипликативном моделу? Код адитивног модела повећање вредности једне компоненте не изазива повећање вредности осталих компоненти, а код мультипликативних модела постоји та врста зависности. Примери временских серија којима би одговарали адитивни, односно, мультипликативни модел нацртани су на Слици 1. Мешовити модели су тежи за препознавање.

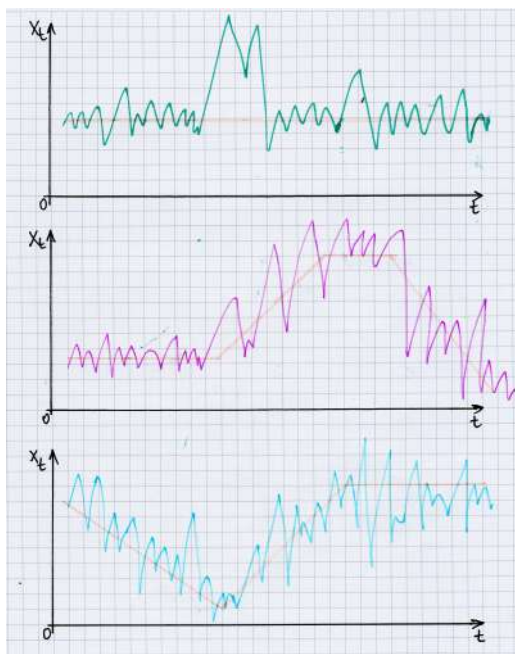


Слика 1:

1.6 Специфичности временских серија које се појављују у економији и финансијама

1. **тренд** (обично стохастички)
2. **сезонске варијације**
3. **структурни лом**

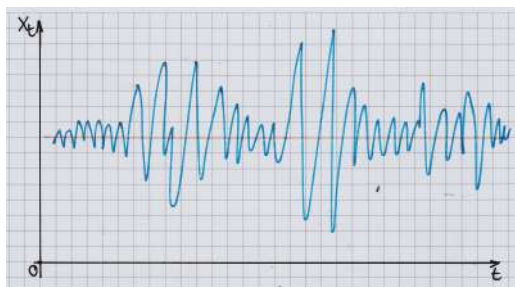
Структурни лом је скуп опсервација који није сагласан са претходним током временске серије. Он је обично резултат некакве интервенције. Примери структурног лома нацртани су на Слици 2.



Слика 2:

4. променљива условна дисперзија серије (променљива волатилност)

Ова појава (која се другачије зове **условна хетероскедастичност**) је честа код финансијских података. Може бити изазвана доласком нове вести, а обично је већа варијабилност ако је вест негативна. Пример серије код које се запажа ова појава нацртан је на Слици 3.



Слика 3:

5. асиметричност

Асиметричност се односи на асиметричност расподеле чланова серије. У контексту финансија то би значило, на пример, да се губитак појављује чешће него добитак.

6. кластери

Ово се односи на чињеницу да се екстремне опсервације у временској серији најчешће појављују у групама.

Већина ових особина ће бити детаљно разматрана у току курса.

1.7 Оператори у анализи временских серија

1. оператор кашњења (доцње) првог реда:

$$LX_t \stackrel{\text{def}}{=} X_{t-1}$$

Оператор L , дакле, „помера” серију један корак у прошлост - у претходни временски тренутак.

Слично, оператор L^k би померао серију k корака у прошлост, а оператор L^{-k} би је послао k корака у будућност. Прецизније:

$$\begin{aligned} L^k X_t &= X_{t-k}, \\ L^{-k} X_t &= X_{t+k}, \\ Lc &= c, \text{ за } c = \text{const.} \\ L^0 X_t &= X_t. \end{aligned}$$

2. оператор разлике (диференце) првог реда:

$$\Delta X_t \stackrel{\text{def}}{=} X_t - X_{t-1}$$

Оператор Δ , дакле, сваки члан серије замењује разликом тренутног и претходног члана. Кад то урадимо за сваки члан, добијамо **диференцирану серију**.

Веза са оператором L је:

$$\Delta X_t = (1 - L)X_t.$$

Индуктивно дефинишемо операторе разлике другог, трећег,..., n -тог реда:

$$\begin{aligned} \Delta^2 X_t &\stackrel{\text{def}}{=} \Delta(\Delta X_t) \\ &= \Delta X_t - \Delta X_{t-1} \\ &= (X_t - X_{t-1}) - (X_{t-1} - X_{t-2}) \\ &= X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2} \\ &= (1 - 2L + L^2)X_t \\ &= (1 - L)^2 X_t. \end{aligned}$$

На исти начин:

$$\begin{aligned} \Delta^k X_t &\stackrel{\text{def}}{=} \Delta(\Delta^{k-1} X_t) \\ &= \Delta^{k-1} X_t - \Delta^{k-1} X_{t-1} \\ &= \dots \\ &= (1 - L)^k X_t. \end{aligned}$$

За оператор Δ^k важи:

$$\Delta^k X_t = \sum_{j=0}^k (-1)^j \cdot \binom{k}{j} \cdot X_{t-j}, \quad k \in \mathbb{N},$$

што се једноставно проверава уз помоћ биномне формуле.

1.8 Бели шум

У анализи временских серија важну улогу игра најједноставнији могући стационарни случајни низ - бели шум (white noise).

Дефиниција 1.1. *Случајни низ $\{e_t, t \in \mathbb{Z}\}$ је бели шум ако важе услови:*

1. $E(e_t) = 0, \quad t \in \mathbb{Z};$
2. $D(e_t) = E(e_t^2) = \sigma^2 = \text{const.} \quad t \in \mathbb{Z};$
3. $\text{cov}(e_t, e_{t-k}) = E(e_t e_{t-k}) = 0, \quad t \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}, k \neq 0.$

Ако су, додатно, $e_t, t \in \mathbb{Z}$ независне случајне величине са заједничком нормалном расподелом, у питању је **Гаусов бели шум**.

Напомена 1.2. *Овде је параметарски скуп $\mathbb{Z}$ (а не $\mathbb{N}$, како смо навикли) из техничких разлога, јер је у раду са временским серијама понекад zgodно да овај низ „оде у прошлост”, чиме се неки теоријски резултати добијају у једноставнијој форми.*

Назив овог процеса потиче из спектралне анализе беле светлости. Прецизније, спектар беле светлости карактерише једнак допринос свих седам основних боја спектра, што је најједноставнији случај. Постоје и обојени шумови.

Зашто је бели шум значајан у анализи временских серија? Тај процес представља „цигле” од којих „зидамо” компликованије моделе временских серија.

2 Описивање временске серије

2.1 Кораци при описивању временске серије

Описивање временске серије односи се на све „припремне радње” пре одређивања модела (формуле по којој се мења ниво серије). Ту спадају следећи кораци:

1. графички приказ серије:

црта се основни графички приказ серије (да би се стекла представа о томе да ли постоји тренд или нека друга врста варијација) и графички приказ диференцираних података (јер се тако лакше уоче нестандартне опсервације у серији);

2. сумарни показатељи (статистике):

анализира се емпиријска расподела чланова серије, може да се нацрта хистограм;

3. методе трансформације:

У претходном кораку смо стекли неку представу о расподели чланова серије. Ако се та расподела не чини као нормална и симетрична (што би било пожељно), сад нам је циљ да је разним методама трансформације што више „унормалимо” и да добијемо серију која има стабилан ниво и дисперзију. За то се често користи тзв. **Бокс - Кокс трансформација**, дефинисана са:

$$Y_t = \begin{cases} \frac{X_t^\lambda - 1}{\lambda}, & \lambda \neq 0; \\ \ln X_t, & \lambda = 0, \end{cases} \quad t = 1, 2, \dots, n,$$

где су X_t чланови почетне серије, Y_t чланови трансформисане серије, а λ параметар корекције. Може се приметити да је ова трансформација, као функција од λ , непрекидна, што у пракси значи да није битно да ли се користи неко мало $\lambda > 0$ или $\lambda = 0$. Која је адекватна вредност λ ? Ту не постоји исправан и погрешан одговор, већ се треба „поиграти” са разним вредностима λ и у сваком покушају цртати графички приказ, па стати онда када та слика изгледа довољно „лепо и симетрично”.

Стабилизација нивоа временске серије може да се врши и **диференцирањем**. Ако је серија облика

$$X_t = f_t + e_t,$$

где је f_t детерминистички тренд у облику полинома по t степена k , а $\{e_t\}$ бели шум, онда k пута диференцирана серија, $\Delta^k X_t$ има стабилан ниво (константну средњу вредност), а серија $\Delta^{k+1} X_t$ има средњу вредност једнаку нули.

Пример 2.1. Нека је

$$X_t = at^2 + bt + c + e_t,$$

где су a, b, c константе. Тада је:

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = at^2 + bt + c + e_t - (a(t-1)^2 + b(t-1) + c + e_{t-1}) = 2at + b - a + \Delta e_t,$$

$$\Delta^2 X_t = \Delta(\Delta X_t) = X_t - X_{t-1} - (X_{t-1} - X_{t-2}) = 2at + b - a + \Delta e_t - (2a(t-1) + b - a + \Delta e_{t-1}) = 2a + \Delta^2 e_t,$$

$$\Delta^3 X_t = \Delta(\Delta^2 X_t) = 2a + \Delta^2 e_t - (2a + \Delta^2 e_{t-1}) = \Delta^3 e_t,$$

и важи

$$E(\Delta^2 X_t) = 2a, \quad E(\Delta^3 X_t) = 0.$$

4. методе изравнавања серије:

Овде је циљ издвојити (или графички приказати) дугорочну неслучајну компоненту (тренд, са или без сезонских и цикличних варијација), тј. елиминисати случајне варијације. Постоје две различите групе ових метода:

- **методе покретних просека** (које служе да „изгладе” и „изравнају” серију да би се тренд лакше уочио на графичком приказу);
- **регресионе методе** (које, кад је у питању детерминистички тренд, дају његов тачан облик - формулу).

Овим методама ћемо се даље детаљно бавити.

2.2 Метода покретних просека

Метода покретних просека је непараметарска метода за издвајање/учавање тренда у временској серији, која не служи за препознавање и грађење модела.

Метода функционише на следећи начин. Претпоставимо да радимо са реализованом серијом:

$$x_1, x_2, \dots, x_{t-m-1}, x_{t-m}, \dots, x_t, \dots, x_{t+m}, x_{t+m+1}, \dots, x_n.$$

Опсервацију (податак) x_t замењујемо податком y_t , који добијамо на следећи начин:

$$y_t = \sum_{i=-m}^m a_i \cdot x_{t+i}, \quad (1)$$

при чему за коефицијенте важи:

$$a_i > 0 \text{ за свако } i \text{ и } \sum_{i=-m}^m a_i = 1.$$

Вредност тренда у тренутку t се оцењује са y_t :

$$\hat{f}_t = y_t.$$

На овај начин се могу добити оцене тренда у тренуцима $t = m+1, m+2, \dots, n-m$ (јер за остале чланове немамо по m података са сваке стране да бисмо применили (1)). Дакле, на овај начин се не могу добити оцене тренда за првих m и последњих m чланова серије.

Шта тачно ради ова метода? Она мало „смири” варијације, при чему тренд компонента остаје и даље видљива.

За коефицијенте a_i се каже и **пондери**, а сама метода је позната и као **линеарни филтер**.

Сад ћемо детаљније да размотримо како функционише ова метода - због чега смирује варијације у временској серији и када и како „пропушта” тренд.

Претпоставимо да је дат модел временске серије:

$$X_t = f_t + e_t, \quad t = 1, \dots, n,$$

где је

- f_t : детерминистички тренд (без цикличних или сезонских варијација);
- e_t : случајна компонента - бели шум.

Нека је

$$Y_t = \sum_{i=-m}^m a_i \cdot X_{t+i}, \quad t = m+1, m+2, \dots, n-m,$$

при чему важи $a_i > 0$ за свако i , $\sum_{i=-m}^m a_i = 1$.

Низ случајних величина $Y_{m+1}, Y_{m+2}, \dots, Y_{n-m}$ је **низ клизећих средина** почетног низа $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Низ клизећих средина (посматран као нова временска серија $\{Y_t\}$) има следеће особине:

1.

$$Y_t = \sum_{i=-m}^m a_i \cdot X_{t+i} = \sum_{i=-m}^m a_i \cdot f_{t+i} + \sum_{i=-m}^m a_i \cdot e_{t+i}.$$

Прва сума на десној страни представља детерминистичку компоненту серије $\{Y_t\}$, а друга сума њену случајну компоненту.

Преласком на очекивање, добијамо:

$$E(Y_t) = E\left(\sum_{i=-m}^m a_i \cdot f_{t+i}\right) + E\left(\sum_{i=-m}^m a_i \cdot e_{t+i}\right) = \sum_{i=-m}^m a_i \cdot f_{t+i} \approx f_t = E(X_t).$$

2.

$$D(Y_t) = E\left(\sum_{i=-m}^m a_i \cdot e_{t+i}\right)^2 = \sum_{i=-m}^m \sum_{j=-m}^m a_i a_j E(e_{t+i} e_{t+j}) = \sigma^2 \sum_{i=-m}^m a_i^2 < \sigma^2$$

Пошто за дисперзију почетне серије важи $D(X_t) = E(e_t^2) = \sigma^2$, видимо да се дисперзија смањила (тј. варијације заиста „смириле”).

3.

$$\begin{aligned} cov(Y_t Y_s) &= E\left(\sum_{i=-m}^m a_i \cdot e_{t+i} \cdot \sum_{j=-m}^m a_j \cdot e_{s+j}\right) \\ &= \sum_{i=-m}^m \sum_{j=-m}^m a_i a_j E(e_{t+i} e_{s+j}) \\ &= \sigma^2 \cdot \sum_{i=-m}^m a_i a_j, \text{ где је } j = i + t - s \\ &= \begin{cases} \sigma^2 \cdot \sum_{i=-m+h}^m a_i a_{i-h}, & h \in \{0, 1, \dots, 2m\} \\ 0, & h > 2m \end{cases}, h = |s - t|. \end{aligned}$$

Из последњег израза можемо да закључимо да су чланови нове серије корелисани само ако су на растојању $\leq 2m$. Значи, мало више су „измешани” него код почетне серије.

2.2.1 Једноставни покретни просеци

Често се користи најједноставнији случај методе покретних просека (тако се и зове - **једноставни покретни просеци**), који се добија за

$$a_i = \frac{1}{2m+1}, \quad i = -m, \dots, m.$$

У овом случају добијамо:

1.

$$\begin{aligned} Y_t &= \frac{1}{2m+1} \sum_{i=-m}^m f_{t+i} + \frac{1}{2m+1} \sum_{i=-m}^m e_{t+i}. \\ E(Y_t) &= \frac{1}{2m+1} \sum_{i=-m}^m f_{t+i} \approx f_t = E(X_t). \end{aligned}$$

2.

$$D(Y_t) = \sigma^2 \sum_{i=-m}^m \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\sigma^2}{2m+1} < \sigma^2$$

3.

$$\text{cov}(Y_t Y_{t+h}) = \begin{cases} \sigma^2 \cdot \frac{2m+1-h}{(2m+1)^2}, & h \in \{0, 1, \dots, 2m\} \\ 0, & h > 2m. \end{cases}$$

Сад ћемо показати да метода једноставних покретних просека „пропушта” произвољни линеарни тренд.

Претпоставимо да је

$$f_t = c_0 + c_1 t.$$

Тада је

$$\begin{aligned} Y_t &= \frac{1}{2m+1} \sum_{i=-m}^m (c_0 + c_1(t+i)) + \frac{1}{2m+1} \sum_{i=-m}^m e_{t+i} \\ &= \frac{1}{2m+1} (2m+1)c_0 + \frac{1}{2m+1} (2m+1)c_1 t + \frac{1}{2m+1} c_1 \cdot \sum_{i=-m}^m i + \frac{1}{2m+1} \sum_{i=-m}^m e_{t+i} \\ &= c_0 + c_1 t + 0 + \frac{1}{2m+1} \sum_{i=-m}^m e_{t+i}. \end{aligned}$$

Видимо да у трансформисаној серији имамо исту детерминистичку компоненту као у почетној серији, $f_t = c_0 + c_1 t$, тј. тренд се није променио.

Дакле, једноставни покретни просеци „раде посао” када у серији постоји линеарни тренд. У осталим ситуацијама је ствар ипак мало компликованија.

2.2.2 Покретни просеци који „пропуштају” произвољни полиномијални тренд

Теорема 2.1. *Линеарни филтер са пондерима a_i , $i = -m, \dots, m$, $\sum_{i=-m}^m a_i = 1$, „пропушта” тренд у облику полинома степена k по t :*

$$f_t = c_0 + c_1 t + \dots + c_k t^k, \text{ за дато } k \in \mathbb{N}$$

ако и само ако важи услов

$$\sum_{i=-m}^m i^r \cdot a_i = 0, \text{ за свако } r = 1, 2, \dots, k.$$

Доказ.

$$\begin{aligned}
\hat{f}_t &= \sum_{i=-m}^m a_i \cdot f_{t+i} \\
&= \sum_{i=-m}^m a_i \cdot (c_0 + c_1(t+i) + \dots + c_k(t+i)^k) \\
&= ((c_0 + c_1 t + \dots + c_k t^k) \cdot \sum_{i=-m}^m a_i \\
&\quad + \sum_{i=-m}^m a_i \cdot (c_1 \cdot (t+i-t) + c_2 \cdot ((t+i)^2 - t^2) + \dots + c_k \cdot ((t+i)^k - t^k)) \\
&= f_t + \sum_{i=-m}^m (C_1 \cdot i + C_2 \cdot i^2 + \dots + C_k \cdot i^k) \cdot a_i \\
&= f_t + C_1 \cdot \sum_{i=-m}^m i \cdot a_i + C_2 \cdot \sum_{i=-m}^m i^2 \cdot a_i + \dots + C_k \cdot \sum_{i=-m}^m i^k \cdot a_i,
\end{aligned}$$

где су

$$\begin{aligned}
C_1 &= c_1 \cdot \binom{1}{1} + c_2 \cdot \binom{2}{1} \cdot t + c_3 \cdot \binom{3}{1} \cdot t^2 + \dots + c_k \cdot \binom{k}{1} \cdot t^{k-1}, \\
C_2 &= c_2 \cdot \binom{2}{2} + c_3 \cdot \binom{3}{2} \cdot t + \dots + c_k \cdot \binom{k}{2} \cdot t^{k-2}, \\
&\dots \\
C_k &= c_k \cdot \binom{k}{k}.
\end{aligned}$$

Смер $\longleftarrow$: Очигледно је.

Смер $\longrightarrow$: Ако одаберемо $C_1 = \dots = C_{k-1} = 0$, $C_k = 1$, добијамо

$$\sum_{i=-m}^m i^k \cdot a_i = 0,$$

ако одаберемо $C_1 = \dots = C_{k-2} = 0$, $C_{k-1} = 1$, добијамо:

$$\sum_{i=-m}^m i^{k-1} \cdot a_i = 0,$$

.....

ако одаберемо $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, добијамо:

$$\sum_{i=-m}^m i^2 \cdot a_i = 0,$$

ако одаберемо $C_1 = 1$, добијамо:

$$\sum_{i=-m}^m i \cdot a_i = 0.$$

Дакле, важе сви тражени услови.

Да ли можемо да одредимо одговарајуће коефицијенте $c_1, c_2, \dots, c_k$ за сваки од избора $C_1, C_2, \dots, C_k$? Да, због тога што је у питању троугаони систем једначина:

$$\begin{bmatrix} \binom{1}{1} & \binom{2}{1} \cdot t & \binom{3}{1} \cdot t^2 & \dots & \binom{k}{1} \cdot t^{k-1} \\ 0 & \binom{2}{2} & \binom{3}{2} \cdot t & \dots & \binom{k}{2} \cdot t^{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{k}{k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_k \end{bmatrix},$$

који увек има јединствено решење. □

Напомена 2.1. У овом случају је дозвољено да коефицијенти a_i буду негативни.

2.2.3 Напомене и допуне

Како одредити одговарајућу вредност параметра m ? Треба узети у обзир следеће ствари:

- Ако се користи већа вредност m , обим серије ће бити значајно смањен, што може бити проблем. С друге стране, што је m веће, то се серија више „изглади”.
- Ако се користи мања вредност m , понекад ће тренд постати видљив тек кад се метода примени неколико пута.
- Ако се „новији” подаци сматрају релевантнијим од „старијих”, онда треба користити мање m (јер се тако „захвата” мање старијих чланова серије).

Проблем скраћивања серије код примене ове методе може се решити и тако што се користи мало општија техника, **клизећи полиномни тренд**. У том случају се податак x_t замењује са $\phi_t(0)$, где је

$$\phi_t(s) = \alpha_0(t) + \alpha_1(t) \cdot s + \dots + \alpha_q(t) \cdot s^q, \text{ за } s = -m, \dots, m.$$

Коефицијенти $\alpha_i(t)$ се могу оценити методом најмањих квадрата. Оцене тренда за првих m и последњих m чланова почетне серије (које се не могу добити методом покретних просека) добијају се на следећи начин:

- x_m се замењује са $\phi_m(-1)$, x_{m-1} се замењује са $\phi_m(-2)$, итд.
- x_{n-m+1} се замењује са $\phi_m(1)$, x_{n-m+2} се замењује са $\phi_m(2)$, итд.

Детаљније о овој методи може се прочитати у књизи Малишић, Јевремовић „Случајни процеси и временске серије”.

2.3 Експоненцијално изравнавање

Ако претпоставимо да је важност података у временској серији обрнуто пропорционална њиховој старости (тј. да се већа важност придаје новијим подацима), можемо да применимо и једну мало другачију методу изравнавања - **експоненцијално изравнавање**.

2.3.1 Једноструко експоненцијално изравнавање

Претпоставимо да имамо временску серију у којој не постоји ни тренд, ни сезонске или цикличне варијације (средња вредност серије је константна). Дакле, модел је:

$$X_t = \mu + e_t,$$

где је μ константа, а $\{e_t\}$ бели шум.

Са F_t означавамо прогнозирану вредност серије у тренутку t (оцену нивоа μ у тренутку t).

Тада се F_t добија из:

$$F_t = \alpha X_t + (1 - \alpha)F_{t-1}, \quad (2)$$

где је $\alpha \in (0, 1)$ **константа изравнавања**.

Прогнозирана вредност се може изразити и као линеарна комбинација претходних вредности серије:

$$F_n = \alpha \cdot \sum_{j=0}^{n-1} (1 - \alpha)^j \cdot X_{n-j} + (1 - \alpha)^n \cdot F_0, \quad (3)$$

где је F_0 **почетна прогнозирана вредност** (константа).

Формула (3) се може показати индукцијом по n .

За $n = 1$:

$$F_1 = \alpha X_1 + (1 - \alpha)F_0$$

индуктивна хипотеза:

$$F_{n-1} = \alpha \sum_{j=0}^{n-2} (1 - \alpha)^j X_{n-1-j} + (1 - \alpha)^{n-1} F_0.$$

прелаз са $n - 1$ на n :

$$\begin{aligned} F_n &= \alpha X_n + (1 - \alpha)F_{n-1} \\ &= \alpha X_n + \alpha \cdot \sum_{j=0}^{n-2} (1 - \alpha)^{j+1} \cdot X_{n-1-j} + (1 - \alpha)^n F_0 \\ &= \alpha X_n + \alpha \cdot \sum_{j=1}^{n-1} (1 - \alpha)^j \cdot X_{n-j} + (1 - \alpha)^n F_0. \end{aligned}$$

Збир коефицијената у линеарној комбинацији (3) је једнак 1:

$$\alpha \cdot \sum_{j=0}^{n-1} (1 - \alpha)^j + (1 - \alpha)^n = \alpha \cdot \frac{1 - (1 - \alpha)^n}{1 - (1 - \alpha)} + (1 - \alpha)^n = 1.$$

Сад ћемо показати да је прогнозирана вредност F_t асимптотски непристрасна оцена нивоа μ .

$$\begin{aligned}
E(F_t) &= E\left(\alpha \cdot \sum_{j=0}^{t-1} (1-\alpha)^j \cdot X_{t-j} + (1-\alpha)^t F_0\right) \\
&= \alpha \cdot \sum_{j=0}^{t-1} (1-\alpha)^j \cdot E(X_{t-j}) + (1-\alpha)^t F_0 \\
&= \alpha \cdot \sum_{j=0}^{t-1} (1-\alpha)^j \cdot \mu + (1-\alpha)^t F_0 \\
&= \alpha \mu \cdot \sum_{j=0}^{t-1} (1-\alpha)^j + (1-\alpha)^t F_0 \\
&\rightarrow \alpha \mu \cdot \sum_{j=0}^{\infty} (1-\alpha)^j + 0 = \mu, \quad t \rightarrow +\infty.
\end{aligned}$$

2.3.2 Напомене и допуне

Како изабрати константу изравнавања, α ? Треба водити рачуна о следећем:

- У литератури се препоручује вредност $\alpha \in (0.01, 0.3)$.
- Што је α мање, то је серија глаткија.
- Што је α веће, то серија брже реагује на случајне промене.

Како одабрати почетну прогнозирану вредност, F_0 ? Неки од честих избора су:

- $F_0 = X_1$;
- аритметичка средина првих неколико чланова серије;
- аритметичка средина свих чланова серије.

Једноструко експоненцијално изравнавање се мора модификовати у случају када у серији постоје сезонске варијације (што ће бити објашњено касније).

За серије са трендом користи се **двоструко експоненцијално изравнавање** (2 једначине), а за серије са трендом и сезонском компонентом **троструко експоненцијално изравнавање** (3 једначине).

Експоненцијално изравнавање је било историјски прва метода за прогнозирање временских серија.

2.4 Регресионе методе издвајања тренда

Претпоставимо да имамо модел временске серије:

$$X_t = f_t + e_t,$$

где је

$$f_t = c_0 + c_1 t + \dots + c_k t^k, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Циљ је пронаћи тренд, што значи прво одредити степен полинома, k , а затим и коефицијенте, $c_0, c_1, \dots, c_k$.

2.4.1 Одређивање степена полинома

Степен полинома се може одредити на два начина:

1. графички:

Серија се диференцира и после сваког диференцирања се црта график добијених података. Број диференцирања после кога се добија серија која има приближно константну средњу вредност је тражени степен полинома.

2. рачунски:

Ако је k тражени степен полинома, онда за $r > k$ важи

$$\Delta^r X_t = \Delta^r e_t.$$

Даље се добија

$$\begin{aligned} E(\Delta^r X_t) &= E(\Delta^r e_t) \\ &= E\left(\sum_{j=0}^r (-1)^j \cdot \binom{r}{j} \cdot e_{t-j}\right) \\ &= \sum_{j=0}^r (-1)^j \cdot \binom{r}{j} \cdot E(e_{t-j}) \\ &= 0, \\ D(\Delta^r X_t) &= D(\Delta^r e_t) \\ &= E\left(\sum_{j=0}^r (-1)^j \cdot \binom{r}{j} \cdot e_{t-j}\right)^2 \\ &= \sigma^2 \cdot \sum_{j=0}^r \binom{r}{j}^2 \\ &= \sigma^2 \cdot \binom{2r}{r}. \end{aligned}$$

У последњем реду се користи једнакост $\sum_{j=0}^r \binom{r}{j}^2 = \binom{2r}{r}$, која се једноставно показује упоређивањем коефицијената уз x^r са леве и десне стране једнакости

$$(1+x)^r \cdot (1+x)^r = (1+x)^{2r}.$$

Дакле, $D(\Delta^r X_t) = \sigma^2 \cdot \binom{2r}{r}$, па се за оцену параметра σ^2 може узети

$$\hat{\sigma}_r^2 = \frac{D(\Delta^r X_t)}{\binom{2r}{r}}, \text{ за } r > k.$$

Поступак за одређивање k састоји се у томе да се одређују

$$\begin{aligned} \Delta X_t \quad \text{и} \quad \hat{\sigma}_1^2 &= \frac{D(\Delta X_t)}{\binom{2 \cdot 1}{1}}; \\ \Delta^2 X_t \quad \text{и} \quad \hat{\sigma}_2^2 &= \frac{D(\Delta^2 X_t)}{\binom{2 \cdot 2}{2}}; \\ \Delta^3 X_t \quad \text{и} \quad \hat{\sigma}_3^2 &= \frac{D(\Delta^3 X_t)}{\binom{2 \cdot 3}{3}}; \\ &\dots \end{aligned}$$

Поступак се наставља док се оцене $\hat{\sigma}_k^2$ не стабилизују око неке вредности. Ред диференцирања за који се то дешава је тражени степен полинома.

2.4.2 Одређивање коефицијената полинома

Претпостављамо да имамо реализовану серију $x_1, x_2, \dots, x_n$ и циљ нам је да оценимо коефицијенте $c_0, c_1, \dots, c_k$ тренда

$$f_t = c_0 + c_1 t + \dots + c_k t^k$$

методом најмањих квадрата.

Нека је:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^k \\ & & \dots & & \\ 1 & n & n^2 & \dots & n^k \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_k \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_n \end{bmatrix}.$$

Модел је:

$$X = TC + E.$$

Треба одредити $\hat{C}$, тако да

$$S = \sum_{i=1}^n e_i^2 = E^T \cdot E$$

буде минимално. Важи

$$S = (X - TC)^T (X - TC) = (X^T - C^T T^T) (X - TC) = X^T X - C^T T^T X - X^T TC + C^T T^T TC,$$

$$\frac{\partial S}{\partial C} = -2T^T X + 2T^T TC.$$

Из услова $\frac{\partial S}{\partial C} = 0$ се добија $T^T TC = T^T X$ тј.

$$\hat{C} = (T^T T)^{-1} T^T X.$$

У питању је минимум (а не максимум) јер је

$$\frac{\partial^2 S}{\partial C^2} = 2T^T T,$$

што је ненегативно дефинитна матрица.

Сада добијамо и резидуале (оцену случајне компоненте):

$$\hat{E} = X - \hat{X} = X - T\hat{C} = X - T(T^T T)^{-1} T^T X,$$

или, другачије записано,

$$\hat{e}_t = x_t - \hat{x}_t = x_t - (\hat{c}_0 + \hat{c}_1 t + \dots + \hat{c}_k t^k).$$

Напомена 2.2. Сличан поступак може да се користи и за оцењивање цикличне компоненте ако је познат њен период.

2.5 Издвајање и елиминација сезонске компоненте временске серије

У претходној лекцији разматрали смо начине да се у временској серији процени или елиминише тренд. Сада ћемо нешто слично урадити са сезонском компонентом серије. Модел је

$$X_t = f_t + s_t + \epsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, n,$$

где је f_t тренд, s_t сезонска компонента, а ϵ_t случајна компонента.

Претпоставке за сезонску компоненту, s_t :

1. s_t је неслучајна функција времена, периодична, са познатим периодом d ($d = 12$ за месечне податке, а $d = 4$ за кварталне податке), тј. важи

$$s_{t+d} = s_t, \text{ за свако } t;$$

2. важи

$$s_1 + s_2 + \dots + s_d = 0,$$

тј. случајна компонента не утиче на средњу вредност серије;

3. додатно се претпоставља

$$n = k \cdot d,$$

из практичних разлога.

Често је погодно реализовану серију „поређати у матрицу” на следећи начин:

$$\begin{bmatrix} x_1, & x_2, & \dots, & x_d \\ x_{d+1}, & x_{d+2}, & \dots, & x_{2d} \\ & & \dots & \\ x_{(k-1)d+1}, & x_{(k-1)d+2}, & \dots, & x_{kd} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Зашто је овај начин записа погодан? У првој колони се налазе подаци који имају исту сезонску компоненту, s_1 (подаци из јануара или из првог квартала), у другој колони они који имају сезонску компоненту s_2 , итд.

За издвајање или елиминацију сезонске компоненте користићемо три методе:

- **сезонско диференцирање;**
- **методу константних трендова;**
- **методу покретних просека.**

2.5.1 Сезонско диференцирање

Дефинишемо оператор диференцирања са кораком d (оператор сезонског диференцирања):

$$\Delta_d X_t \stackrel{\text{def}}{=} X_t - X_{t-d}$$

Овај оператор служи за елиминисање сезонске компоненте у серији:

$$\begin{aligned} \Delta_d X_t &= X_t - X_{t-d} \\ &= f_t + s_t + \epsilon_t - (f_{t-d} + s_{t-d} + \epsilon_{t-d}) \\ &= (f_t - f_{t-d}) + (s_t - s_{t-d}) + (\epsilon_t - \epsilon_{t-d}) \\ &= \Delta_d f_t - \Delta_d \epsilon_t. \end{aligned}$$

2.5.2 Метода константних трендова

Овде претпостављамо да је тренд константан у сваком од периода дужине d , тј. у свакој врсти матрице (4):

$$\begin{aligned} f_1 = f_2 = \dots = f_d &= \overline{f_1} \\ f_{d+1} = f_{d+2} = \dots = f_{2d} &= \overline{f_2} \\ &\dots \\ f_{(k-1)d+1} = f_{(k-2)d+2} = \dots = f_{kd} &= \overline{f_k} \end{aligned}$$

Тада је оцена тренда аритметичка средина елемената одговарајуће врсте матрице:

$$\hat{\overline{f}}_i = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^d x_{(i-1)d+j}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Сезонска компонента се оцењује по колонама:

$$\hat{s}_j = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (x_{(i-1)d+j} - \hat{\overline{f}}_i), \quad j = 1, 2, \dots, d.$$

За овако добијену оцену важи:

$$\sum_{j=1}^d \hat{s}_j = 0.$$

Десезонирани подаци су:

$$x_t - \hat{s}_t, \quad t = 1, \dots, n.$$

2.5.3 Метода покретних просека

Ова метода је општија од претходне и за њу нису потребне никакве додатне претпоставке о тренду.

Први корак је да оценимо тренд компоненту. Имамо два случаја.

1. ако је $d = 2m$:

$$\hat{f}_t = \frac{1}{d} \left(\frac{1}{2} x_{t-m} + x_{t-m+1} + \dots + x_{t+m-1} + \frac{1}{2} x_{t+m} \right);$$

2. ако је $d = 2m + 1$:

$$\hat{f}_t = \frac{1}{d} (x_{t-m} + x_{t-m+1} + \dots + x_{t+m-1} + x_{t+m}).$$

Случајеви се разликују јер није природно оцењивати тренд у средњој тачки уз помоћ парног броја опсервација.

Оцена сезонске компоненте:

$$\hat{s}_j^* = \begin{cases} \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} (x_{id+j} - \hat{f}_{id+j}), & j = 1, \dots, m; \\ \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} (x_{(i-1)d+j} - \hat{f}_{(i-1)d+j}), & j = m+1, \dots, d \end{cases}$$

Методом покретних просека не могу добити оцене за првих m и последњих m чланова серије, па се зато у првих m колона не користе елементи прве врсте матрице (4), а у преосталих m колона се не користе елементи последње врсте.

Да би важио услов $\hat{s}_1 + \hat{s}_2 + \dots + \hat{s}_d = 0$ морамо да прилагодимо добијене сезонске вредности:

$$\hat{s}_j = \hat{s}_j^* - \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \hat{s}_i^*.$$

Десезонирани подаци:

$$x_t - \hat{s}_t, \quad t = 1, \dots, n.$$

2.5.4 Напомене и допуне

- Кад се једном одреди сезонска компонента, тј. $\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_d$, то се може искористити при прогнозирању серије, због периодичности.
- Елиминација сезонске компоненте понекад помаже да се лакше уочи тренд у серији.
- Једноструко експоненцијално изравнавање се може прилагодити случају када у серији постоји сезонска компонента.

1. за адитивни модел:

$$F_t = \alpha(X_t - s_{t-d}) + (1 - \alpha)F_{t-1},$$

а прогнозирана вредност серије h корака у будућност је

$$\hat{X}_t(h) = F_t + s_{t-d+h};$$

2. за мултипликативни модел:

$$F_t = \alpha \cdot \frac{X_t}{s_{t-d}} + (1 - \alpha)F_{t-1},$$

а прогнозирана вредност серије h корака у будућност је

$$\hat{X}_t(h) = F_t \cdot s_{t-d+h}.$$

3 Модели временских серија

3.1 Стационарне временске серије

Један од циљева анализе временских серија је и прогнозирање будућих вредности серије. Да би то било могуће потребно је да серија буде **стационарна** или да се погодним трансформацијама може свести на стационарну серију.

Дефиниција 3.1. Временска серија $\{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ је **строго стационарна** ако случајни вектори $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ и $(X_{1+h}, X_{2+h}, \dots, X_{n+h})$ имају исте расподеле за све $n, h \in \mathbb{N}$.

Дефиниција 3.2. Временска серија $\{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ је **слабо стационарна** ако важе услови:

1. $E(X_t) = \mu = \text{const.}, \quad t \in \mathbb{N};$
2. $E(X_t^2) < +\infty, \quad t \in \mathbb{N};$
3. $\text{cov}(X_t, X_s) = \gamma(t - s), \quad t, s \in \mathbb{N}.$

Дефиниција слабе стационарности је оперативна (употребљива у пракси), а дефиниција строге стационарности није.

Из слабе стационарности не следи строга стационарност (могуће је направити контрапример), а из строге стационарности не следи слаба стационарност јер не мора да важи други услов из дефиниције. Из строге стационарности следи слаба стационарност ако је у питању L^2 - процес.

Најједноставнији пример стационарне серије је **бели шум**.

Пример 3.1. Како конструисати (строго) стационарну серију? На пример, овако. Нека је

$$X_t = g(Z_t, Z_{t-1}, \dots, Z_{t-q}),$$

где је g реална функција, $q \in \mathbb{N}$, а $\{Z_t, t \in \mathbb{N}\}$ низ независних и једнако расподељених случајних величина.

$\{X_t, t \geq q\}$ је **серија покретних просека**. За њу се каже да је q - **зависна** (q - **корелисана**) јер су X_t и X_s независни (некорелисани) за $|t - s| > q$.

На пример, низ клизећих средина код методе покретних просека је $2m$ - корелисана серија, а бели шум је 0 - корелисан.

3.2 Аутоковаријациона и аутокорелациона функција

Аутоковаријациона и аутокорелациона функција су основни алат за одређивање модела стационарне временске серије.

Дефиниција 3.3. Нека је $\{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ слабо стационарна временска серија, $E(X_t) = \mu$.

1. **Аутоковаријациони коефицијент** са кашњењем k је

$$\gamma_k = \text{cov}(X_t, X_{t-k}) = E(X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Низ $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots$ је **аутоковаријациона функција**.

2. **Аутокорелациони коефицијент** са кашњењем k је

$$\rho_k = \frac{\text{cov}(X_t, X_{t-k})}{\sqrt{D(X_t)D(X_{t-k})}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Низ $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \dots$ је **аутокорелациона функција**. Њен графички приказ зове се **корелограм**.

3.2.1 Особине γ_k и ρ_k

1. $\gamma_0 = D(X_t)$, $\rho_0 = \frac{\gamma_0}{\gamma_0} = 1$;
2. $\gamma_{-k} = \text{cov}(X_t, X_{t+k}) = \text{cov}(X_{t+k}, X_t) = \gamma_k$, $\rho_{-k} = \rho_k$;
3. $|\gamma_k| \leq \gamma_0$, $|\rho_k| \leq 1$

Доказ.

$$\begin{aligned}
 Z_t &= \omega_1 X_t + \omega_2 X_{t-k} \\
 D(Z_t) &\geq 0 \\
 D(Z_t) &= D(\omega_1 X_t + \omega_2 X_{t-k}) \\
 &= \omega_1^2 D(X_t) + \omega_2^2 D(X_{t-k}) + 2\omega_1 \omega_2 \text{cov}(X_t, X_{t-k}) \\
 &= (\omega_1^2 + \omega_2^2) \gamma_0 + 2\omega_1 \omega_2 \gamma_k
 \end{aligned}$$

За $\omega_1 = \omega_2 = 1$ добија се $\gamma_0 \geq -\gamma_k$, а за $\omega_1 = 1, \omega_2 = -1$ добија се $\gamma_0 \geq \gamma_k$, одакле следи $|\gamma_k| \leq \gamma_0$. $\square$

4. ненегативна дефинитност:

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k a_i a_j \gamma_{i-j} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k a_i a_j \rho_{i-j} \geq 0,$$

за произвољно $k \in \mathbb{N}$ и произвољно $a = (a_1, a_2, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^k$.

Доказ.

$$\begin{aligned}
 D(a_1(X_t - \mu) + a_2(X_{t-1} - \mu) + \dots + a_k(X_{t-k+1} - \mu)) &\geq 0 \\
 D(a_1(X_t - \mu) + a_2(X_{t-1} - \mu) + \dots + a_k(X_{t-k+1} - \mu)) &= E \left(\sum_{i=1}^k a_i (X_{t-i+1} - \mu) \right)^2 \\
 &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k a_i a_j E(X_{t-i+1} - \mu)(X_{t-j+1} - \mu) \\
 &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k a_i a_j \gamma_{i-j},
 \end{aligned}$$

$$\text{одакле следи } \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k a_i a_j \gamma_{i-j} \geq 0.$$

$\square$

Често се користи и матрични запис:

$$\Gamma_k = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_{k-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_{k-2} \\ & & \dots & & \\ \gamma_{k-1} & \gamma_{k-2} & \gamma_{k-3} & \dots & \gamma_0 \end{bmatrix}, \quad P_k = \frac{1}{\gamma_0} \Gamma_k = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{k-2} \\ & & \dots & & \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

3.3 Ергодиичност временских серија

Да би се на основу једне реализације случајног процеса (временске серије) дошло до закључка о карактеристикама тог процеса потребно је увести додатни услов који се односи на меморију тог процеса - **ергодиичност**.

Дефиниција 3.4. Слабо стационарна временска серија је ергодиична у односу на средњу вредност ако

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t$$

конвергира у вероватноћи (у средње квадратном смислу) ка $E(X_t)$, кад $T \rightarrow +\infty$.

Може се показати да је довољан услов за ергодиичност слабо стационарне серије:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |\gamma_k| < +\infty.$$

Ергодиичност, заправо, значи да меморија процеса (мерена са γ_k) слаби са упро-сечавањем током времена. Она омогућава моделирање временске серије моделом са **коначно много параметара**.

У литератури се појављује и услов ергодиичности записан на следећи начин:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \gamma_k \right) = 0.$$

Ергодиичност је, углавном, испуњена за временске серије које се појављују у прак-си. Надаље ћемо је подразумевати.

Пример 3.2. Сад ћемо видети пример серије која је слабо стационарна, али није ергодиична. Нека је

$$X_t^{(i)} = \mu^{(i)} + e_t,$$

где је $\{e_t\}$ Гаусов бели шум, а $\mu^{(i)}$ средња вредност у i -тој реализацији серије, из $\mathcal{N}(0, \lambda^2)$ расподеле, независна од e_t .

Серија јесте слабо стационарна:

$$\begin{aligned} E(X_t^{(i)}) &= E(\mu^{(i)} + e_t) = 0 \\ \text{cov}(X_t^{(i)}, X_s^{(i)}) &= E(X_t^{(i)} X_s^{(i)}) \\ &= E((\mu^{(i)} + e_t)(\mu^{(i)} + e_s)) \\ &= \begin{cases} \lambda^2, & t \neq s; \\ \lambda^2 + \sigma^2, & t = s. \end{cases} \end{aligned}$$

Серија није ергодиична:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\mu^{(i)} + e_t) \\ &= \mu^{(i)} + \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T e_t \\ &\rightarrow \mu^{(i)}, T \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Видимо да је последња гранична вредност различита од $E(X_t) = 0$, па ова серија није ергодиична.

3.4 Оцене средње вредности, аутоковаријационе и аутокорелационе функције на основу реализоване серије

Претпостављамо да радимо са серијом која је слабо стационарна:

$$\begin{aligned} E(X_t) &= \mu, \quad t = 1, 2, \dots \\ E(X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu) &= \gamma_k, \quad t = 1, 2, \dots, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Такође претпостављамо да је серија ергодична, тј. да важи услов

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |\gamma_k| < +\infty.$$

1. оцена средње вредности серије, μ :

$$\bar{X} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t$$

- оцена је непристрасна:

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T E(X_t) = \frac{1}{T} \cdot T \cdot \mu = \mu;$$

- оцена је конзистентна:

$$\begin{aligned} |D(\bar{X})| &= \left| \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T E(X_t - \mu)(X_s - \mu) \right| \\ &= \left| \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T \gamma_{t-s} \right| \\ &= \frac{2}{T^2} |T\gamma_0/2 + (T-1)\gamma_1 + \dots + \gamma_{T-1}| \\ &\leq \frac{2}{T^2} \cdot T \cdot (|\gamma_0|/2 + |\gamma_1| + \dots + |\gamma_{T-1}|) \\ &\rightarrow 0, \quad T \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

2. оцена аутоковаријационе функције:

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_k^{(1)} &= \frac{1}{T} \sum_{t=k+1}^T (X_t - \bar{X})(X_{t-k} - \bar{X}), \\ \hat{\gamma}_k^{(2)} &= \frac{1}{T-k} \sum_{t=k+1}^T (X_t - \bar{X})(X_{t-k} - \bar{X}) \end{aligned}$$

- обе оцено су пристрасне, али асимптотски непристрасне:

$$\begin{aligned}
E(\hat{\gamma}_k^{(1)}) &= \frac{1}{T} E \left(\sum_{t=k+1}^T (X_t - \bar{X})(X_{t-k} - \bar{X}) \right), \\
&= \frac{1}{T} E \left(\sum_{t=k+1}^T ((X_t - \mu) - (\bar{X} - \mu))((X_{t-k} - \mu) - (\bar{X} - \mu)) \right), \\
&\approx \frac{1}{T} E \left(\sum_{t=k+1}^T ((X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu) - (T-k)(\bar{X} - \mu)^2) \right), \\
&= \frac{T-k}{T} \gamma_k - \frac{T-k}{T} D(\bar{X}). \\
E(\hat{\gamma}_k^{(2)}) &= \frac{1}{T-k} E \left(\sum_{t=k+1}^T (X_t - \bar{X})(X_{t-k} - \bar{X}) \right), \\
&= \frac{T}{T-k} E(\hat{\gamma}_k^{(1)}) \\
&= \gamma_k - D(\bar{X}).
\end{aligned}$$

- прва оцена има мању средње квадратну грешку.

3. оцена аутокорељационе функције:

$$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0} = \frac{\sum_{t=k+1}^T (X_t - \bar{X})(X_{t-k} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^2}$$

- оцена је пристрасна (пристрасност реда $\frac{1}{T}$);
- ако су чланови серије независне случајне величине са истом расподелом и коначном дисперзијом, онда је

$$\hat{\rho}_k \rightarrow \mathcal{N} \left(0, \frac{1}{T} \right), \quad T \rightarrow +\infty, \quad k > 0.$$

Графички приказ низа $\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \dots$ зове се **узорачки корелограм**.

Докази наведених особина могу се наћи у књизи Младеновић, Нојковић „Примењена анализа временских серија”.

5.5 Линеарни процес

Линеарни процес је најопштији модел за стационарне временске серије. Дефинисаћемо га у склопу наредне теореме.

Теорема 5.1. (Волдова теорема разлагања)

Свака слабо стационарна временска серија може се приказати као збир два међусобно некорелисана процеса, од којих је један **потпуно детерминистички** (потпуно прецизно се може предвидети на основу информација из прошлости), а други **потпуно недетерминистички** (не може се предвидети на основу информација из прошлости).

Недетерминистичка компонента $\{X_t - \mu, t = 1, 2, \dots\}$ се може представити у облику **линеарног процеса**:

$$\begin{aligned} X_t - \mu &= e_t + \psi_1 e_{t-1} + \psi_2 e_{t-2} + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \psi_i e_{t-i}, \quad \psi_0 = 1, \end{aligned}$$

где је $\mu = E(X_t)$, а $\{e_t\}$ бели шум.

Претпоставља се да важи услов

$$\sum_{i=0}^{+\infty} |\psi_i| < +\infty$$

(који обезбеђује да реду којим је процес задат конвергира у L^2 - смислу).

Пример 5.3. Пример потпуно детерминистичког процеса је

$$X_t = A \cos t + B \sin t,$$

где је $t \in \mathbb{N}$, а $A, B \sim \mathcal{N}(0, 1)$ независне случајне величине.

Зашто овај случајни низ може потпуно тачно да се предвиди на основу прошлости?

Уз помоћ једноставних тригонометријских трансформација добијамо:

$$\begin{aligned} X_t &= A(\cos(t-1) \cos 1 - \sin(t-1) \sin 1) + B(\sin(t-1) \cos 1 + \cos(t-1) \sin 1) \\ &= A \left(\cos(t-1) \cos 1 - \frac{1}{2}(\cos(t-2) - \cos t) \right) + B \left(\sin(t-1) \cos 1 + \frac{1}{2}(\sin t - \sin(t-2)) \right) \\ &= \cos 1 \cdot X_{t-1} - \frac{1}{2}X_{t-2} + \frac{1}{2}X_t. \end{aligned}$$

Видимо да смо добили детерминистичку везу између чланова низа:

$$X_t = 2 \cos 1 \cdot X_{t-1} - X_{t-2},$$

из које, ако задамо вредности X_1 и X_2 , можемо добити све наредне чланове низа.

Напомена 5.1. Линеарни процес се може записати и уз помоћ оператора L :

$$X_t - \mu = (1 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \psi_3 L^3 + \dots) e_t.$$

Напомена 5.2. Из услова $\sum_{i=0}^{+\infty} |\psi_i| < +\infty$ следи $\sum_{i=0}^{+\infty} \psi_i^2 < +\infty$, а обрнуто не важи.

Доказ. Ако важи $\sum_{i=0}^{+\infty} |\psi_i| < +\infty$, онда постоји $n_0 \in \mathbb{N}$, такво да

$$|\psi_i| < 1, \text{ за } i \geq n_0,$$

па је

$$\psi_i^2 < |\psi_i|, \text{ за } i \geq n_0.$$

Даље је

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \psi_i^2 = \sum_{i=0}^{n_0-1} \psi_i^2 + \sum_{i=n_0}^{+\infty} \psi_i^2 < \sum_{i=0}^{n_0-1} \psi_i^2 + \sum_{i=n_0}^{+\infty} |\psi_i| < +\infty.$$

Пример да обрнуто не важи:

$$\psi_i = \frac{1}{i}$$

$$\frac{1}{i} > \frac{1}{x} \text{ за } x > i,$$

па је

$$\frac{1}{i} > \int_i^{i+1} \frac{1}{x} dx,$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} > \sum_{i=1}^n \int_i^{i+1} \frac{1}{x} dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln(n+1) - \ln 1 \rightarrow +\infty, n \rightarrow +\infty.$$

С друге стране,

$$\frac{1}{i^2} < \frac{1}{x^2} \text{ за } x < i,$$

па је

$$\frac{1}{i^2} < \int_{i-1}^i \frac{1}{x^2} dx,$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} < 1 + \sum_{i=2}^n \int_{i-1}^i \frac{1}{x^2} dx = 1 + \int_1^n \frac{1}{x^2} dx = 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \rightarrow 2, n \rightarrow +\infty.$$

□

5.5.1 Особине линеарног процеса

1.

$$\begin{aligned} D(X_t) &= E(X_t - \mu)^2 \\ &= E(e_t + \psi_1 e_{t-1} + \psi_2 e_{t-2} + \dots)^2 \\ &= \sigma^2(1 + \psi_1^2 + \psi_2^2 + \dots) \\ &= \sigma^2 \sum_{i=0}^{+\infty} \psi_i^2 < +\infty \end{aligned}$$

2. аутоковаријациона функција:

$$\begin{aligned} \gamma_k &= E(X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu) \\ &= E(e_t + \psi_1 e_{t-1} + \psi_2 e_{t-2} + \dots)(e_{t-k} + \psi_1 e_{t-k-1} + \psi_2 e_{t-k-2} + \dots) \\ &= \psi_k E(e_{t-k}^2) + \psi_{k+1} \psi_1 E(e_{t-k-1}^2) + \psi_{k+2} \psi_2 E(e_{t-k-2}^2) + \dots \\ &= \sigma^2(\psi_k + \psi_{k+1} \psi_1 + \psi_{k+2} \psi_2 + \dots) \\ &= \sigma^2 \sum_{i=0}^{+\infty} \psi_i \psi_{k+i}, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

3. аутокорелациона функција:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\sum_{i=0}^{+\infty} \psi_i \psi_{k+i}}{\sum_{i=0}^{+\infty} \psi_i^2}, \quad k = 0, 1, \dots$$

4. Ред којим је дефинисан линеарни процес је L^2 - конвергентан:

$$E \left| \sum_{i=0}^T \psi_i e_{t-i} - Y_t \right|^2 \rightarrow 0, \quad T \rightarrow +\infty,$$

за неку случајну величину Y_t .

Доказ. Примењујемо Кошијев критеријум за L^2 - конвергенцију. Треба доказати да

$$E \left| \sum_{i=0}^M \psi_i e_{t-i} - \sum_{j=0}^N \psi_j e_{t-j} \right|^2 < \epsilon,$$

за свако фиксирано $\epsilon > 0$, неко $N \in \mathbb{N}$ и све $M > N$. Сређивањем израза са леве стране добијамо:

$$\begin{aligned} E \left| \sum_{i=0}^M \psi_i e_{t-i} - \sum_{j=0}^N \psi_j e_{t-j} \right|^2 &= E \left| \sum_{i=N+1}^M \psi_i e_{t-i} \right|^2 \\ &= E \left(\sum_{i=N+1}^M \psi_i e_{t-i} \cdot \sum_{j=N+1}^M \psi_j e_{t-j} \right) \\ &= \sum_{i=N+1}^M \psi_i^2 E(e_{t-i}^2) \\ &= \sigma^2 \sum_{i=N+1}^M \psi_i^2 < \epsilon. \end{aligned}$$

Последња неједнакост важи због тога што је ред квадратно сумабилан, па се члан $\sum_{i=N+1}^M \psi_i^2$ може направити довољно малим (тј. пронаћи одговарајуће N). То је Кошијев критеријум примењен у обрнутом смеру. $\square$

5. Линеарни процес је ергодичан у односу на средњу вредност.

Доказ.

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{+\infty} |\gamma_j| &= \sigma^2 \sum_{j=0}^{+\infty} \left| \sum_{i=0}^{+\infty} \psi_i \psi_{j+i} \right| \\ &\leq \sigma^2 \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} |\psi_i \psi_{j+i}| \\ &= \sigma^2 \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} |\psi_i| \cdot |\psi_{j+i}| \\ &= \sigma^2 \sum_{i=0}^{+\infty} |\psi_i| \sum_{j=0}^{+\infty} |\psi_{j+i}| \\ &\leq \sigma^2 \sum_{i=0}^{+\infty} |\psi_i| \sum_{j=0}^{+\infty} |\psi_j| \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

$\square$

5.5.2 Модели за слабо стационарне временске серије

Претпостављамо да је $\{X_t\}$ слабо стационарна серија и да је $E(X_t) = 0$. $\{e_t\}$ је бели шум.

1. ауторегресиони модели (AR):

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + e_t.$$

Овде је записан модел реда p ($AR(p)$).

2. модели покретних просека (MA):

$$X_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \cdots - \theta_q e_{t-q}.$$

Овде је записан модел реда q ($MA(q)$).

3. ауторегресиони модели покретних просека ($ARMA$):

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - \cdots - \phi_p X_{t-p} = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \cdots - \theta_q e_{t-q}.$$

Овде је записан модел реда (p, q) ($ARMA(p, q)$).

Сви ови модели представљају краћи запис линеарног процеса. Сам линеарни процес се може означити као $MA(\infty)$.

Напомена 5.3. *Модели се могу прилагодити случају $E(X_t) = \mu \neq 0$, тако што се свако X_t замени са $X_t - \mu$, $t = 1, 2, \dots$*

5.6 Ауторегресиони модели

Сад ћемо детаљније размотрити ауторегресионе моделе. Модел реда p , $AR(p)$ је:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + e_t,$$

или, другачије записано:

$$(1 - \phi_1 L - \cdots - \phi_p L^p) X_t = e_t.$$

$\phi_1, \dots, \phi_p$ су ауторегресиони параметри.

Сваком оваквом моделу можемо доделити карактеристичну једначину (једначина степена p по променљивој g):

$$g^p - \phi_1 g^{p-1} - \cdots - \phi_p = 0.$$

5.6.1 Ауторегресиони модел првог реда ($AR(1)$)

Модел је:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + e_t,$$

или, другачије записано

$$(1 - \phi_1 L) X_t = e_t.$$

Карактеристична једначина је:

$$g - \phi_1 = 0.$$

Сад ћемо извести основне особине овог модела.

1. **услов стационарности:**

Услов стационарности значи да је дисперзија серије коначна, тј. серија слабо стационарна.

Расписивањем модела „по дубини” добијамо:

$$\begin{aligned}X_t &= \phi_1 X_{t-1} + e_t \\&= \phi_1(\phi_1 X_{t-2} + e_{t-1}) + e_t = \phi_1^2 X_{t-2} + \phi_1 e_{t-1} + e_t \\&= \phi_1^2(\phi_1 X_{t-3} + e_{t-2}) + \phi_1 e_{t-1} + e_t = \phi_1^3 X_{t-3} + \phi_1^2 e_{t-2} + \phi_1 e_{t-1} + e_t \\&= \dots \\&= e_t + \phi_1 e_{t-1} + \phi_1^2 e_{t-2} + \phi_1^3 e_{t-3} + \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D(X_t) &= D(e_t + \phi_1 e_{t-1} + \phi_1^2 e_{t-2} + \phi_1^3 e_{t-3} + \dots) \\&= \sigma^2(1 + \phi_1^2 + \phi_1^4 + \phi_1^6 + \dots) \\&= \sigma^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \phi_1^{2k}.\end{aligned}$$

Последњи ред конвергира, тј. дисперзија је коначна за

$$|\phi_1| < 1 \quad (\text{услов стационарности})$$

Тада је

$$D(X_t) = \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1^2}.$$

2. **запис у облику линеарног процеса** (ако важи услов стационарности):

Из

$$(1 - \phi_1 L)X_t = e_t,$$

добијамо

$$\begin{aligned}X_t &= (1 - \phi_1 L)^{-1} e_t \\&= (1 + \phi_1 L + \phi_1^2 L^2 + \phi_1^3 L^3 + \dots) e_t \\&= e_t + \phi_1 e_{t-1} + \phi_1^2 e_{t-2} + \phi_1^3 e_{t-3} + \dots\end{aligned}$$

Дакле, одговарајући коефицијенти линеарног процеса су

$$\psi_j = \phi_1^j, \quad j = 1, 2, \dots$$

Из записа у облику линеарног процеса следи и

$$E(X_t) = 0.$$

3. **аутоковаријациона функција:**

1. начин:

$$\begin{aligned}\gamma_k &= E(X_t X_{t-k}) \\&= E(e_t + \phi_1 e_{t-1} + \phi_1^2 e_{t-2} + \dots + \phi_1^k e_{t-k} + \dots) \cdot (e_{t-k} + \phi_1 e_{t-k-1} + \phi_1^2 e_{t-k-2} + \dots) \\&= \phi_1^k E(e_{t-k}^2) + \phi_1^{k+2} E(e_{t-k-1}^2) + \phi_1^{k+4} E(e_{t-k-2}^2) + \dots \\&= \sigma^2(\phi_1^k + \phi_1^{k+2} + \phi_1^{k+4} + \dots)\end{aligned}$$

Ако важи услов $|\phi_1| < 1$, онда се последњи израз може приказати као

$$\gamma_k = \sigma^2 \cdot \frac{\phi_1^k}{1 - \phi_1^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

2. начин: Кад се једначина модела помножи са X_{t-k} и „нападне” очекивањем, добија се:

$$E(X_t X_{t-k}) = E(\phi_1 X_{t-1} X_{t-k}) + E(e_t X_{t-k}),$$

тј.

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \begin{cases} \sigma^2, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

Дакле,

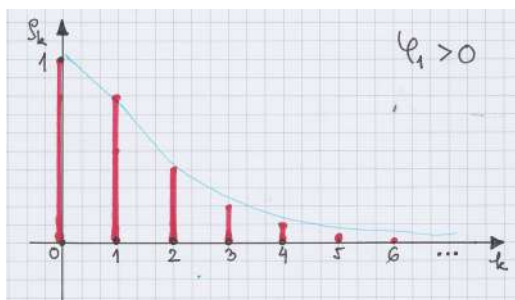
$$\gamma_k = \begin{cases} \phi_1 \gamma_{k-1} + \sigma^2, & k = 0 \\ \phi_1 \gamma_{k-1}, & k \neq 0. \end{cases}$$

Одатле се, решавањем система за $k = 0$ и $k = 1$ добијају γ_0 и γ_1 , а даље рачуна по рекурзивној формули.

4. аутокорељациона функција:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\sigma^2 \cdot \frac{\phi_1^k}{1 - \phi_1^2}}{\frac{\sigma^2}{1 - \phi_1^2}} = \phi_1^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

5. **корелограм**: У зависности од знака параметра ϕ_1 , корелограм може да изгледа као на Слици 1 ($\phi_1 > 0$) или Слици 2 ($\phi_1 < 0$).



Слика 4:

Видимо да, у оба случаја, аутокорељационих коефицијената различитих од нуле има бесконачно много и да експоненцијално опадају по модулу.

5.6.2 Примери нестационарних $AR(1)$ серија

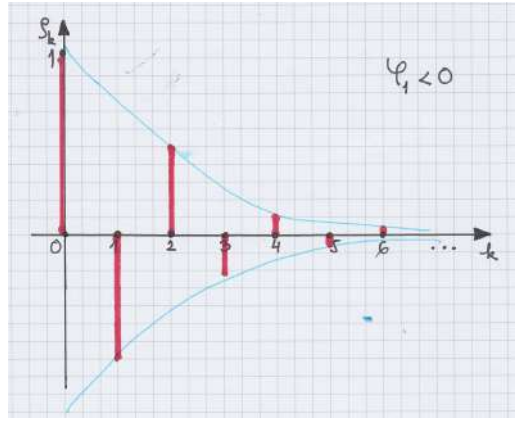
Сад ћемо размотрити неколико примера $AR(1)$ модела за које не важи услов стационарности.

Пример 5.4. (случајно лутање)

Модел је

$$X_t = X_{t-1} + e_t, \quad X_0 = 0.$$

ово је „гранични” случај, јер је $\phi_1 = 1$.



Слика 5:

Расписивањем серије се добија:

$$X_t = X_{t-1} + e_t = X_{t-2} + e_{t-1} + e_t = X_{t-3} + e_{t-2} + e_{t-1} + e_t = \dots = \sum_{i=1}^t e_i.$$

Овде је

$$\text{cov}(X_t, X_s) = E \left(\sum_{i=1}^t e_i \cdot \sum_{j=1}^s e_j \right) = \sigma^2 \cdot \min\{s, t\}.$$

Коваријација зависи од t и s појединачно (а не само од њихове разлике), па серија није стационарна.

Међутим, примећујемо да из

$$X_t - X_{t-1} = e_t, \text{ тј. } \Delta X_t = e_t$$

следи да је диференцирана серија стационарна.

Пример 5.5. Још један гранични случај добијамо за $\phi_1 = -1$. Модел је

$$X_t = -X_{t-1} + e_t, \quad X_0 = 0.$$

Расписивањем серије се добија:

$$X_t = -X_{t-1} + e_t = X_{t-2} - e_{t-1} + e_t = -X_{t-3} + e_{t-2} - e_{t-1} + e_t = \dots = \sum_{i=1}^t (-1)^{t-i} e_i.$$

Овде је

$$\text{cov}(X_t, X_s) = E \left(\sum_{i=1}^t (-1)^{t-i} e_i \cdot \sum_{j=1}^s (-1)^{s-j} e_j \right) = \sigma^2 \cdot \sum_{i=1}^{\min\{s,t\}} (-1)^{t+s-2i}.$$

Ово је „још гори” случај и опет серија није стационарна.

Међутим, „сезонским” диференцирањем са кораком 2 добијамо:

$$\Delta_2 X_t = X_t - X_{t-2} = X_{t-2} - e_{t-1} + e_t - X_{t-2} = \Delta e_t,$$

тј. овако диференцирана серија је стационарна.

Пример 5.6. (експлозивна серија)

Модел је:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + e_t, \quad |\phi_1| > 1.$$

Овај модел је, очигледно, нестационаран (кажемо **експлозиван**), што се може проверити исписивањем вредности серије $X_1, X_2, \dots$ при чему се бели шум занемарује. Приметили бисмо да вредности „дивљају” и да се не може утврдити никаква правилност у њиховој промени.

Код ове серије неће помоћи никакво диференцирање, тј. у сваком покушају ће се добијати још компликованији модел. Проверите!

Међутим, кад применимо „трик” - из једначине модела изразимо X_{t-1} преко X_t , добијемо нови модел:

$$X_{t-1} = \frac{1}{\phi_1} X_t - \frac{1}{\phi_1} e_t.$$

који нисмо „покварили” (низ $\{\frac{1}{\phi_1} e_t\}$ је поново бели шум, али са другом дисперзијом), али који је стационаран ($|1/\phi_1| < 1$). Оно што је неубичајено код оваквог модела (и што га чини неупотребљивим у пракси) је његова **некаузалност**, тј. чињеница да смо прошле вредности изразили преко будућих, па ће по формули серија „ићи у прошлост”. Са теоријске тачке гледишта, овакви модели су равноправни са каузалним моделима.

5.6.3 Ауторегресиони модел реда p ($AR(p)$)

Модел реда p , $AR(p)$ је:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + e_t,$$

или:

$$(1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p) X_t = e_t.$$

$\phi_1, \dots, \phi_p$ су **ауторегресиони параметри**.

Карактеристична једначина:

$$g^p - \phi_1 g^{p-1} - \dots - \phi_p = 0$$

Особине модела:

1. **услов стационарности:** Из записа:

$$(1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p) X_t = e_t \tag{5}$$

следи

$$(1 - g_1 L)(1 - g_2 L) \dots (1 - g_p L) X_t = e_t, \tag{6}$$

где су $g_1, g_2, \dots, g_p$ решења одговарајуће карактеристичне једначине.

Доказ. Оператори на левој страни једнакости (5) и (6) морају давати исти резултат када се примене на било које X_t , па коефицијенти уз сваки степен L у једном и другом изразу морају бити једнаки. Кад се „измножи” лева страна израза (6) и изједначе коефицијенти уз сваки степен L , добијају се Вијетове формуле за полином степена p , а то су, заправо, везе између решења одговарајуће једначине реда p (а то је карактеристична једначина модела). $\square$

Запис у облику линеарног процеса је могућ (што, заправо, значи да је серија стационарна) ако је могуће инвертовати сваки члан са леве стране израза (6), тј.

$$\exists(1 - g_1 L)^{-1}, \exists(1 - g_2 L)^{-1}, \dots, \exists(1 - g_p L)^{-1},$$

а то је испуњено за

$$|g_1| < 1, |g_2| < 1, \dots, |g_p| < 1.$$

Доказ. Овде ћемо детаљније анализирати када и како постоји инверз оператора $1 - gL$.

Полазимо од израза

$$(1 - gL)X_t = Y_t.$$

Када се лева и десна страна помноже са $1 + gL + g^2 L^2 + \dots + g^{t-1} L^{t-1}$, добија се

$$(1 + gL + g^2 L^2 + \dots + g^{t-1} L^{t-1}) (1 - gL)X_t = (1 + gL + g^2 L^2 + \dots + g^{t-1} L^{t-1}) Y_t,$$

тј.

$$(1 - g^t L^t) X_t = (1 + gL + g^2 L^2 + \dots + g^{t-1} L^{t-1}) Y_t,$$

односно, записано на други начин,

$$X_t - g^t X_0 = (1 + gL + g^2 L^2 + \dots + g^{t-1} L^{t-1}) Y_t,$$

Ако је X_0 ограничено, а $|g| < 1$, онда за велико t члан $g^t X_0$ постаје занемарљив, па добијамо:

$$X_t \approx (1 + gL + g^2 L^2 + \dots + g^{t-1} L^{t-1}) Y_t,$$

тј.

$$X_t \approx (1 + gL + g^2 L^2 + \dots + g^{t-1} L^{t-1}) (1 - gL)X_t.$$

Дакле, израз $1 + gL + g^2 L^2 + \dots + g^{t-1} L^{t-1}$ је „приближни” инверз оператора $1 - gL$:

$$(1 - gL)^{-1} = \lim_{j \rightarrow +\infty} (1 + gL + g^2 L^2 + \dots + g^j L^j)$$

и важи

$$(1 - gL)^{-1}(1 - gL) = 1.$$

Ако је $\{X_t\}$ слабо стационарна временска серија, онда је услов ограничености задовољен, па је довољан услов за постојање инверза:

$$|g| < 1.$$

□

2. запис у облику линеарног процеса: Ако важи услов стационарности, онда се запис у облику линеарног процеса добија из:

$$(1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p) X_t = e_t,$$

кад се X_t замени са $(1 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \dots) e_t$:

$$(1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p) (1 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \dots) e_t = e_t,$$

па се упореде коефицијенти уз сваки степен L са леве и десне стране. Одатле се коефицијенти одговарајућег линеарног процеса ψ_i могу изразити преко ауторегресионих параметара ϕ_j .

Преласком на очекивање, добијамо да важи и:

$$E(X_t) = 0.$$

3. **аутоковаријациона функција:** Из израза:

$$E(X_t X_{t-k}) = E(\phi_1 X_{t-1} X_{t-k}) + E(\phi_2 X_{t-2} X_{t-k}) + \cdots + E(\phi_p X_{t-p} X_{t-k}) + E(e_t X_{t-k})$$

следи

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \cdots + \phi_p \gamma_{k-p} + \begin{cases} \sigma^2, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0. \end{cases} \quad (7)$$

4. **аутокорелациона функција:** Аутокорелациона функција се добија из (7), кад се искористи $\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$:

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \cdots + \phi_p \rho_{k-p}, \quad k > 0. \quad (8)$$

Аутокорелациони коефицијенти се могу изразити и на следећи начин:

$$\rho_k = b_1 g_1^k + b_2 g_2^k + \cdots + b_p g_p^k, \quad k \geq 0,$$

где су $g_1, g_2, \dots, g_p$ решења карактеристичне једначине модела, а $b_1, b_2, \dots, b_p$ константе.

Кад се рекурзивна веза (8) испише за вредности $k = 1, 2, \dots, p$ добија се такозвани *Yule – Walker* систем једначина:

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{p-2} \\ & & \cdots & & \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \rho_{p-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_p \end{bmatrix}, \quad (9)$$

тј.

$$P_p \cdot \Phi_p = \rho_p,$$

одакле се добија

$$\Phi_p = P_p^{-1} \cdot \rho_p.$$

Закључујемо да код ауторегресионих модела скуп ауторегресионих коефицијената једнозначно одређује параметре модела.

5. **корелограм:** На основу рекурзивне једначине (8) закључујемо да ће корелограм овог модела имати бесконачно много „цртица” (тј. аутокорелационих коефицијената различитих од нуле), а може се показати и да ће оне (ако важи услов стационарности) опадати по модулу.

Пример 5.7. (*AR(2) модел*) За модел другог реда:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + e_t,$$

карактеристична једначина је

$$g^2 - \phi_1 g - \phi_2 = 0.$$

Аутокорелациона функција се добија из рекурзивне везе:

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2}, \quad k > 0.$$

За аутокорељационе коефицијенте важи:

$$\rho_k = b_1 g_1^k + b_2 g_2^k, \quad k \geq 0.$$

где су g_1 и g_2 решења карактеристичне једначине.

За $k = 0$ добија се

$$\rho_0 = 1 = b_1 + b_2,$$

а за $k = 1$:

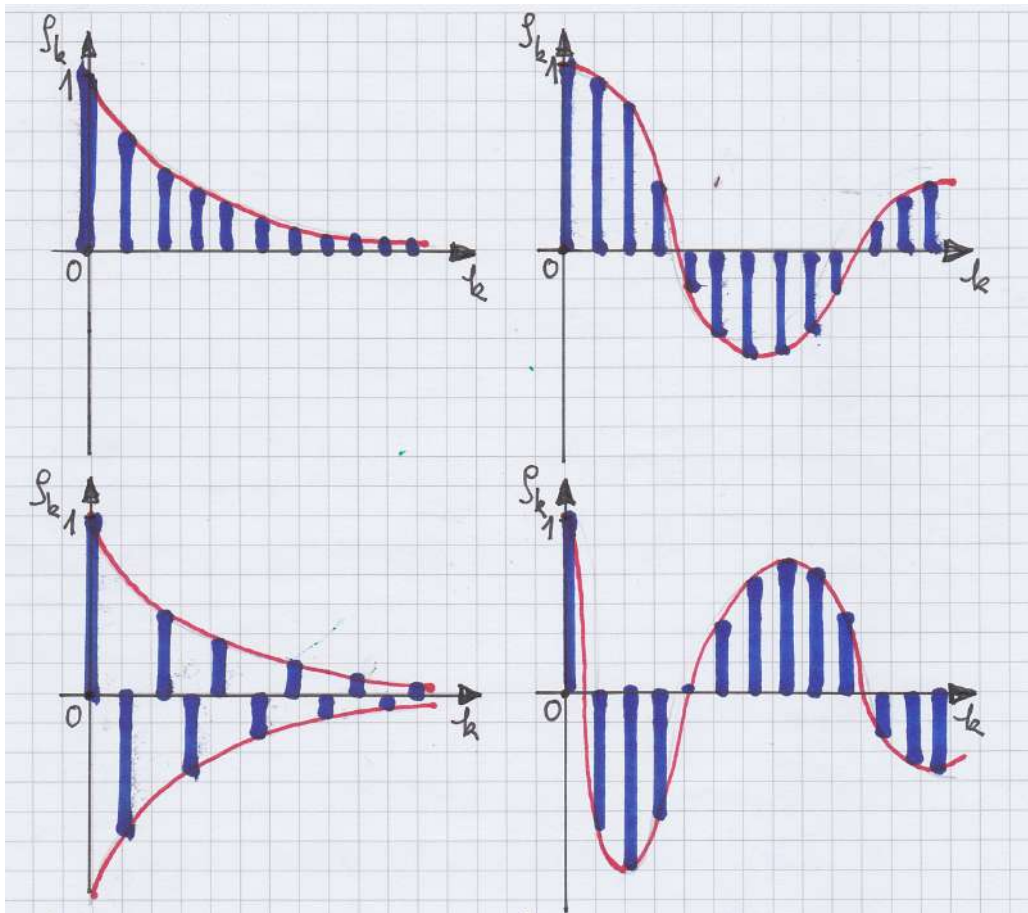
$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2} = b_1 g_1 + b_2 g_2.$$

Из овог система се могу израчунати константе b_1 и b_2 . С друге стране, за решења g_1 и g_2 важи:

$$\begin{aligned} g_1 + g_2 &= \phi_1, \\ g_1 g_2 &= -\phi_2. \end{aligned}$$

У зависности од знака параметара ϕ_1 и ϕ_2 можемо видети ког знака је решење карактеристичне једначине које је веће по модулу. Такође, битно је да ли су решења карактеристичне једначине реална или конјуговано - комплексна.

На основу свега тога, добијамо како у неким случајевима изгледа корелограм овог модела (Слика 1).



Слика 6:

5.6.4 Природа ауторегресионог модела у зависности од решења карактеристичне једначине

У досадашњим разматрањима и примерима из претходне лекције могли смо да закључимо следеће ствари о вези између стационарности ауторегресионих модела и решења карактеристичне једначине тог модела:

- модел $AR(1)$ је стационаран ако је $|\phi_1| = |g_1| < 1$;
- ако је $|\phi_1| = |g_1| = 1$, модел $AR(1)$ није стационаран, али се, погодно изабраним диференцирањем, може свести на стационарни модел;
- ако је $|\phi_1| = |g_1| > 1$, модел $AR(1)$ није стационаран, нити се диференцирањем може свести на стационаран.

Такође смо закључили да је $AR(p)$ модел стационаран ако је $|g_1|, |g_2|, \dots, |g_p| < 1$.

Ове особине настављају да важе и за модел $AR(p)$, произвољног реда $p \in \mathbb{N}$, што ћемо сада прецизније формулисати.

Теорема 5.2. *За решења $g_1, g_2, \dots, g_p$ карактеристичне једначине $AR(p)$ модела:*

$$g^p - \phi_1 g^{p-1} - \dots - \phi_p = 0$$

и одговарајући $AR(p)$ модел важи:

1. Ако је

$$|g_1|, |g_2|, \dots, |g_p| < 1$$

одговарајући модел је стационаран.

2. Ако је

$$|g_1|, |g_2|, \dots, |g_p| \leq 1, \quad (\exists g_i) |g_i| = 1$$

*одговарајући модел је нестационаран (каже се и **серија са јединичним кореном**). Та врста нестационарности се може отклонити диференцирањем:*

(a) У случају

$$(\exists g_i) g_i = 1, \quad g_1, g_2, \dots, g_p \leq 1$$

треба применити обично диференцирање, онолико пута колико има решења карактеристичне једначине која су једнака 1.

(б) У случају

$$(\exists g_i) g_i = -1,$$

*у питању је **сезонски јединични корен** и треба применити сезонско диференцирање са кораком 2. Диференцирање треба да применимо онолико пута колико има оваквих корена.*

3. Ако

$$(\exists g_i) |g_i| > 1,$$

*онда је у питању нестационарна (**експлозивна**) серија, која се не може диференцирањем свести на стационарну. За такву серију кажемо и да је **под утицајем адитивног дејства растућих случајних шокова**.*

Пример 5.8. *Серија*

$$X_t = \frac{1}{6}X_{t-1} + \frac{1}{6}X_{t-2} + e_t$$

је стационарна, јер је њена карактеристична једначина

$$6g^2 - g - 1 = 0,$$

а оба решења су по модулу мања од 1.

Серија

$$X_t = 2X_{t-1} - X_{t-2} + e_t$$

је серија са (двоструким) јединичним кореном, јер је њена карактеристична једначина

$$g^2 - 2g + 1 = 0,$$

чија су решења $g_1 = g_2 = 1$.

Серија

$$X_t = 5X_{t-1} - 7X_{t-2} + 3X_{t-3} + e_t$$

је експлозивна, јер је њена карактеристична једначина

$$g^3 - 5g^2 + 7g - 3 = 0,$$

чија су решења $g_1 = g_2 = 1, g_3 = 3$.

Пример 5.9. *Модел $AR(p)$ код кога је тачно s решења карактеристичне једначине једнако 1 може се приказати у облику*

$$(1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - \dots - \alpha_{p-s} L^{p-s}) (1 - L)^s X_t = e_t,$$

где су $\alpha_1, \dots, \alpha_{p-s}$ некакви коефицијенти, а у полиному $1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - \dots - \alpha_{p-s} L^{p-s}$ нема јединичних корена.

Видимо да се модел може записати и на следећи начин:

$$(1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - \dots - \alpha_{p-s} L^{p-s}) \Delta^s X_t = e_t,$$

што значи да је $Y_t = \Delta^s X_t$ стационарна серија.

Пример 5.10. *Модел $AR(p)$ код кога је тачно једно решење карактеристичне једначине једнако -1, а преостала решења по модулу мања од 1 може се приказати у облику*

$$(1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - \dots - \alpha_{p-1} L^{p-1}) (1 + L) X_t = e_t,$$

где су $\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}$ некакви коефицијенти, а у полиному $1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - \dots - \alpha_{p-1} L^{p-1}$ нема јединичних корена.

Множењем једначине модела са $(1 - L)$ добија се:

$$\begin{aligned} (1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - \dots - \alpha_{p-1} L^{p-1}) (1 + L)(1 - L) X_t &= (1 - L) e_t, \\ (1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - \dots - \alpha_{p-1} L^{p-1}) (1 - L^2) X_t &= (1 - L) e_t, \\ (1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - \dots - \alpha_{p-1} L^{p-1}) \Delta_2 X_t &= (1 - L) e_t. \end{aligned}$$

па закључујемо да је сезонски диференцирана серија стационарна.

5.7 Модели покретних просека

Сад ћемо детаљније размотрити моделе покретних просека. Модел реда q , $MA(q)$ је:

$$X_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \dots - \theta_q e_{t-q},$$

или, другачије записано:

$$X_t = (1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q) e_t.$$

$\theta_1, \dots, \theta_q$ су **параметри покретних просека**.

Слично као код ауторегресионих модела, моделима покретних просека можемо доделити карактеристичну једначину:

$$g^q - \theta_1 g^{q-1} - \dots - \theta_q = 0.$$

Директно из једначине модела можемо да видимо следеће особине модела покретних просека:

1. $E(X_t) = 0$
2. модел $MA(q)$ је специјални случај линеарног процеса (са коначно много коефицијената различитих од нуле);
3. X_t је увек слабо стационарна серија, што се види из

$$D(X_t) = E(X_t^2) = \sigma^2(1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2) < +\infty.$$

5.7.1 Модел покретних просека првог реда ($MA(1)$)

Модел је:

$$X_t = e_t - \theta_1 e_{t-1},$$

или, другачије записано

$$X_t = (1 - \theta_1 L) e_t.$$

Сад ћемо извести основне особине овог модела.

1. услов инвертибилности:

Услов инвертибилности значи да је серију могуће приказати као $AR(\infty)$ модел. Овај услов можемо извести на два начина.

1. начин: Из једначине модела добијамо

$$e_t = X_t + \theta_1 e_{t-1}.$$

Расписивањем модела „по дубини” добијамо:

$$\begin{aligned} X_t &= e_t - \theta_1 e_{t-1} \\ &= e_t - \theta_1 (X_{t-1} + \theta_1 e_{t-2}) = e_t - \theta_1^2 e_{t-2} - \theta_1 X_{t-1} \\ &= e_t - \theta_1^2 (X_{t-2} + \theta_1 e_{t-3}) - \theta_1 X_{t-1} = e_t - \theta_1 X_{t-1} - \theta_1^2 X_{t-2} - \theta_1^3 e_{t-3} \\ &= \dots \\ &= e_t - \theta_1 X_{t-1} - \theta_1^2 X_{t-2} - \theta_1^3 X_{t-3} - \dots \end{aligned}$$

Последњи ред конвергира ка некој случајној величини ако је

$$|\theta_1| < 1 \quad (\text{услов инвертибилности})$$

2. начин:

Из записа

$$X_t = (1 - \theta_1 L)e_t$$

закључујемо да је модел инвертибилан ако постоји $(1 - \theta_1 L)^{-1}$, а услов за то је $|\theta_1| < 1$.

2. **запис у облику $AR(\infty)$ модела** (ако важи услов инвертибилности):

Из

$$X_t = (1 - \theta_1 L)e_t$$

добивамо

$$e_t = (1 - \theta_1 L)^{-1} X_t = (1 + \theta_1 L + \theta_1^2 L^2 + \dots) X_t = X_t + \theta_1 X_{t-1} + \theta_1^2 X_{t-2} + \dots$$

Дакле, одговарајући $AR(\infty)$ процес је:

$$X_t + \theta_1 X_{t-1} + \theta_1^2 X_{t-2} + \dots = e_t.$$

3. **аутоковаријациона функција:**

$$\begin{aligned} \gamma_k &= E(X_t X_{t-k}) \\ &= E(e_t - \theta_1 e_{t-1}) \cdot (e_{t-k} - \theta_1 e_{t-k-1}) \\ &= \begin{cases} E(e_t - \theta_1 e_{t-1})^2, & k = 0 \\ E(e_t - \theta_1 e_{t-1})(e_{t-1} - \theta_1 e_{t-2}), & k = 1 \\ E(e_t - \theta_1 e_{t-1})(e_{t-k} - \theta_1 e_{t-k-1}), & k > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} (1 + \theta_1^2)\sigma^2, & k = 0 \\ -\theta_1\sigma^2, & k = 1 \\ 0, & k > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

4. **аутокорелациона функција:**

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ -\frac{\theta_1}{1+\theta_1^2}, & k = 1 \\ 0, & k > 1. \end{cases}$$

Можемо да приметимо да $\rho_1 = -\frac{\theta_1}{1+\theta_1^2} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, као и да аутокорелациони коефицијенти не одређују једнозначно $MA(1)$ модел (јер се добија иста вредност ρ_1 за моделе са параметрима θ_1 и $\frac{1}{\theta_1}$).

5. **корелограм:** У зависности од знака параметра θ_1 , корелограм може да изгледа на два начина (нацртати!).

Видимо да, у оба случаја, постоји тачно један аутокорелациони коефицијент различит од нуле (за $k > 0$) и да се на основу тога може препознати ред модела (што је врло битно код препознавања модела у пракси!).

5.7.2 Модел покретних просека реда q ($MA(q)$)

Модел:

$$X_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \dots - \theta_q e_{t-q},$$

Сад ћемо детаљније размотрити особине модела:

1. **услов инвертибилности:** Из записа

$$X_t = (1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \dots - \theta_q L^q) e_t,$$

тј.

$$X_t = (1 - g_1 L)(1 - g_2 L) \dots (1 - g_q L) e_t,$$

где су $g_1, \dots, g_q$ решења одговарајуће карактеристичне једначине, можемо да видимо да ће овај модел бити инвертибилан ако:

$$(\exists)(1 - g_1 L)^{-1}, (\exists)(1 - g_2 L)^{-1}, \dots, (\exists)(1 - g_q L)^{-1},$$

а услов за то је

$$|g_1|, |g_2|, \dots, |g_q| < 1 \quad (\text{услов инвертибилности})$$

2. **аутоковаријациона функција:** Слично као код $MA(1)$ модела, добијамо:

$$\begin{aligned} \gamma_k &= E(X_t X_{t-k}) \\ &= E(e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \dots - \theta_q e_{t-q})(e_{t-k} - \theta_1 e_{t-k-1} - \theta_2 e_{t-k-2} - \dots - \theta_q e_{t-k-q}) \\ &= \begin{cases} (1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2)\sigma^2, & k = 0 \\ (-\theta_1 + \theta_1\theta_2 + \theta_2\theta_3 \dots + \theta_{q-1}\theta_q)\sigma^2, & k = 1 \\ (-\theta_2 + \theta_1\theta_3 + \theta_2\theta_3 \dots + \theta_{q-2}\theta_q)\sigma^2, & k = 2 \\ \dots, & \\ (-\theta_{q-1} + \theta_1\theta_q)\sigma^2, & k = q-1 \\ -\theta_q\sigma^2, & k = q \end{cases} \end{aligned}$$

3. **аутокорелациона функција:**

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \frac{-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2}, & k = 1, 2, \dots, q \\ 0, & k > q \end{cases}$$

4. **корелограм:** Корелограм (осим $\rho_0 = 1$) има још тачно q „цртица” различитих од нуле, на основу чега се може препознати ред овог модела.

Модел покретних просека имају још једну занимљиву особину, коју ћемо формулисати као теорему.

Теорема 5.3. *Ако је $\{X_t\}$ слабо стационарна, q - корелисана временска серија, за коју важи $E(X_t) = 0$, онда је $\{X_t\}$ баш $MA(q)$ процес.*

Ово је специјалан случај Волдове теореме о разлагању.

5.8 Ауторегресиони модели покретних просека ($ARMA$)

Ауторегресиони модели покретних просека, на неки начин, представљају комбинацију AR и MA модела (имају обе компоненте).

5.8.1 Ауторегресиони модел покретних просека првог реда ($ARMA(1, 1)$)

Модел је:

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} = e_t - \theta_1 e_{t-1},$$

или

$$(1 - \phi_1 L)X_t = (1 - \theta_1 L)e_t.$$

Особине модела:

1. **услови стационарности и инвертибилности:** Код $ARMA$ модела услов стационарности зависи од AR компоненте, а услов инвертибилности од MA компоненте. То у овом случају значи:

- услов стационарности: треба да постоји оператор $(1 - \phi_1 L)^{-1}$, а услов за то је $|\phi_1| < 1$;
- услов инвертибилности: треба да постоји оператор $(1 - \theta_1 L)^{-1}$, а услов за то је $|\theta_1| < 1$.

2. **запис као $AR(\infty)$ (ако важи услов инвертибилности):**

$$\begin{aligned} e_t &= (1 - \theta_1 L)^{-1}(1 - \phi_1 L)X_t \\ &= (1 - \phi_1 L)(1 + \theta_1 L + \theta_1^2 L^2 + \theta_1^3 L^3 + \dots)X_t \\ &= (1 + (\theta_1 - \phi_1)L + \theta_1(\theta_1 - \phi_1)L^2 + \theta_1^2(\theta_1 - \phi_1)L^3 + \dots)X_t \end{aligned}$$

Дакле, коефицијенти одговарајућег $AR(\infty)$ модела су:

$$\psi_k = \theta_1^{k-1}(\theta_1 - \phi_1), \quad k = 1, 2, \dots$$

3. **запис као $MA(\infty)$ (ако важи услов стационарности):**

$$\begin{aligned} X_t &= (1 - \phi_1 L)^{-1}(1 - \theta_1 L)e_t \\ &= (1 - \theta_1 L)(1 + \phi_1 L + \phi_1^2 L^2 + \phi_1^3 L^3 + \dots)e_t \\ &= (1 + (\phi_1 - \theta_1)L + \phi_1(\phi_1 - \theta_1)L^2 + \phi_1^2(\phi_1 - \theta_1)L^3 + \dots)e_t \end{aligned}$$

Дакле, коефицијенти одговарајућег $MA(\infty)$ модела су:

$$\psi_k = \phi_1^{k-1}(\phi_1 - \theta_1), \quad k = 1, 2, \dots$$

4. **аутоковаријациона функција:** Из једнакости

$$E(X_t X_{t-k}) = E(\phi_1 X_{t-1} X_{t-k}) + E(e_t X_{t-k}) - E(\theta_1 e_{t-1} X_{t-k})$$

добива се

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \begin{cases} \sigma^2, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} - \begin{cases} \sigma^2 \theta_1 (\phi_1 - \theta_1), & k = 0 \\ \theta_1 \sigma^2, & k = 1 \\ 0, & k > 1 \end{cases}$$

5. аутокорељациона функција:

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \frac{(\phi_1 - \theta_1)(1 - \phi_1\theta_1)}{1 - 2\phi_1\theta_1 + \theta_1^2}, & k = 1 \\ \phi_1\rho_{k-1}, & k > 1 \end{cases}$$

5.8.2 Ауторегресиони модел покретних просека реда (p, q) ($ARMA(p, q)$)

Модел:

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \dots - \theta_q e_{t-q},$$

или

$$(1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p) X_t = (1 - \theta_1 L - \dots - \theta_q L^q) e_t.$$

Претпоставља се да полиноми

$$\Phi(L) = 1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p \text{ и } \Theta(L) = 1 - \theta_1 L - \dots - \theta_q L^q$$

немају заједничких фактора (јер би се у супротном добио једноставнији модел, нижег реда).

Особине модела:

1. AR и MA су специјални случајеви $ARMA$ модела:

$$AR(p) = ARMA(p, 0), \quad MA(q) = ARMA(0, q)$$

2. услови стационарности и инвертибилности: Модел је стационаран ако постоји оператор $\Phi(L)^{-1}$, а инвертибилан ако постоји оператор $\Theta(L)^{-1}$.

3. аутоковаријациона функција: Из једнакости

$$E(X_t X_{t-k}) = E(\phi_1 X_{t-1} X_{t-k}) + \dots + E(\phi_p X_{t-p} X_{t-k}) + E(e_t X_{t-k}) - E(\theta_1 e_{t-1} X_{t-k}) - \dots - E(\theta_q e_{t-q} X_{t-k})$$

добија се

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} + \begin{cases} \sigma^2, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} - \begin{cases} \sigma^2 \theta_1 (\phi_1 - \theta_1), & k = 0 \\ \theta_1 \sigma^2, & k = 1 \\ 0, & k > 1 \end{cases} - \begin{cases} \text{нешто}, & k \leq q \\ 0, & k > q \end{cases}$$

За $k > q$:

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p}$$

4. аутокорељациона функција:

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \dots + \phi_p \rho_{k-p}, \quad k > q$$

Првих q аутокорељационих коефицијената зависи од параметара обе компоненте (AR и MA), а за $k > q$ аутокорељациона функција зависи само од параметара AR компоненте и понаша се као код AR модела.

Пример 5.11. За $ARMA(2, 1)$ модел:

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} = e_t - \theta_1 e_{t-1}$$

се добија рекурзивна веза

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \begin{cases} \sigma^2, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} - \begin{cases} \sigma^2 \theta_1 (\phi_1 - \theta_1), & k = 0 \\ \theta_1 \sigma^2, & k = 1 \\ 0, & k > 1 \end{cases}.$$

Кад заменимо $k = 0, 1, 2$ у претходну релацију и искористимо $\gamma_{-k} = \gamma_k$, добијамо систем једначина

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \sigma^2(1 - \theta_1(\phi_1 - \theta_1)) \\ \gamma_1 &= \phi_1 \gamma_0 + \phi_2 \gamma_1 - \sigma^2 \theta_1 \\ \gamma_2 &= \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_0. \end{aligned}$$

Добија се:

$$\begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 - 1 & 0 \\ -1 & \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_2 & \phi_1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \sigma^2 \cdot \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_1(\phi_1 - \theta_1) - 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

За $\phi_2 \neq -1, \phi_2 \pm \phi_1 \neq 1$ се добија:

$$\begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \frac{\sigma^2}{(1 + \phi_2)(1 - \phi_1 - \phi_2)(1 + \phi_1 - \phi_2)} \cdot \begin{pmatrix} -\theta_1 \phi_1 (2 - \phi_2^2 + \phi_2) + \theta_1^2 (1 - \phi_2^2) + 1 - \phi_2^2 \\ \theta_1 (\phi_2 - \phi_1^2 - 1) + \phi_1 (\theta_1^2 + 1) \\ \phi_2 \theta_1 (\phi_2 - \phi_1^2 - 1) + \phi_2 \phi_1 (\theta_1^2 + 1) \end{pmatrix}.$$

Даље је

$$\begin{pmatrix} \rho_0 \\ \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\theta_1 (\phi_2 - \phi_1^2 - 1) + \phi_1 (\theta_1^2 + 1)}{-\theta_1 \phi_1 (2 - \phi_2^2 + \phi_2) + \theta_1^2 (1 - \phi_2^2) + 1 - \phi_2^2} \\ \frac{\phi_2 \theta_1 (\phi_2 - \phi_1^2 - 1) + \phi_2 \phi_1 (\theta_1^2 + 1)}{-\theta_1 \phi_1 (2 - \phi_2^2 + \phi_2) + \theta_1^2 (1 - \phi_2^2) + 1 - \phi_2^2} \end{pmatrix},$$

а вредности $\rho_3, \rho_4, \dots$ се добијају из рекурентне везе $\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2}$, тј. множењем претходних вредности са ϕ_1 и ϕ_2 и њиховим сабирањем. Видимо да аутокоре-
лациона функција надаље зависи од θ_1 само кроз почетну вредност ρ_1 , тј. надаље се понаша као код AR модела.

5.9 Парцијална аутокореациона функција

У претходним лекцијама смо видели да је на основу вредности аутокореационих коефицијената (тј. нацртаног корелограма) могуће одредити ред MA модела, али не и AR модела. Зато се уводи **парцијална аутокореациона функција**, на основу које је могуће одредити ред AR модела.

Парцијални аутокореациони коефицијент са кашњењем k , ϕ_{kk} , мери степен корелације између чланова X_t и X_{t-k} , при чему је елиминисан утицај чланова $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-k+1}$.

То се може формално дефинисати на два начина:

1. приступ регресионе анализе: Формирају се линеарни модели

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \cdots + \alpha_{k-1} X_{t-k+1} + \epsilon^{(1)}$$

и

$$X_{t-k} = \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \cdots + \beta_{k-1} X_{t-k+1} + \epsilon^{(2)}$$

Када се параметри α и β оцене методом најмањих квадрата, добијају се $\hat{X}_t$ и $\hat{X}_{t-k}$. Тада разлике

$$X_t - \hat{X}_t \text{ и } X_{t-k} - \hat{X}_{t-k}$$

представљају „делове” X_t и X_{t-k} из којих су елиминисани утицаји чланова $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-k+1}$. Тада је

$$\phi_{kk} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{cov}(X_t - \hat{X}_t, X_{t-k} - \hat{X}_{t-k})}{\sqrt{D(X_t - \hat{X}_t)} \cdot \sqrt{D(X_{t-k} - \hat{X}_{t-k})}}, \quad k = 2, 3, \dots$$

2. приступ анализе временских серија:

ϕ_{kk} се дефинише као k -ти ауторегресиони параметар у AR моделу

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_k X_{t-k} + e_t,$$

тј.

$$\phi_{kk} \stackrel{\text{def}}{=} \phi_k.$$

У пракси, ϕ_{kk} се рачуна из *Yule – Walker*-овог система једначина:

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_{k-2} \\ & & \cdots & & & \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \cdots \\ \phi_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \cdots \\ \rho_k \end{bmatrix}.$$

Добија се:

$$\phi_{kk} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_{k-2} \\ & & \cdots & & & \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_1 & \rho_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_{k-2} \\ & & \cdots & & & \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

За $k = 1$ се добија:

$$\phi_{11} = \rho_1,$$

за $k = 2$:

$$\phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2},$$

а за $k = 3$:

$$\phi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \dots$$

Низ $\phi_{11}, \phi_{22}, \phi_{33}, \dots$ се зове **парцијална аутокорелациона функција**, а њен графички приказ је **парцијални корелограм**.

Ако се $\hat{\phi}_{11}, \hat{\phi}_{22}, \hat{\phi}_{33}, \dots$ израчунају на основу оцењених вредности $\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \hat{\rho}_3, \dots$ добија се **узорачки парцијални корелограм**.

5.9.1 Парцијална аутокорелациона функција AR модела

- $AR(1)$ модел:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + e_t,$$

$$\rho_k = \phi_1^k, k = 1, 2, \dots$$

За $k = 1$:

$$\phi_{11} = \rho_1 = \phi_1,$$

за $k = 2$:

$$\phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \frac{\phi_1^2 - \phi_1^2}{1 - \phi_1^2} = 0,$$

а за $k = 3$:

$$\phi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \phi_1 & \phi_1 \\ \phi_1 & 1 & \phi_1^2 \\ \phi_1^2 & \phi_1 & \phi_1^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \phi_1 & \phi_1^2 \\ \phi_1 & 1 & \phi_1 \\ \phi_1^2 & \phi_1 & 1 \end{vmatrix}} = 0$$

Ако се овај поступак настави, добија се да важи

$$\phi_{kk} = 0, \quad k > 1.$$

- $AR(2)$ модел:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + e_t,$$

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2}, k = 1, 2, \dots$$

$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}, \quad \rho_2 = \frac{\phi_1^2}{1 - \phi_2} + \phi_2$$

За $k = 1$:

$$\phi_{11} = \rho_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2},$$

за $k = 2$:

$$\phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{\phi_1^2}{1-\phi_2} + \phi_2 - \frac{\phi_1^2}{(1-\phi_2)^2}}{1 - \frac{\phi_1^2}{(1-\phi_2)^2}} = \dots = \phi_2,$$

а за $k = 3$:

$$\phi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \phi_1 \cdot 1 + \phi_2 \cdot \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \phi_1 \cdot \rho_1 + \phi_2 \cdot 1 \\ \rho_2 & \rho_1 & \phi_1 \cdot \rho_2 + \phi_2 \cdot \rho_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = 0$$

Ако се овај поступак настави, добија се да важи

$$\phi_{kk} = 0, \quad k > 2.$$

- $AR(p)$ модел:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + e_t,$$

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \dots + \phi_p \rho_{k-p}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Закључујемо да у овом случају важи

$$\phi_{kk} \neq 0 \text{ за } k = 1, 2, \dots, p, \quad \phi_{pp} = \phi_p, \quad \phi_{kk} = 0 \text{ за } k > p.$$

Дакле, за AR моделе важи да су парцијални аутокорељациони коефицијенти различити од нуле смо за кашњења мања или једнака реду модела, па се на основу изгледа парцијалног корелограма може одредити ред модела.

5.9.2 Парцијална аутокорељациона функција MA модела

$MA(1)$ модел:

$$X_t = e_t - \theta_1 e_{t-1}$$

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ -\frac{\theta_1}{1+\theta_1^2}, & k = 1 \\ 0, & k > 1 \end{cases}$$

За $k = 1$:

$$\phi_{11} = \rho_1 = -\frac{\theta_1}{1+\theta_1^2} = -\frac{\theta_1(1-\theta_1^2)}{1-\theta_1^4},$$

за $k = 2$:

$$\phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \frac{0 - \frac{\theta_1^2}{(1+\theta_1^2)^2}}{1 - \frac{\theta_1^2}{(1+\theta_1^2)^2}} = \dots = -\frac{\theta_1^2(1-\theta_1^2)}{1-\theta_1^6}$$

Даље се може показати (индукцијом) да за произвољно $k > 0$ важи

$$\phi_{kk} = -\frac{\theta_1^k(1-\theta_1^2)}{1-\theta_1^{2(k+1)}}$$

Закључујемо да код MA модела има бесконачно много парцијалних аутокорељационих коефицијената различитих од нуле (што није чудно, јер MA моделима одговара бесконачна AR репрезентација).

5.9.3 Парцијална аутокорелациона функција $ARMA$ модела

Може се показати да за $ARMA(p, q)$ модел важи:

- Првих p парцијалних аутокорелационих коефицијената зависе од параметара обе компоненте (AR и MA).
- За $k > p$ ϕ_{kk} зависи само од параметара MA компоненте и понаша се као код MA модела.

6 Прогнозирање стационарних временских серија

Један од најважнијих циљева анализе временских серија је прогнозирање будућих вредности серије на основу једне њене реализације, која, наравно, у пракси има коначан број опсервација.

6.1 Прогноза са минималном средње квадратном грешком

Ово је општа прича, која се односи на било какве временске серије (а не само на стационарне).

Нека је $\{X_t, t = 1, 2, \dots\}$ временска серија, $S = \{1, 2, \dots, n\}$ скуп индекса и $t \notin S$. Циљ је одредити **прогнозу нивоа серије у тренутку t на основу вредности серије у интервалу S** , тј.

$$\hat{X}_t = f(X_s, s \in S).$$

Оно што не можемо да одредимо, али често можемо да проценимо, је **грешка прогнозе у тренутку t** :

$$\hat{e}_t = X_t - \hat{X}_t.$$

Кад се одређује прогноза, заправо треба одредити шта је у том случају функција f , а то може да се ради на различите начине. Ми ћемо овде разматрати прогнозу одређену по принципу **минималне средње квадратне грешке**. У том случају, циљ је одредити функцију f , такву да израз

$$E(X_t - f(X_s, s \in S))^2$$

буде минималан.

Теорема 6.1. Нека је $\mathcal{F}_S$ σ -алгебра генерисана случајним величинама $X_s, s \in S$. Тада важи

$$\hat{X}_t = f(X_s, s \in S) = E(X_t | \mathcal{F}_S).$$

Доказ. Нека је $f = f(X_s, s \in S)$. Претпоставља се да је f мерљиво у односу на $\mathcal{F}_S$, а с друге стране, и $E(X_t | \mathcal{F}_S)$ је мерљиво у односу на $\mathcal{F}_S$ (особина условног математичког очекивања). Даље, важи

$$\begin{aligned} E(X_t - f)^2 &= E(X_t - E(X_t | \mathcal{F}_S) + E(X_t | \mathcal{F}_S) - f)^2 \\ &= E(X_t - E(X_t | \mathcal{F}_S))^2 + E(E(X_t | \mathcal{F}_S) - f)^2 \\ &\quad + 2E((X_t - E(X_t | \mathcal{F}_S))(E(X_t | \mathcal{F}_S) - f)) \end{aligned}$$

С друге стране, за мешовити члан важи

$$\begin{aligned}
E((X_t - E(X_t|\mathcal{F}_S))(E(X_t|\mathcal{F}_S) - f)) &= E(E((X_t - E(X_t|\mathcal{F}_S))(E(X_t|\mathcal{F}_S) - f))|\mathcal{F}_S)) \\
&= E(E(X_t|\mathcal{F}_S) - f)E(X_t - E(X_t|\mathcal{F}_S)|\mathcal{F}_S) \\
&= E(E(X_t|\mathcal{F}_S) - f)(E(X_t|\mathcal{F}_S) - E(X_t|\mathcal{F}_S)) \\
&= E((E(X_t|\mathcal{F}_S) - f) \cdot 0) = 0
\end{aligned}$$

Из тога се добија

$$E(X_t - f)^2 = E(X_t - E(X_t|\mathcal{F}_S))^2 + E(E(X_t|\mathcal{F}_S) - f)^2.$$

Оба члана су ненегативна, па да би збир био минималан мора да важи

$$f = E(X_t|\mathcal{F}_S).$$

□

Напомена 6.1. При прогнозирању серија методом најмање средње квадратне грешке често се користе следеће особине условног математичког очекивања (X је произвољна случајна величина, а $\mathcal{F}$ произвољна σ -алгебра):

1. $E(X|\mathcal{F})$ је случајна величина која је мерљива у односу на σ -алгебру $\mathcal{F}$.
2. $E(E(X|\mathcal{F})) = E(X)$
3. Ако је X мерљиво у односу на $\mathcal{F}$, онда је $E(X|\mathcal{F}) = X$.
4. Ако је X независно од $\mathcal{F}$, онда је $E(X|\mathcal{F}) = E(X)$.

Теорема 6.2. За прогнозу са минималном средње квадратном грешком, $\hat{X}_t = f(X_s, s \in S) = E(X_t|\mathcal{F}_S)$, важи:

1. $\hat{X}_t$ је непристрасна оцена нивоа X_t .
2. За грешку прогнозе, $\hat{e}_t$, важи $E(\hat{e}_t) = 0$.
3. $\hat{e}_t$ је некорелисано са сваким $X_s, s \in S$.

Доказ. 1. $E(\hat{X}_t) = E(E(X_t|\mathcal{F}_S)) = E(X_t)$

2. Следи из 1.

3.

$$\begin{aligned}
cov(\hat{e}_t, X_s) &= E(\hat{e}_t \cdot (X_s - E(X_s))) \\
&= E(\hat{e}_t \cdot X_s) - E(X_s) \cdot E(\hat{e}_t) \\
&= E(\hat{e}_t \cdot X_s) \\
&= E((X_t - E(X_t|\mathcal{F}_S)) \cdot X_s) \\
&= E(E((X_t - E(X_t|\mathcal{F}_S)) \cdot X_s|\mathcal{F}_S)) \\
&= E(X_s \cdot (E(X_t|\mathcal{F}_S) - E(X_t|\mathcal{F}_S))) \\
&= E(0) = 0
\end{aligned}$$

□

Често се σ -алгебра $\mathcal{F}_S$ означава са $\mathcal{F}_n$ (индекс је број чланова реализоване серије, тј. последњи регистровани временски тренутак). Такође, и сама прогноза (на основу реализоване серије до тренутка n) се може означити мало другачије :

$$\begin{aligned}\hat{X}_{n+1} &= \hat{X}_n(1) \\ \hat{X}_{n+2} &= \hat{X}_n(2) \\ &\dots \\ \hat{X}_{n+h} &= \hat{X}_n(h) \\ &\dots\end{aligned}$$

У том случају се h зове **хоризонт предвиђања**. Доњи индекс код прогнозе означава дужину реализоване серије. Ми ћемо надаље користити овакве ознаке.

6.2 Прогноза за линеарни процес

Сад прелазимо на практично израчунавање прогнозе за стационарне временске серије. Први случај који ћемо разматрати је линеарни процес, који, као што знамо, обухвата све могуће моделе стационарних серија.

При прогнозирању, користимо чињеницу да за члан белог шума e_n важи

$$E(e_n|\mathcal{F}_m) = \begin{cases} e_n, & m \geq n \\ E(e_n) = 0, & m < n. \end{cases}$$

„Народски речено”, члан белог шума се може изразити као линеарна комбинација некаквих X -ова, па зато припада σ -алгебри чији су генератори ти X -ови. С друге стране, пошто су чланови белог шума некорелисане случајне величине, онда је e_n независно од σ -алгебре генерисане „ранијим” X -овима.

$$\begin{aligned}\hat{X}_n(h) &= E(e_{n+h} + \psi_1 e_{n+h-1} + \dots + \psi_{h-1} e_{n+1} + \psi_h e_n + \psi_{h+1} e_{n-1} + \dots | \mathcal{F}_n) \\ &= E(e_{n+h} | \mathcal{F}_n) + \psi_1 E(e_{n+h-1} | \mathcal{F}_n) + \psi_2 E(e_{n+h-2} | \mathcal{F}_n) + \\ &\quad \dots + \psi_{h-1} E(e_{n+1} | \mathcal{F}_n) + \psi_h E(e_n | \mathcal{F}_n) + \psi_{h+1} E(e_{n-1} | \mathcal{F}_n) + \dots \\ &= E(e_{n+h}) + \psi_1 E(e_{n+h-1}) + \psi_2 E(e_{n+h-2}) + \\ &\quad \dots + \psi_{h-1} E(e_{n+1}) + \psi_h e_n + \psi_{h+1} e_{n-1} + \dots \\ &= 0 + \psi_1 \cdot 0 + \psi_2 \cdot 0 + \dots + \psi_{h-1} \cdot 0 + \psi_h e_n + \psi_{h+1} e_{n-1} + \dots \\ &= \psi_h e_n + \psi_{h+1} e_{n-1} + \dots\end{aligned}$$

Дакле, прогноза за линеарни процес за h корака унапред, на основу реализације до тренутка n је

$$\hat{X}_n(h) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{h+j} e_{n-j}.$$

Одговарајућа грешка прогнозе је

$$\hat{e}_n(h) = X_{n+h} - \hat{X}_n(h) = e_{n+h} + \psi_1 e_{n+h-1} + \dots + \psi_{h-1} e_{n+1} = \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j e_{n+h-j}.$$

6.2.1 Закључак

Када је прогноза добра и како то да проценимо? Можемо да одредимо дисперзију грешке прогнозе. У овом случају:

$$D(\hat{e}_n(h)) = E\left(\sum_{j=0}^{h-1} \psi_j e_{n+h-j}\right)^2 = \sigma^2 \cdot \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^2 < D(X_t) = D(X_{n+h})$$

Добили смо да је дисперзија грешке прогнозе мања од дисперзије саме серије, што значи да је прогнозом „описан” један део варијација које се појављују у серији. То значи да прогноза има смисла. Дакле, **прогнозирање је успешно ако је дисперзија грешке прогнозе мања од дисперзије серије**. Колико мања? У литератури се појављује препорука да се прогноза прихвати као успешна ако важи

$$\frac{D(\hat{e}_n(h))}{D(X_{n+h})} \leq 0.8,$$

али истраживач може, у конкретном случају, поступити и другачије.

У случају линеарног процеса, иако је прогноза, формално, добра, прогнозирање ипак нема никакав практични значај. То је зато што у пракси никад немамо реализацију серије бесконачне дужине (“од минус бесконачно до неког момента”). Овај пример смо разматрали из чисто теоријских разлога. Сада ћемо одредити прогнозу за AR , MA и $ARMA$ моделе, која, напротив, има практичну примену.

6.3 Прогноза за MA моделе

6.3.1 Прогноза за $MA(1)$ модел

Модел са којим се ради је

$$X_t = e_t - \theta_1 e_{t-1},$$

где је $\{e_t\}$ бели шум. Претпостављамо да важи услов инвертибилности, а за овај модел то значи $|\theta_1| < 1$.

Напомена 6.2. У остатку текста подразумева се да за све моделе важе услови инвертибилности (или стационарности) и то неће бити посебно наглашавано. Ови услови нам омогућавају да одредимо квалитет добијене прогнозе.

Рачунамо прогнозу серије за h корака унапред (хоризонт предвиђања је h), на основу реализације серије до тренутка n ($S = \{1, 2, \dots, n\}$). У том случају је

$$\mathcal{F}_S = \mathcal{F}_n = \sigma\{X_1, \dots, X_n\}.$$

Прогноза за један корак унапред је

$$\begin{aligned} \hat{X}_n(1) &= E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) \\ &= E(e_{n+1} - \theta_1 e_n | \mathcal{F}_n) \\ &= E(e_{n+1}) - \theta_1 e_n \\ &= -\theta_1 e_n \end{aligned}$$

Одговарајућа грешка прогнозе је

$$\hat{e}_n(1) = X_{n+1} - \hat{X}_n(1) = e_{n+1}$$

(грешка је оно што је „испало” из прогнозе). Прогноза за два корака унапред је, по истом принципу:

$$\begin{aligned}\hat{X}_n(2) &= E(X_{n+2}|\mathcal{F}_n) \\ &= E(e_{n+2} - \theta_1 e_{n+1}|\mathcal{F}_n) \\ &= E(e_{n+2}) - \theta_1 E(e_{n+1}) \\ &= 0\end{aligned}$$

Сад можемо да закључимо да важи

$$\hat{X}_n(h) = 0, \text{ за } h > 1,$$

јер ће чланови белог шума који се појављују у изразу „ићи све даље у будућност” кад h расте. Одговарајућа грешка прогнозе је

$$\hat{e}_n(h) = X_{n+h} - \hat{X}_n(h) = X_{n+h}, \text{ за } h > 1,$$

а њена дисперзија је

$$D(\hat{e}_n(h)) = D(X_{n+h})$$

Дакле, ова прогноза није прихватљива.

6.3.2 Прогноза за $MA(q)$ модел, $q > 1$

Модел са којим се ради је

$$X_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \cdots - \theta_q e_{t-q}.$$

Прогноза за један корак унапред је

$$\begin{aligned}\hat{X}_n(1) &= E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \\ &= E(e_{n+1} - \theta_1 e_n - \cdots - \theta_q e_{n-q+1}|\mathcal{F}_n) \\ &= E(e_{n+1}) - \theta_1 e_n - \cdots - \theta_q e_{n-q+1} \\ &= -\theta_1 e_n - \cdots - \theta_q e_{n-q+1}\end{aligned}$$

Може се приметити да, кад се рачуна прогноза за сваки следећи корак, све више чланова белог шума „одлази у будућност”, тј. „испада” из прогнозе. Због тога ће важити

$$\hat{X}_n(h) = 0, \text{ за } h > q$$

и тада ова прогноза нема смисла.

6.3.3 Закључак

Прогноза за $MA(q)$ модел има смисла ако је $h \leq q$. У супротном случају, прогноза је једнака нули (прогноза „не предвиђа ништа”, већ је једнака средњој вредности серије), грешка прогнозе је једнака прогнозираном члану серије, а дисперзија грешке прогнозе је једнака дисперзији серије (прогноза „ни мало не описује варијације у серији”). Значи, MA моделе не треба прогнозирати „далеко у будућност”.

6.4 Прогноза за AR моделе

6.4.1 Прогноза за $AR(1)$ модел

Модел са којим се ради је

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + e_t, \quad |\phi_1| < 1$$

Прогноза за један корак унапред је

$$\begin{aligned}\hat{X}_n(1) &= E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \\ &= E(\phi_1 X_n + e_{n+1}|\mathcal{F}_n) \\ &= \phi_1 X_n + E(e_{n+1}) \\ &= \phi_1 X_n,\end{aligned}$$

а одговарајућа грешка прогнозе је

$$\hat{e}_n(1) = X_{n+1} - \hat{X}_n(1) = e_{n+1}.$$

За два корака унапред прогноза је

$$\begin{aligned}\hat{X}_n(2) &= E(X_{n+2}|\mathcal{F}_n) \\ &= E(\phi_1 X_{n+1} + e_{n+2}|\mathcal{F}_n) \\ &= \phi_1 \hat{X}_n(1) + E(e_{n+2}) \\ &= \phi_1 \hat{X}_n(1) \\ &= \phi_1^2 X_n\end{aligned}$$

Одговарајућа грешка прогнозе је

$$\begin{aligned}\hat{e}_n(2) &= X_{n+2} - \hat{X}_n(2) \\ &= \phi_1 X_{n+1} + e_{n+2} - \phi_1^2 X_n \\ &= \phi_1(\phi_1 X_n + e_{n+1}) + e_{n+2} - \phi_1^2 X_n \\ &= \phi_1 e_{n+1} + e_{n+2}\end{aligned}$$

Сад већ можемо да „погодимо” (и, ако желимо, проверимо индукцијом) да важи:

$$\begin{aligned}\hat{X}_n(h) &= \phi_1^h X_n \\ \hat{e}_n(h) &= e_{n+h} + \phi_1 e_{n+h-1} + \cdots + \phi_1^{h-1} e_{n+1} = \sum_{j=0}^{h-1} \phi_1^j e_{n+h-j}\end{aligned}$$

6.4.2 Закључак

За прогнозу за h корака унапред за $AR(1)$ модел важи

$$\hat{X}_n(h) = \phi_1^h X_n \rightarrow 0 = E(X_t), \quad h \rightarrow +\infty,$$

а за дисперзију грешке прогнозе важи

$$D(\hat{e}_n(h)) = D\left(\sum_{j=0}^{h-1} \phi_1^j e_{n+h-j}\right) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{h-1} \phi_1^{2j} = \sigma^2 \frac{1-\phi_1^{2h}}{1-\phi_1^2} \rightarrow \frac{1}{1-\phi_1^2} = D(X_t), \quad h \rightarrow +\infty.$$

Такође можемо да приметимо да је дисперзија грешке прогнозе растућа функција од h . То значи да, како хоризонт предвиђања h расте, прогноза описује све мање и мање варијација у серији (па зато дисперзија грешке расте). За велико h прогноза се приближава средњој вредности серије (тј. „не говори нам ништа ново, ни паметно”), а дисперзија се приближава дисперзији серије, тј. прогноза има све мање смисла.

Потпуно исти закључак важи за $AR(p)$ модел, који је само рачунски компликованији.

По врло сличном принципу се понаша и временска прогноза: краткорочна прогноза (за пар дана унапред) се сматра поузданом, а дугорочној прогнози (нпр. за три месеца унапред) већина нас не верује баш много.

6.5 Прогноза за $ARMA$ моделе

Код $ARMA$ модела ситуација је слична као код AR модела, само је прогнозирање рачунски компликованије.

6.5.1 Прогноза за $ARMA(1, 1)$ модел

Модел са којим се ради је

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + e_t - \theta_1 e_{t-1}, \quad |\phi_1|, |\theta_1| < 1$$

Прогноза за један корак унапред је

$$\begin{aligned} \hat{X}_n(1) &= E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) \\ &= E(\phi_1 X_n + e_{n+1} - \theta_1 e_n | \mathcal{F}_n) \\ &= \phi_1 X_n + E(e_{n+1}) - \theta_1 e_n \\ &= \phi_1 X_n - \theta_1 e_n, \end{aligned}$$

а одговарајућа грешка прогнозе је

$$\hat{e}_n(1) = X_{n+1} - \hat{X}_n(1) = e_{n+1}.$$

За два корака унапред прогноза је

$$\begin{aligned} \hat{X}_n(2) &= E(X_{n+2} | \mathcal{F}_n) \\ &= E(\phi_1 X_{n+1} + e_{n+2} - \theta_1 e_{n+1} | \mathcal{F}_n) \\ &= \phi_1 \hat{X}_n(1) + E(e_{n+2}) - \theta_1 E(e_{n+1}) \\ &= \phi_1 \hat{X}_n(1) \\ &= \phi_1(\phi_1 X_n - \theta_1 e_n) \end{aligned}$$

Одговарајућа грешка прогнозе је

$$\begin{aligned} \hat{e}_n(2) &= X_{n+2} - \hat{X}_n(2) \\ &= \phi_1 X_{n+1} + e_{n+2} - \theta_1 e_{n+1} - \phi_1(\phi_1 X_n - \theta_1 e_n) \\ &= \phi_1(\phi_1 X_n + e_{n+1} - \theta_1 e_n) + e_{n+2} - \theta_1 e_{n+1} - \phi_1(\phi_1 X_n - \theta_1 e_n) \\ &= (\phi_1 - \theta_1)e_{n+1} + e_{n+2} \end{aligned}$$

Сад већ можемо да „погодимо” да важи:

$$\hat{X}_n(h) = \phi_1^{h-1}(\phi_1 X_n - \theta_1 e_n)$$

$$\hat{e}_n(h) = e_{n+h} + (\phi_1 - \theta_1)e_{n+h-1} + \cdots + \phi_1^{h-2}(\phi_1 - \theta_1)e_{n+1} = e_{n+h} + \sum_{j=0}^{h-2} \phi_1^j (\phi_1 - \theta_1) e_{n+h-1-j}.$$

Проверити, за вежбање, случај $h = 3$!

6.5.2 Закључак

За прогнозу за h корака унапред за $ARMA(1, 1)$ модел важи

$$\hat{X}_n(h) = \phi_1^{h-1}(\phi_1 X_n - \theta_1 e_n) \rightarrow 0 = E(X_t), \quad h \rightarrow +\infty,$$

а за дисперзију грешке прогнозе важи

$$D(\hat{e}_n(h)) = \sigma^2 \left(1 + (\phi_1 - \theta_1)^2 \frac{1 - \phi_1^{2(h-1)}}{1 - \phi_1^2} \right) \rightarrow D(X_t), \quad h \rightarrow +\infty.$$

Проверити!

Можемо да приметимо да се из резултата за $ARMA(1, 1)$ модел добијају резултати за $AR(1)$ ако је $\theta_1 = 0$, а резултати за $MA(1)$ модел ако је $\phi_1 = 0$. Слично важи и за остале $ARMA$ моделе. Закључак о прогнози је исти као за AR моделе.

6.6 Ревизија прогнозе

Претпоставимо да је на основу реализоване серије дужине n урађена прогноза за $k \in \{1, 2, \dots, h+1\}$ корака унапред. Ако је, у међувремену, постала позната тачна вредност серије у тренутку $n+1$, онда може да се уради **ревизија прогнозе**.

На пример, за линеарни процес имамо:

$$\begin{aligned} \hat{X}_n(h) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \psi_{h+j} e_{n-j} \\ \hat{X}_{n+1}(h) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \psi_{h+j} e_{n+1-j} \\ \hat{X}_n(h+1) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \psi_{h+1+j} e_{n-j} \end{aligned}$$

Одузимањем друге и треће једнакости добија се једначина ревизије прогнозе:

$$\hat{X}_{n+1}(h) - \hat{X}_n(h+1) = \psi_h e_{n+1} = \psi_h (X_{n+1} - \hat{X}_n(1)).$$

Одавде се може брзо добити вредност $\hat{X}_{n+1}(h)$ (оцена на основу реализације веће дужине).

Једначина се може искористити и на други начин. Сад имамо две могуће прогнозе непознате вредности X_{n+1+h} ($\hat{X}_{n+1}(h)$ и $\hat{X}_n(h+1)$), па се за коначну прогнозу може узети једна или друга (на основу процене истраживача или неке додатне информације о посматраној серији), или, на пример, нека њихова линеарна комбинација.

Значи, једном одређена прогноза није „уклесана у камен”, већ се може преправљати и побољшавати, уз помоћ нових информација које током времена постају доступне.

Наравоученије из ове лекције

1. Код MA модела, прогнозирање има смисла за хоризонт предвиђања h мањи или једнак реду модела.
2. Код AR и $ARMA$ модела прогнозирање има смисла за произвољну вредност h , али како h расте, квалитет прогнозе опада.
3. Прогноза се може мењати и побољшавати, уз помоћ нових информација о посматраној серији које постају доступне током времена.

7 Оцењивање параметара $ARMA$ модела

До сада смо разматрали $ARMA$ моделе, као и њихове специјалне случајеве, AR и MA . Закључили смо да се ред AR модела може одредити уз помоћ парцијалне аутокорељационе функције, а ред MA модела уз помоћ (обичне) аутокорељационе функције. За $ARMA$ модел потребно је искористити оба приступа.

Кад смо одредили ред модела, потребно је оценити непознате параметре.

Претпоставимо да имамо реализовану серију обима n , чији су чланови $x_1, x_2, \dots, x_n$. Циљ нам је да на основу те реализације оценимо параметре одабраног $ARMA$ модела. Размотримо четири методе које се често користе:

1. метода момената
2. метода (обичних) најмањих квадрата
3. метода нелинеарних најмањих квадрата
4. метода максималне веродостојности

7.1 Метода момената

Основна идеја методе момената је да се изједначе теоријски моменти модела (који зависе од непознатих параметара) са одговарајућим узорачким моментима, добијеним на основу реализоване серије.

Примену методе ћемо видети на примерима.

7.1.1 $AR(p)$ модел

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + e_t$$

Као што знамо, веза између ϕ -ова и ρ -ова дата је *Yule – Walker* једначинама:

$$\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\rho},$$

где је

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{p-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \dots & \rho_1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \dots \\ \phi_p \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \dots \\ \rho_p \end{bmatrix}$$

Кад се сваки аутокорељациони коефицијент ρ_i замени својом оценом на основу реализоване серије:

$$\hat{\rho}_i = \frac{\sum_{t=i+1}^n (x_t - \bar{x})(x_{t-i} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x})^2}, \quad i = 1, 2, \dots$$

добиају се матрице $\hat{\rho}$ и $\hat{\mathbf{P}}$. Одатле се и добија и оцена матрице непознатих параметара:

$$\hat{\phi} = \hat{\mathbf{P}}^{-1} \cdot \hat{\rho}$$

Треба оценити и дисперзију белог шума, σ^2 , која је, у општем случају, непозната. Кад помножимо једначину модела са X_t и „нападнемо очекивањем”, добијамо:

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \dots + \phi_p \gamma_p + \sigma^2,$$

што је исто што и

$$\gamma_0(1 - \phi_1 \rho_1 - \dots - \phi_p \rho_p) = \sigma^2.$$

Кад се убаце претходно добијене оцене $\hat{\rho}$ и $\hat{\phi}$, добија се оцена $\hat{\sigma}^2$:

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\gamma}_0(1 - \hat{\phi}_1 \hat{\rho}_1 - \dots - \hat{\phi}_p \hat{\rho}_p).$$

7.1.2 МА(1) модел

$$X_t = e_t - \theta_1 e_{t-1}$$

За овај модел имамо

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ -\frac{\theta_1}{1+\theta_1^2}, & k = 1 \\ 0, & k > 1 \end{cases}$$

Кад се ρ_1 замени са својом оценом $\hat{\rho}_1$, добија се

$$\hat{\rho}_1 = -\frac{\theta_1}{1 + \theta_1^2},$$

која је еквивалентна квадратној једначини

$$\theta_1^2 \hat{\rho}_1 + \theta_1 + \hat{\rho}_1 = 0, \quad (10)$$

чија су решења

$$\theta_1^{(1,2)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\hat{\rho}_1^2}}{2\hat{\rho}_1}.$$

Од два добијена решења, бирамо оно које је **инвертибилно**, тј. за које у овом случају, важи $|\theta_1| < 1$. У овом случају може да настане још један проблем. Из теоријског модела следи $|\rho_1| \leq \frac{1}{2}$, а из реализоване серије се може добити $|\hat{\rho}_1| > \frac{1}{2}$, што доводи у питање спецификацију модела. Тада једначина (10) нема реалних решења.

Непознату дисперзију белог шума рачунамо директно из једначине модела:

$$\gamma_0 = D(X_t) = D(e_t - \theta_1 e_{t-1}) = (1 + \theta_1^2) \sigma^2,$$

одакле се добија

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\gamma}_0}{1 + \hat{\theta}_1^2}.$$

7.1.3 ARMA(1, 1) модел

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} = e_t - \theta_1 e_{t-1}$$

За овај модел важи

$$\rho_1 = \frac{(\phi_1 - \theta_1)(1 - \phi_1 \theta_1)}{1 - 2\phi_1 \theta_1 + \theta_1^2}, \quad \phi_1 = \frac{\rho_2}{\rho_1}.$$

Проверити! Одатле се добија

$$\hat{\phi}_1 = \frac{\hat{\rho}_2}{\hat{\rho}_1},$$

па се заменом у прву једнакост добија

$$\hat{\rho}_1 = \frac{(\hat{\phi}_1 - \theta_1)(1 - \hat{\phi}_1 \theta_1)}{1 - 2\hat{\phi}_1 \theta_1 + \theta_1^2},$$

што се своди на квадратну једначину по θ_1 . Од два решења поново треба одабрати оно које је инвертибилно, тј. важи $|\theta_1| < 1$. Још треба одредити дисперзију белог шума. За овај модел важи

$$\gamma_0 = \frac{\sigma^2(1 - 2\phi_1 \theta_1 + \theta_1^2)}{1 - \phi_1^2}.$$

Проверити! Одатле се добија

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\gamma}_0(1 - \hat{\phi}_1^2)}{1 - 2\hat{\phi}_1 \hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_1^2}.$$

Метода момената се слично примењује и код осталих модела временских серија.

7.2 Метода најмањих квадрата

Примену методе најмањих квадрата у контексту временских серија ћемо разјаснити кроз примере.

7.2.1 AR(1) модел

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + e_t, \quad |\phi_1| < 1 \tag{11}$$

За оцену параметра ϕ_1 се узима она вредност за коју је

$$S(\phi_1) = \sum_{t=2}^n e_t^2 = \sum_{t=2}^n (x_t - \phi_1 x_{t-1})^2$$

минимално. Значи, мора да важи

$$\frac{\partial S}{\partial \phi_1} = 0.$$

Добија се:

$$\frac{\partial S}{\partial \phi_1} = \sum_{t=2}^n 2(x_t - \phi_1 x_{t-1}) \cdot (-x_{t-1}) = 0,$$

тј.

$$\sum_{t=2}^n x_t x_{t-1} = \phi_1 \sum_{t=2}^n x_{t-1}^2.$$

Онда је одговарајућа оцена:

$$\hat{\phi}_1 = \frac{\sum_{t=2}^n x_t x_{t-1}}{\sum_{t=2}^n x_{t-1}^2}. \quad (12)$$

Ово је, заиста, минимум, јер важи

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \phi_1^2} = 2 \sum_{t=2}^n x_{t-1}^2 \geq 0.$$

Напомена 7.1. Приметимо да су чланови реализоване серије, $x_1, x_2, \dots, x_n$ константе, а одговарајући чланови белог шума, $e_2, e_3, \dots, e_n$ су неопажени, тј. случајне величине. Ова разлика ће бити важна при одређивању особина оцене.

7.2.2 Особине оцене $\hat{\phi}_1$

1. $\hat{\phi}_1$ је непристрасна оцена параметра ϕ_1 :

$$\hat{\phi}_1 = \frac{\sum_{t=2}^n x_t x_{t-1}}{\sum_{t=2}^n x_{t-1}^2} = \frac{\sum_{t=2}^n (\phi_1 x_{t-1} + e_t) x_{t-1}}{\sum_{t=2}^n x_{t-1}^2} = \phi_1 + \frac{\sum_{t=2}^n e_t x_{t-1}}{\sum_{t=2}^n x_{t-1}^2},$$

па је

$$E(\hat{\phi}_1) = \phi_1 + E\left(\frac{\sum_{t=2}^n e_t x_{t-1}}{\sum_{t=2}^n x_{t-1}^2}\right) = \phi_1.$$

2. $\hat{\phi}_1$ је конзистентна оцена параметра ϕ_1 :

$$D(\hat{\phi}_1) = E(\hat{\phi}_1 - \phi_1)^2 = E\left(\frac{\sum_{t=2}^n e_t x_{t-1}}{\sum_{t=2}^n x_{t-1}^2}\right)^2 = \frac{\sigma^2}{\sum_{t=2}^n x_{t-1}^2} = \frac{\frac{\sigma^2}{n-1}}{\frac{1}{n-1} \sum_{t=2}^n x_{t-1}^2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

3. Под претпоставком да је $\{e_t\}$ Гаусов бели шум, $\hat{\phi}_1$ има асимптотски нормалну расподелу:

$$\sqrt{n}(\hat{\phi}_1 - \phi_1) \rightarrow \mathcal{N}(0, 1 - \phi_1^2), \quad n \rightarrow \infty.$$

Слично важи за произвољни $AR(p)$ модел.

7.2.3 $MA(1)$ модел

$$X_t = e_t - \theta_1 e_{t-1}, \quad |\theta_1| < 1$$

У овом случају не можемо директно да применимо методу најмањих квадрата, јер не можемо да „изразимо” чланове белог шума преко X -ова. Један начин да се то превазиђе би био да се $MA(1)$ модел представи као $AR(\infty)$ модел:

$$X_t = e_t - \theta_1 X_{t-1} - \theta_1^2 X_{t-2} - \theta_1^3 X_{t-3} - \dots$$

Ту, међутим, настаје још проблема. Горњи израз је нелинеаран по параметру θ_1 , а у запису још постоји бесконачан број чланова, па ако га „скратимо” на коначан број, то ће бити додатни извор грешке. Дакле, овде није могуће успешно применити методу најмањих квадрата.

Исто важи за произвољан $MA(q)$ модел.

7.2.4 $ARMA(1, 1)$ модел

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} = e_t - \theta_1 e_{t-1}, \quad |\phi_1|, |\theta_1| < 1$$

Ни овде није могуће директно применити методу најмањих квадрата, из истог разлога као код MA модела. Ипак, можемо да направимо малу модификацију. Нека је

$$f_t = e_t - \theta_1 e_{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots$$

Тада низ $\{f_t\}$ „игра улогу” белог шума, али се разликује по томе што његови чланови нису увек некорелисани:

$$\text{cov}(f_t, f_{t-1}) = E((e_t - \theta_1 e_{t-1})(e_{t-1} - \theta_1 e_{t-2})) = -\theta_1 \sigma^2 \neq 0.$$

Почетни модел се своди на:

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} = f_t$$

Кад се примени метода најмањих квадрата, на исти начин као код AR модела, добија се оцена $\hat{\phi}_1$ за коју важи:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_1 &= \frac{\sum_{t=2}^n x_t x_{t-1}}{\sum_{t=2}^n x_{t-1}^2} = \phi_1 + \frac{\sum_{t=2}^n f_t x_{t-1}}{\sum_{t=2}^n x_{t-1}^2} \\ &= \phi_1 + \frac{\sum_{t=2}^n (e_t - \theta_1 e_{t-1}) x_{t-1}}{\sum_{t=2}^n x_{t-1}^2} = \phi_1 + \frac{\sum_{t=2}^n e_t x_{t-1}}{\sum_{t=2}^n x_{t-1}^2} - \theta_1 \frac{\sum_{t=2}^n e_{t-1} x_{t-1}}{\sum_{t=2}^n x_{t-1}^2} \end{aligned}$$

Одатле имамо, кад $n \rightarrow \infty$:

$$E(\hat{\phi}_1) = \phi_1 - \theta_1 \frac{\frac{n-1}{n} \sigma^2}{\frac{1}{n} \sum_{t=2}^n x_{t-1}^2} \rightarrow \phi_1 - \theta_1 \cdot \frac{\sigma^2}{\gamma_0} \neq \phi_1.$$

Значи, оцена $\hat{\phi}_1$ није непристрасна, чак ни асимптотски.

7.3 Метода нелинеарних најмањих квадрата

Видели смо да на MA моделе не може да се примени метода најмањих квадрата. Метода нелинеарних најмањих квадрата је њена модификација, која користи технике нумеричке оптимизације и омогућава да добијемо оцене параметара за MA моделе. Сад ћемо видети идеју ове методе на примеру $MA(1)$ модела. Из једначине модела се добија

$$e_t = X_t + \theta_1 e_{t-1}. \quad (13)$$

Ако члан e_0 заменимо са 0 (очекивање белог шума), онда из једнакости (13), за $t = 1, 2, 3, \dots$ добијамо:

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 &= x_1 + \theta_1 \cdot 0 = x_1 \\ \hat{e}_2 &= x_2 + \theta_1 \cdot \hat{e}_1 = x_2 + \theta_1 x_1 \\ \hat{e}_3 &= x_3 + \theta_1 \cdot \hat{e}_2 = x_3 + \theta_1 x_2 + \theta_1^2 x_1 \\ &\dots \end{aligned}$$

Ако непознатом параметру θ_1 доделимо вредност θ_1^* , онда, претходним поступком, можемо да израчунамо збир

$$S(\theta_1^*) = \sum_{t=1}^n \hat{e}_t^2. \quad (14)$$

Цео поступак понављамо, уз доделу различитих вредности (из дозвољеног параметарског скупа) непознатом параметру θ , а за оцену бирамо ону вредност θ_1^* за коју израз (14) има најмању вредност. Ту се поставља неколико питања:

1. Како оценити за коју вредност θ се добија минимум израза (14)? Може се искористити, на пример, *Newton – Raphson* процедура.

Ако функција $f(x)$ има минимум у тачки x_0 и ако постоји $f'(x_0)$, онда мора бити $f'(x_0) = 0$. Кад се функција $f'(x)$ развије у Тејлоров ред у околини тачке x_0 , добија се:

$$f'(x) \approx f'(x_0) + (x - x_0)f''(x_0),$$

тј.

$$f'(x) \approx (x - x_0)f''(x_0).$$

Одатле следи

$$x_0 \approx x - \frac{f'(x)}{f''(x_0)},$$

што води до итеративне процедуре за добијање следећег „кандидата” за минимум функције:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}.$$

У нашем случају, x_n је оцена параметра θ добијена у n -тој итерацији.

2. Када смо „довољно близу” минимума и треба да прекинемо процедуру? Критеријум конвергенције је да је разлика узастопних вредности израза (14) мања од унапред задатог $\epsilon > 0$.
3. Шта одабрати као почетну вредност θ_1^* ? Као почетна оцена параметра θ_1 се може узети, на пример, оцена добијена методом момената.

Наравно, овај проблем се, у пракси, може решавати применом различитих нумеричких техника.

7.4 Метода максималне веродостојности

Нека је $L(\theta)$ функција веродостојности датог узорка, која зависи од непознатог параметра θ . Основна идеја методе максималне веродостојности је да се за оцену непознатог параметра узме она вредност θ за коју функција L достиже максимум. Због једноставности рачуна, уместо L може да се користи $\ln L$ (што је оправдано јер логаритам чува монотонију).

Да би се користила метода максималне веродостојности, потребно је претпоставити неку расподелу. У нашем контексту, то значи да ћемо претпоставити да је случајни низ $\{e_t\}$ **Гаусов бели шум**, тј. има $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ расподелу. Тако ћемо моћи да оценимо и дисперзију белог шума, σ^2 .

Методу ћемо поново размотрити на примеру $AR(1)$ модела (11).

Напомена 7.2. Тачна метода максималне веродостојности користила би узорак $(x_1, e_2, \dots, e_n)$, који потпуно одређује серију. Међутим, због проблема са рачунањем максимума функције $\ln L$, прелази се на **условну методу максималне веродостојности**, која користи узорак $(e_2, \dots, e_n)$.

$$\begin{aligned} L = L(\phi_1, \sigma^2 | e_2, \dots, e_n) &= \prod_{i=2}^n \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{e_i^2}{2\sigma^2}} \\ &= \prod_{i=2}^n \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - \phi_1 x_{i-1})^2}{2\sigma^2}} \\ &= \sigma^{-(n-1)} \cdot (2\pi)^{-\frac{n-1}{2}} \prod_{i=2}^n e^{-\frac{(x_i - \phi_1 x_{i-1})^2}{2\sigma^2}} \end{aligned}$$

$$\ln L = -\frac{n-1}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{n-1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=2}^n (x_i - \phi_1 x_{i-1})^2$$

Максимум функције $\ln L$ одређујемо из услова:

$$\frac{\partial(\ln L)}{\partial \phi_1} = 0, \quad \frac{\partial(\ln L)}{\partial(\sigma^2)} = 0.$$

Добијамо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\ln L)}{\partial \phi_1} &= -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=2}^n 2(x_i - \phi_1 x_{i-1})(-x_{i-1}) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=2}^n (x_{i-1} x_i - \phi_1 x_{i-1}^2) = 0, \end{aligned}$$

тј.

$$\sum_{i=2}^n x_{i-1} x_i = \phi_1 \sum_{i=2}^n x_{i-1}^2,$$

одакле следи оцена

$$\hat{\phi}_1 = \frac{\sum_{i=2}^n x_{i-1} x_i}{\sum_{i=2}^n x_{i-1}^2}.$$

Слично, из једнакости

$$\frac{\partial(\ln L)}{\partial(\sigma^2)} = -\frac{n-1}{2} \cdot \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{\sigma^4} \cdot \sum_{i=2}^n (x_i - \phi_1 x_{i-1})^2 = 0$$

се добија

$$(n-1)\sigma^2 = \sum_{i=2}^n (x_i - \phi_1 x_{i-1})^2,$$

одакле следи оцена

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=2}^n (x_i - \hat{\phi}_1 x_{i-1})^2}{n-1}.$$

Видимо да је оцена параметра ϕ иста као она добијена методом најмањих квадрата.

Метод максималне веродостојности се може применити и на модел за који важи $E(X_t) = \mu$:

$$X_t - \mu = \phi_1(X_{t-1} - \mu) + e_t,$$

тј.

$$X_t = \lambda + \phi_1 X_{t-1} + e_t, \quad \lambda = \mu(1 - \phi_1).$$

У том случају је

$$\ln L(\lambda, \phi_1, \sigma^2 | e_2, \dots, e_n) = -\frac{n-1}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{n-1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=2}^n (x_i - \phi_1 x_{i-1} - \lambda)^2.$$

Овде се оцене параметара добијају као решење система једначина:

$$\frac{\partial(\ln L)}{\partial \phi_1} = 0, \quad \frac{\partial(\ln L)}{\partial(\sigma^2)} = 0, \quad \frac{\partial(\ln L)}{\partial \lambda} = 0.$$

Метода се слично примењује и на остале AR моделе.

Наравоученије из ове лекције

- Метода момената се обично користи за добијање почетних оцена параметара, које се касније „поправљају” другим методама. Најпоузданија је за AR моделе, а код MA и $ARMA$ модела може се појавити проблем са избором одговарајуће оцене (више могућих или недостатак прихватљиве оцене).
- Метода најмањих квадрата добро ради за AR моделе (оцена је непристрасна и конзистентна). На MA моделе се не може применити, а код $ARMA$ модела даје мало лошије резултате (оцена је пристрасна, чак и асимптотски).
- Метода нелинеарних најмањих квадрата, уз помоћ техника оптимизације, омогућава да се добије оцена непознатих параметара код MA модела.
- За методу максималне веродостојности важи исти закључак као за методу најмањих квадрата.
- У пракси се оцењивање непознатих параметара модела одавно више не ради „пешачки”, већ се за то користе разни програмски пакети. Ипак, потребно је знати коју методу тај пакет користи, на какве моделе може да се примени и колико је квалитетна оцена која се на тај начин може добити.

8 Нестационарне временске серије

До сада смо се бавили искључиво стационарним временским серијама и моделима за њих. Сад прелазимо на разматрање разних типова нестационарних временских серија.

8.1 Детерминистички и стохастички тренд

Сад ћемо да упоредимо две класе нестационарних модела које се често користе.

8.1.1 Тренд - стационарна класа модела

Општи модел из тренд - стационарне класе има облик

$$X_t = \beta_0 + \beta_1 t + Z_t,$$

где су β_0, β_1 константе, а $\{Z_t\}$ прозвољна стационарна серија (у најопштијем случају, то је $ARMA(p, q)$ модел).

За $\beta_1 > 0$ у питању је растући тренд, а за $\beta_1 < 0$ опадајући тренд.

У специјалном случају, кад Z_t заменимо најједноставнијом могућом стационарном серијом (а то је бели шум), добијамо модел:

$$X_t = \beta_0 + \beta_1 t + e_t,$$

чије су особине:

1. $E(X_t) = \beta_0 + \beta_1 t$
2. $D(X_t) = E(e_t^2) = \sigma^2$
3. $\gamma_k = cov(X_t, X_{t-k}) = E(e_t e_{t-k}) = 0, \quad k > 0$

Дакле, ова серија је „скоро па стационарна” (разликује се од стационарне само по томе што има неконстантну средњу вредност).

У овом случају, и тренд и сама серија се могу прогнозировать. Параметри линеарног тренда се могу оценити регресионим методама, а серија (из које је претходно елиминисан тренд) се може прогнозировать као и сваки $ARMA$ модел.

Модел се, наравно, може уопштити тако да се појављује тренд у облику полинома произвољног степена.

8.1.2 Диференчно - стационарна класа модела

Општи модел из диференчно - стационарне класе има облик

$$(1 - L)X_t = \beta + Z_t,$$

где је β константа, а $\{Z_t\}$ прозвољна стационарна серија (у најопштијем случају, то је $ARMA(p, q)$ модел).

Овај модел се може записати и као

$$\Delta X_t = \beta + Z_t \text{ или } X_t = X_{t-1} + \beta + Z_t.$$

Модел се може уопштити тако да се појављује виши ред диференцирања.

У најједноставнијем случају, кад је $Z_t = e_t$ добија се модел

$$(1 - L)X_t = \beta + e_t,$$

чије ћемо особине детаљније испитати.

1. Рекурзивном заменом се добија:

$$\begin{aligned}
X_t &= \beta + X_{t-1} + e_t \\
&= \beta + (\beta + X_{t-2} + e_{t-1}) + e_t \\
&= \beta + (\beta + (\beta + X_{t-3} + e_{t-2}) + e_{t-1}) + e_t \\
&= X_0 + \beta t + e_t + e_{t-1} + \cdots + e_1 \\
&= X_0 + \beta t + \sum_{j=1}^t e_j
\end{aligned}$$

Значи, добили смо серију чија је детерминистичка компонента $X_0 + \beta t$, а случајна компонента $\sum_{j=1}^t e_j$.

Упркос томе што се, на први поглед, чини да у овој серији постоји само линеарни тренд, тренд је, заправо, стохастички, а кретање серије је непредвидиво. Извор стохастичког тренда је кумулативно дејство („накупљање”) чланова белог шума.

2. $E(X_t) = X_0 + \beta t$

3. $D(X_t) = D\left(X_0 + \beta t + \sum_{j=1}^t e_j\right) = E\left(\sum_{j=1}^t e_j\right)^2 = t\sigma^2$

4. $cov(X_t, X_{t-k}) = E((e_t + e_{t-1} + \cdots + e_1)(e_{t-k} + \cdots + e_1)) = (t-k)\sigma^2$

Одавде видимо да серија није стационарна, јер има неконстантну средњу вредност и дисперзију, а коваријација различитих чланова серије не зависи искључиво од растојања између њих.

5. Серија има **јединични корен**. Број јединичних корена показује колико пута серију треба диференцирати да би постала стационарна (за серију са d јединичних корена $\Delta^d X_t$ је стационарна серија).

6. За прогнозу серије важи:

$$\begin{aligned}
\hat{X}_n(h) &= E(X_{n+h} | \mathcal{F}_n) = X_0 + \beta(n+h) + \sum_{j=1}^n e_j, \\
\hat{e}_n(h) &= \sum_{j=n+1}^{n+h} e_j, \\
D(\hat{e}_n(h)) &= h\sigma^2 \rightarrow +\infty, \quad h \rightarrow +\infty.
\end{aligned}$$

Дакле, можемо да закључимо да квалитет прогнозе опада кад хоризонт предвиђања расте, што је још једна од особина нестационарних серија.

Пример 8.1. Разматрамо модел:

$$X_t - 3X_{t-1} + 3X_{t-2} - X_{t-3} = e_t.$$

Карактеристична једначина овог модела је

$$g^3 - 3g^2 + 3g - 1 = 0,$$

која има троструко решење $g = 1$.

Проверићемо да ли је $\Delta^3 X_t$ стационарна серија.

$$\begin{aligned}\Delta^3 X_t &= \Delta(\Delta^2 X_t) = \Delta^2 X_t - \Delta^2 X_{t-1} = \Delta(\Delta X_t) - \Delta(\Delta X_{t-1}) \\ &= \Delta(X_t - X_{t-1}) - \Delta(X_{t-1} - X_{t-2}) \\ &= (X_t - X_{t-1}) - (X_{t-1} - X_{t-2}) - (X_{t-1} - X_{t-2}) + (X_{t-2} - X_{t-3}) \\ &= X_t - 3X_{t-1} + 3X_{t-2} - X_{t-3}\end{aligned}$$

Одавде следи да је $\Delta^3 X_t = e_t$, тј. стационарна серија.

Да видимо шта се добија кад се модел „распише”.

$$\begin{aligned}X_t &= 3X_{t-1} - 3X_{t-2} + X_{t-3} + e_t \\ &= 3(3X_{t-2} - 3X_{t-3} + X_{t-4} + e_{t-1}) \\ &\quad - 3(3X_{t-3} - 3X_{t-4} + X_{t-5} + e_{t-2}) \\ &\quad + (3X_{t-4} - 3X_{t-5} + X_{t-6} + e_{t-3}) + e_t \\ &\dots\end{aligned}$$

Кад се овај поступак понови много пута (тј. модел „распише” до „далеко у прошлост”), добија се израз облика

$$\sum_i \sum_j \sum_k e_{i,j,k},$$

тј. „трострука” сума чланова белог шума.

Шта, заправо, ради диференцирање? Свако диференцирање „брише” једну суму, и тако док не остане стационарна серија.

8.1.3 Мешовити модел

Сада ћемо размотрити општији, мешовити модел, који обухвата оба претходно разматрана модела, да бисмо јасније видели како укључивање детерминистичког тренда у модел утиче на промену његових особина.

Мешовити модел је:

$$X_t - \phi X_{t-1} = \beta + e_t, \quad |\phi| \leq 1.$$

Примећујемо да се за $\phi = 0$ добија модел из тренд - стационарне класе, а за $\phi = 1$ модел из диференчно - стационарне класе. Ако је $\beta = 0$ мешовити модел се своди на $AR(1)$ модел.

Сада ћемо извести особине мешовитог модела за $|\phi| < 1$.

1. Расписивањем „по дубини” се добија:

$$\begin{aligned}X_t &= \phi X_{t-1} + \beta + e_t \\ &= \phi(\phi X_{t-2} + \beta + e_{t-1}) + \beta + e_t \\ &= \phi^2 X_{t-2} + \phi\beta + \beta + \phi e_{t-1} + e_t \\ &= \dots \\ &= \phi^t X_0 + \beta + \phi\beta + \dots + \phi^{t-1}\beta + e_t + \phi e_{t-1} + \dots + \phi^{t-1}e_1 \\ &= \phi^t X_0 + \beta \frac{1 - \phi^t}{1 - \phi} + \sum_{j=1}^t \phi^{t-j} e_j.\end{aligned}$$

Одатле следи:

$$E(X_t) = \phi^t X_0 + \beta \frac{1 - \phi^t}{1 - \phi} \rightarrow \frac{\beta}{1 - \phi}, \quad t \rightarrow +\infty,$$

$$D(X_t) = \sigma^2 \sum_{j=1}^t \frac{1 - \phi^{2t}}{1 - \phi^2} \rightarrow \sigma^2 \frac{1}{1 - \phi^2} = D(AR(1)), \quad t \rightarrow +\infty,$$

$$\begin{aligned} cov(X_t, X_{t-k}) &= E((e_t + \phi e_{t-1} + \dots + \phi^{t-1} e_1)(e_{t-k} + \phi e_{t-1-k} + \dots + \phi^{t-1-k} e_1)) \\ &= \sigma^2 (\phi^k + \phi^{k+2} + \dots + \phi^{2(t-k-1)+k}) \\ &= \sigma^2 \phi^k (1 + \phi^2 + \dots + \phi^{2(t-k-1)}) \\ &= \sigma^2 \phi^k \frac{1 - \phi^{2t}}{1 - \phi^2} \rightarrow \sigma^2 \frac{\phi^k}{1 - \phi^2} = \gamma_k(AR(1)), \quad t \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

2. За прогнозу серије важи:

$$\hat{X}_n(h) = E(X_{n+h} | \mathcal{F}_n) = \phi^{n+h} X_0 + \beta \frac{1 - \phi^{n+h}}{1 - \phi} + \sum_{j=1}^n \phi^{n+h-1} e_j,$$

$$\hat{e}_n(h) = \sum_{j=n+1}^{n+h} \phi^{n+h-1} e_j,$$

$$D(\hat{e}_n(h)) = \sigma^2 \sum_{j=n+1}^{n+h} \phi^{2(n+h-1)} = \sigma^2 \frac{1 - \phi^{2h}}{1 - \phi^2} \rightarrow \sigma^2 \frac{1}{1 - \phi^2} = D(AR(1)), \quad h \rightarrow +\infty.$$

Из претходно изведених особина можемо да закључимо да укључивање тренд компоненте (у овом случају коефицијента β) у модел мења средњу вредност серије и вредност прогнозе за произвољни хоризонт предвиђања.

Што се тиче варијабилности серије, корелационе повезаности чланова и квалитета прогнозе, дугорочно (за велико t , односно за велико h) тренд компонента губи на значају у односу на AR компоненту и мешовити модел добија особине $AR(1)$ модела.

8.2 Тестови јединичног корена

До сада смо видели да за AR модел временске серије можемо на основу решења карактеристичне једначине да одредимо да ли је у питању стационарна, серија са јединичним кореном, или експлозивна серија. Ако радимо са реализованом серијом, морамо да користимо **тестове јединичног корена** да бисмо разликовали серију која је стационарна, од оне у којој постоји бар један јединични корен.

Постоје различити тестови јединичног корена, а ми ћемо детаљније разматрати Dickey-Fuller тест.

8.2.1 Dickey-Fuller тест за $AR(1)$ модел

Модел:

$$X_t = \phi X_{t-1} + e_t, \quad E(X_t) = 0$$

Од раније знамо да природа серије зависи од вредности параметра ϕ (јер је ϕ уједно решење карактеристичне једначине. Постоје три случаја:

- $|\phi| < 1$: серија је стационарна;
- $|\phi| = 1$: серија има јединични корен;
- $|\phi| > 1$: серија је експлозивна.

Параметар ϕ можемо оценити, на пример, методом најмањих квадрата:

$$\hat{\phi} = \frac{\sum_{t=2}^n x_t x_{t-1}}{\sum_{t=2}^n x_{t-1}^2}$$

Важи:

$$\hat{\phi} = \phi + \frac{\sum_{t=2}^n x_{t-1} e_t}{\sum_{t=2}^n x_{t-1}^2},$$

одакле следи $E(\hat{\phi}) = \phi$.

Идеја Dickey-Fuller теста састоји се у томе да се испита хипотеза

H_0 : серија има (обичан) јединични корен ($\phi = 1$)

против алтернативне:

H_1 : серија је стационарна ($|\phi| < 1$)

Ако важи хипотеза H_0 , онда је $E_{H_0}(\hat{\phi}) = 1$.

За оцену $\hat{\phi}$ важи:

$$D(\hat{\phi}) = E(\hat{\phi} - \phi)^2 = E \left(\frac{\sum_{t=2}^n x_{t-1} e_t}{\sum_{t=2}^n x_{t-1}^2} \right)^2 = \frac{\sigma^2}{\sum_{t=2}^n x_{t-1}^2},$$

па је стандардна девијација оцено:

$$s(\hat{\phi}) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum_{t=2}^n x_{t-1}^2}}.$$

Оцена σ^2 на основу узорка је:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{t=2}^n (x_t - \hat{\phi} x_{t-1})^2}{(n-1) - 1}$$

(мења се број степени слободе зато што је $\hat{\phi}$ оцењено на основу истог узорка).

Даљим трансформацијама се добија;

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}^2 &= \frac{\sum_{t=2}^n \left(x_t - \frac{\sum_{t=2}^n x_t x_{t-1}}{\sum_{t=2}^n x_{t-1}^2} x_{t-1} \right)^2}{n-2} \\
&= \frac{\sum_{t=2}^n x_t^2 - 2 \frac{\sum_{t=2}^n x_t x_{t-1}}{\sum_{t=2}^n x_{t-1}^2} \sum_{t=2}^n x_t x_{t-1} + \left(\frac{\sum_{t=2}^n x_t x_{t-1}}{\sum_{t=2}^n x_{t-1}^2} \right)^2 \sum_{t=2}^n x_{t-1}^2}{n-2} \\
&= \frac{\sum_{t=2}^n x_t^2 - \frac{(\sum_{t=2}^n x_t x_{t-1})^2}{\sum_{t=2}^n x_{t-1}^2}}{n-2} \\
&= \frac{\sum_{t=2}^n x_t^2 - \hat{\phi} \sum_{t=2}^n x_t x_{t-1}}{n-2}
\end{aligned}$$

Одатле се добија стандардна грешка:

$$\hat{s}(\hat{\phi}) = \sqrt{\frac{\sum_{t=2}^n x_t^2 - \hat{\phi} \sum_{t=2}^n x_t x_{t-1}}{(n-2) \sum_{t=2}^n x_{t-1}^2}}.$$

и облик тест-статистике који се стандардно појављује у литератури:

$$\tau = \frac{\hat{\phi} - 1}{\hat{s}(\hat{\phi})} = \frac{\hat{\phi} - 1}{\sqrt{\frac{\sum_{t=2}^n x_t^2 - \hat{\phi} \sum_{t=2}^n x_t x_{t-1}}{(n-2) \sum_{t=2}^n x_{t-1}^2}}} \quad (15)$$

При важењу хипотезе H_0 , тест статистика (15) има нестандардну расподелу одређену симулацијама (τ -расподела). На пример, критична вредност за ниво значајности 5% је:

$$\tau^{(k)} = -1.9393 - \frac{0.398}{n}.$$

За $\tau < \tau^{(k)}$ одбацује се хипотеза H_0 , а за $\tau > \tau^{(k)}$ прихвата се хипотеза H_0 , тј. закључак да у серији постоји јединични корен.

8.2.2 Модификације Dickey-Fuller теста

Dickey-Fuller тест се, уз модификације, може применити и на неке друге моделе.

1. серија за коју важи $E(X_t) = \mu \neq 0$:

$$X_t - \mu = \phi(X_{t-1} - \mu) + e_t$$

Модел се може записати и као:

$$X_t = \mu(1 - \phi) + \phi X_{t-1} + e_t$$

Тест се, у овом случају, своди на тестирање хипотезе

$$H_0 : \phi = 1 \text{ (серија има јединични корен)}$$

против алтернативне хипотезе

$$H_1 : \phi < 1 \text{ (стационарна серија чија је средња вредност } \neq 0)$$

2. серија за коју важи $E(X_t) = \mu + \beta t$:

$$X_t - \mu - \beta t = \phi(X_{t-1} - \mu - \beta(t-1)) + e_t$$

Модел се може записати и као:

$$X_t = \mu(1 - \phi) + \phi\beta + \beta(1 - \phi)t + \phi X_{t-1} + e_t$$

Тест се, у овом случају, своди на тестирање хипотезе

$$H_0 : \phi = 1 \text{ (серија има јединични корен)}$$

против алтернативне хипотезе

$$H_1 : \phi < 1 \text{ (серија има стационарне осцилације око линеарног тренда)}$$

3. $AR(p)$ модел: Произвољни $AR(p)$ модел:

$$(1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p) X_t = e_t$$

се може приказати као

$$(1 - \alpha_1 L)(1 - \alpha_2 L - \dots - \alpha_{p-1} L^{p-1}) X_t = e_t,$$

тј.

$$Y_t = \alpha_1 Y_{t-1} + e_t, \text{ где је } Y_t = (1 - \alpha_2 L - \dots - \alpha_{p-1} L^{p-1}) X_t.$$

Тада се на серију Y_t може применити Dickey- Fuller тест. Ако се прихвати хипотеза о постојању јединичног корена, онда се поступак понавља, тј. тестира се серија ΔY_t , па ако и она има јединични корен, тестира се $\Delta^2 Y_t$, итд. Поступак се наставља све док се прихвата хипотеза H_0 .

У сваком од ових случајева тест статистика има мало другачију расподелу, а мењају се и критичне области.

8.3 Ауторегресиони модели покретних просека за интегрисане временске серије (*ARIMA*)

ARIMA модели служе за описивање временских серија које је могуће свести на *ARMA* моделе путем одређеног броја диференцирања ($\Delta^d X_t$ се добро описује *ARMA* моделом).

ARIMA(p, d, q) модел има облик:

$$(1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p)(1 - L)^d X_t = \theta_0 + (1 - \theta_1 L - \dots - \theta_q L^q)e_t,$$

где је p ред *AR* компоненте, q ред *MA* компоненте, d **ниво интегрисаности** серије, а θ_0 додатни параметар који се односи на тренд. Случајни низ $\{e_t\}$ је бели шум.

За $d = 0$ добија се *ARMA* модел, тј. стационарна серија.

Краћи запис *ARIMA*(p, d, q) модела је

$$\Phi(L)\Delta^d X_t = \theta_0 + \Theta(L)e_t,$$

где је

$$\Phi(L) = 1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p, \quad \Theta(L) = 1 - \theta_1 L - \dots - \theta_q L^q$$

Сад ћемо видети смисао параметра θ_0 . Ако је $E(\Delta^d X_t) = \mu$, онда је

$$E\left(\Phi(L)\Delta^d X_t\right) = (1 - \phi_1 - \dots - \phi_p)\mu,$$

одакле се добија

$$\theta_0 = (1 - \phi_1 - \dots - \phi_p)\mu.$$

Ако је $d = 0$, онда параметар θ_0 говори о средњој вредности серије, а ако је $d > 0$, онда θ_0 говори о постојању детерминистичког тренда. Ако се не претпоставља да у серији постоји детерминистички тренд, параметар θ_0 може да се изостави.

ARIMA модел се користи уз две претпоставке:

1. Полиноми $\Phi(L)$ и $\Theta(L)$ немају заједничких фактора. Разлог је што је, ако постоји заједнички фактор, у питању „маскирани” *ARIMA* модел нижег реда, тј. непотребно се компликује рад.
2. Испуњени су услови стационарности и инвертибилности (да би модел био употребљив).

8.3.1 Примери *ARIMA* модела

Овде су неведени неки једноставни *ARIMA* модели који се често користе. Препоручује се да се, у пракси, модел не „компликује” претерано, тј. да ред диференцирања d не буде већи од 2.

1. *ARIMA*(0, 1, 0): Ово је модел

$$(1 - L)X_t = \theta_0 + e_t,$$

За $\theta_0 = 0$ модел је познат као **случајно лутање**, а за $\theta_0 \neq 0$ то је **случајно лутање са дрефтом**.

У оба случаја, у питању је нестационарна серија (има јединични корен!), па не можемо да одредимо аутоковаријациону и парцијалну аутоковаријациону

функцију на уобичајени начин. „Приближне” особине коефицијената ρ_k и ϕ_{kk} можемо одредити тако што израчунамо њихове вредности за $AR(1)$ модел

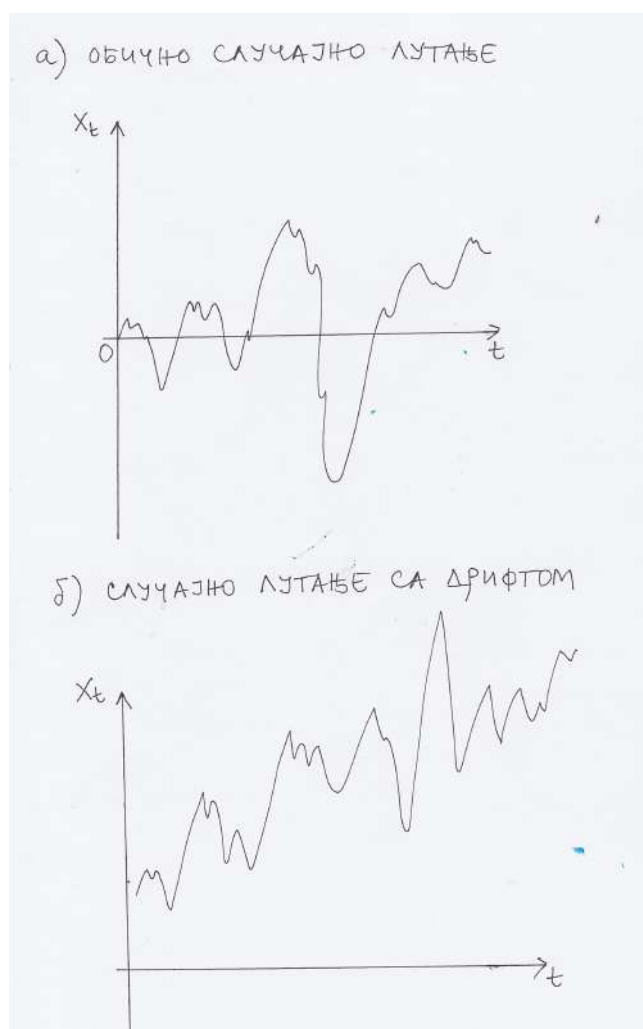
$$X_t = \phi X_{t-1} + e_t,$$

па одредимо њихове граничне вредности кад $\phi \rightarrow 1$. Добијамо:

$$\rho_k = \phi^k \rightarrow 1,$$

$$\phi_{11} = \phi \rightarrow 1, \quad \phi_{kk} \rightarrow 0, \quad k > 1.$$

На основу тога се може закључити како „отприлике” изгледају корелограм и парцијални корелограм овог модела. Све ово важи за обе варијанте случајног лутања (са и без дрифта), и оне се на основу корелограма и парцијалног корелограма не могу разликовати. Оно по чему се значајно разликују је графички приказ, који је дат на Слици 1. Како препознати да је у питању један од ових модела? У оба случаја, серија ΔX_t би требало да изгледа као стационарна.



Слика 7:

2. $ARIMA(0, 2, 0)$: Ово је модел

$$(1 - L)^2 X_t = e_t$$

Модел је нестационаран (има два јединична корена) и погодан је за оне серије за које $\Delta^2 X_t$ делује стационарно.

3. $ARIMA(0, 1, 1)$: Ово је модел

$$(1 - L)X_t = e_t - \theta_1 e_{t-1}, \quad |\theta_1| < 1$$

Опет је у питању нестационарни модел, чије особине се могу добити разматрањем њему сродног $ARMA$ модела. Проверити!

8.3.2 Изградња $ARIMA$ модела

У литератури се наводе пожељне особине било ког математичког модела:

1. **економичност:** Добро је што једноставнијим моделом (са што мање параметара) описати посматрану појаву. Тај модел треба да истакне суштинске карактеристике посматране појаве. Може се поћи од једноставног модела, који се, корак по корак „компликује”, или се може поћи од компликованог модела, који се поступно поједностављује.
2. **сагласност са подацима:** Један од начина да се испита сагласност са подацима је да се провери да ли су резидуали (оно што није објашњено моделом) релативно мали и да ли представљају прост случајан узорак.
3. **идентификабилност:** Модел је неидентификабилан ако постоје два скупа вредности параметара који су у сагласности са подацима. Пожељно је да то није тако.
4. **сагласност са теоријом**
5. **прихватљивост података:** Модел не сме да предвиђа вредности које не задовољавају дефинициона ограничења модела (на пример да предвиђа негативне вредности за величине које, по логици ствари, морају бити ненегативне).
6. **успешност прогнозирања**
7. **обухватност:** Модел обухвата неки други модел ако може да објасни резултате добијене тим другим моделом. На пример, $ARIMA$ модел обухвата $ARMA$ модел, а $ARMA$ модел обухвата AR и MA моделе.

Специјално, за $ARIMA$ моделе користи се Вох-Јенкинс стратегија моделирања, која се састоји из следећих корака:

1. **идентификација модела:** Испитује се стационарност серије (постојање једног или више јединичних корена), сезоналност (постојање сезонског јединичног корена), одређује се ред модела, на основу корелограма и парцијалног корелограма, или уз помоћ информационалних критеријума. Информациони критеријуми су функције чијом минимизацијом се успоставља равнотежа између квалитета модела и његове комплексности.
2. **оцењивање параметара модела**
3. **провера адекватности модела:** Анализирају се резидуали модела. Ако су они релативно мали и представљају прост случајан узорак (пожељно је да је из нормалне расподеле), модел се прихвата као адекватан. У супротном се треба вратити на корак 1 и модификовати модел.

8.4 Модели за сезонске временске серије

Као и тренд, сезонска компонента временске серије може бити **детерминистичка** (на почетку смо видели како се издваја или елиминише из серије) или **стохастичка**. Стохастичка сезонска компонента се може моделовати **сезонским ARIMA моделима**, које ћемо касније разматрати.

Сезонска компонента такође може бити **адитивна** (сабира се са осталим компонентама модела) или **мултипликативна** (множи се са осталим компонентама). Разлику између ова два случаја ћемо боље видети на следећем примеру.

Пример 8.2. Разматрамо два слична модела:

1. адитивни модел

$$X_t = (1 - \theta L - \Theta L^s)e_t = e_t - \theta e_{t-1} - \Theta e_{t-s}$$

2. мултипликативни модел

$$X_t = (1 - \theta L)(1 - \Theta L^s)e_t = e_t - \theta e_{t-1} - \Theta e_{t-s} + \theta\Theta e_{t-s-1}$$

Одређујемо аутоковаријациону функцију за оба модела:

1.

$$\gamma_k = \begin{cases} (1 + \theta^2 + \Theta^2)\sigma^2, & k = 0 \\ -\theta\sigma^2, & k = 1 \\ \theta\Theta\sigma^2, & k = s - 1 \\ -\Theta\sigma^2, & k = s \\ 0, & \text{у осталим случајевима} \end{cases}$$

2.

$$\gamma_k = \begin{cases} (1 + \theta^2 + \Theta^2)\sigma^2, & k = 0 \\ -\theta(1 + \Theta^2)\sigma^2, & k = 1 \\ \theta\Theta\sigma^2, & k = s - 1 \\ -\Theta(1 + \theta^2)\sigma^2, & k = s \\ \theta\Theta\sigma^2, & k = s + 1 \\ 0, & \text{у осталим случајевима} \end{cases}$$

Можемо да закључимо да се постојање додатног члана $\theta\Theta e_{t-s-1}$ у мултипликативном моделу може препознати на корелограму, као ненула коефицијент за кашњење $k = s + 1$.

8.4.1 Сезонски ARIMA модели (SARIMA)

Сезонски ауторегресиони модел покретних просека за интегрисане временске серије (краће, сезонски ARIMA или SARIMA модел) служи за моделовање стохастичке сезонске компоненте. Модел

$$ARIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$$

има облик

$$\begin{aligned} & (1 - \Phi_1 L^s - \Phi_2 L^{2s} - \dots - \Phi_P L^{Ps})(1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p)(1 - L^s)^D(1 - L)^d X_t \\ & = (1 - \theta_1 L - \dots - \theta_q L^q)(1 - \Theta_1 L^s - \Theta_2 L^{2s} - \dots - \Theta_Q L^{Qs})e_t, \end{aligned}$$

где је:

- s период сезоне (4 за кварталне, 12 за месечне податке)
- $\Phi_1, \dots, \Phi_P$ параметри сезонске AR компоненте
- $\Theta_1, \dots, \Theta_Q$ параметри сезонске MA компоненте
- D ниво сезонске интегрисаности серије

Може се, на сличан начин, дефинисати и **адитивни** $SARIMA$ модел (код кога се „обичне” и сезонске компоненте сабирају, а не множе).

8.4.2 Примери $SARIMA$ модела

Овде су наведени неки од $SARIMA$ модела који се често користе.

1. сезонски $AR(1)_s$ модел ($ARIMA(0, 0, 0) \times (1, 0, 0)_s$):

$$(1 - \Phi_1 L^s)X_t = e_t, \quad |\Phi_1| < 1$$

Ово је стационарна серија, чију аутоковаријациону функцију можемо да одредимо на уобичајени начин. Добија се:

$$\gamma_k = \begin{cases} \Phi_1 \gamma_{k-s} + \sigma^2, & k = 0 \\ \Phi_1 \gamma_{k-s}, & k > 0 \end{cases}$$

Расписивањем ових једнакости за различите вредности k добија се

$$\gamma_{ks} = \frac{\Phi_1^k \sigma^2}{1 - \Phi_1^2}, k = 0, 1, 2, \dots \text{ и } \gamma_l = 0, \quad l \neq ks,$$

тј.

$$\rho_{ks} = \Phi_1^k, k = 0, 1, 2, \dots \text{ и } \rho_l = 0, \quad l \neq ks,$$

Значи, на корелограму се појављују ненула вредности коефицијената само за кашњења $s, 2s, 3s, \dots$, и опадају по модулу (слично као код $AR(1)$ модела).

2. сезонски случајни ход ($ARIMA(0, 0, 0) \times (0, 1, 0)_s$):

$$(1 - L^s)X_t = e_t$$

Ово је нестационарни модел, чија аутокорелациона функција се не може одредити директно. За аутокорелационе коефицијенте важи

$$\rho_{ks} \rightarrow 1, k = 0, 1, 2, \dots \text{ и } \rho_l = 0, \quad l \neq ks,$$

што се добија из резултата за претходни модел кад $\Phi_1 \rightarrow 1$.

3. „ваздухопловни” модел ($ARIMA(0, 1, 1) \times (0, 1, 1)_s$):

$$(1 - L^s)(1 - L)X_t = (1 - \theta_1 L)(1 - \Theta_1 L^s)e_t, \quad |\theta_1|, |\Theta_1| < 1$$

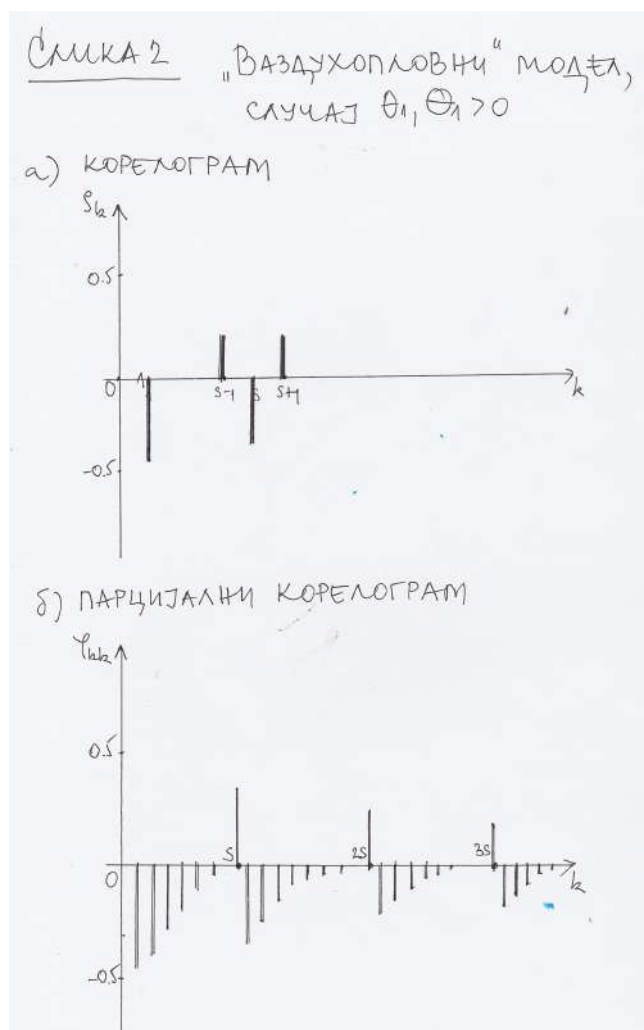
Назив овог модела потиче од тога што се модел користио за описивање краћа путника у ваздушном саобраћају. Ово је нестационарна серија (има и обичан и сезонски јединични корен). Нека је

$$Y_t = (1 - L^s)(1 - L)X_t.$$

Тада је $\{Y_t\}$ стационарна серија за коју важи (проверити!):

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ -\frac{\theta_1}{1+\theta_1^2}, & k = 1 \\ \frac{\theta_1\Theta_1}{(1+\theta_1^2)(1+\Theta_1^2)}, & k = s-1, k = s+1 \\ -\frac{\Theta_1}{1+\Theta_1^2}, & k = s \\ 0, & \text{у осталим случајевима} \end{cases}$$

Одатле се може закључити како изгледа корелограм серије, која је претходно једном обично и једном сезонски диференцирана. Један од случајева нацртан је на Слици 2.



Слика 8:

8.5 Прогнозирање $ARIMA$ и $SARIMA$ модела

$ARIMA$ и $SARIMA$ модели су, у општем случају, нестационарне серије, па се и особине прогнозе мењају. Основна идеја прогнозирања биће приказана за $ARIMA$ моделе, а слично важи и за $SARIMA$ моделе.

$ARIMA(p, d, q)$ модел

$$\Phi(L)(1-L)^d X_t = \Theta(L)e_t,$$

за који претпостављамо да је инвертибилан, можемо да запишемо као:

$$(\Theta(L))^{-1}\Phi(L)(1-L)^d X_t = e_t,$$

тј. можемо да одредимо коефицијенте $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots$ тако да важи

$$(1 + \pi_1 L + \pi_2 L^2 + \dots) X_t = e_t,$$

тј.

$$X_t = -(\pi_1 L + \pi_2 L^2 + \dots) X_t + e_t.$$

Сад можемо да прогнозирамо $AR(\infty)$ модел који смо добили (за h корака унапред):

$$\hat{X}_n(h) = E(X_{n+h} | \mathcal{F}_n) = E(-(\pi_1 L + \pi_2 L^2 + \dots) X_{n+h} + e_{n+h} | \mathcal{F}_n)$$

и

$$\hat{e}_n(h) = X_{n+h} - \hat{X}_n(h).$$

Сад ћемо метод илустровати на једном примеру.

Дат је модел $ARIMA(0, 1, 1)$:

$$(1 - L)X_t = (1 - \theta_1 L)e_t, \quad |\theta_1| < 1$$

Овде се добија:

$$(1 - L)(1 - \theta_1 L)^{-1} X_t = e_t,$$

$$(1 - L)(1 + \theta_1 L + \theta_1^2 L^2 + \theta_1^3 L^3 + \dots) X_t = e_t,$$

$$(1 + (\theta_1 - 1)L + \theta_1(\theta_1 - 1)L^2 + \theta_1^2(\theta_1 - 1)L^3 + \dots) X_t = e_t.$$

Одатле се добија прогноза:

$$\begin{aligned} \hat{X}_n(1) &= E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) \\ &= E(e_{n+1} + (1 - \theta_1)X_n + \theta_1(1 - \theta_1)X_{n-1} + \theta_1^2(1 - \theta_1)X_{n-2} + \dots | \mathcal{F}_n) \\ &= (1 - \theta_1)X_n + \theta_1(1 - \theta_1)X_{n-1} + \theta_1^2(1 - \theta_1)X_{n-2} + \dots \end{aligned}$$

и

$$\hat{e}_n(1) = e_{n+1}.$$

Понављањем овог поступка, добија се прогноза за h корака унапред (израчунати!) и одговарајућа грешка прогнозе (проверити!):

$$\hat{e}_n(h) = e_{n+h} + (1 - \theta_1)(e_{n+h-1} + e_{n+h-2} + \dots + e_{n+1}).$$

За грешку прогнозе важи

$$D(\hat{e}_n(h)) = \sigma^2(1 + (h-1)(1 - \theta_1)^2) \rightarrow +\infty, \quad h \rightarrow +\infty$$

Овде се види суштинска разлика између прогнозирања стационарних и нестационарних модела. Генерално важи:

- за $ARIMA$ модел:

$$D(\hat{e}_n(h)) \rightarrow +\infty, \quad h \rightarrow +\infty,$$

- за $ARMA$ модел:

$$D(\hat{e}_n(h)) \rightarrow D(X_{n+h}), \quad h \rightarrow +\infty.$$

Дакле, прогнозирање нестационарних модела на овај начин је мање успешно од прогнозирања стационарних серија.

У овој лекцији детаљније разматрамо још две врсте нестационарности (постојање структурног лома и условну хетероскедастичност), које се врло често појављују у финансијским временским серијама, а нису описане да сада разматрајемо моделима.

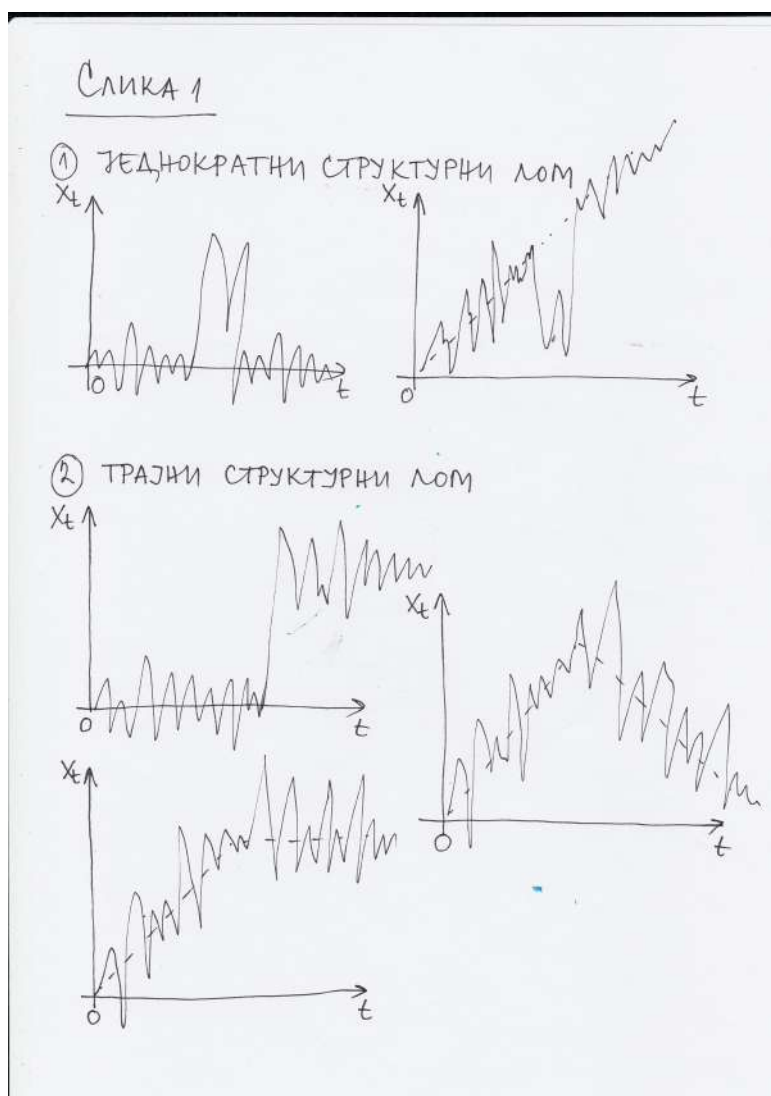
8.7 Моделовање структурног лома

На почетку курса смо дефинисали **структурни лом** као **скуп опсервација који није сагласан са претходним током временске серије**. Структурни лом се често појављује у финансијским временским серијама и обично је последица некакве интервенције.

Према последицама има на кретање временске серије, можемо разликовати две врсте структурног лома:

1. **једнократни**: ако се појави неколико нестандартних опсервација, а онда се серија враћа на свој уобичајени ток;
2. **трајни**: изазива трајну промену у кретању временске серије (промену средње вредности и/или тренда).

Различите врсте структурног лома нацртане су на Слици 1.



За моделовање структурног лома постоје специјални модели, који се могу „уградiti” у неки други модел временске серије. На пример, ако желимо да укључимо могућност појаве структурног лома у $ARMA(p, q)$ модел, то изгледа овако:

$$(1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p)(X_t - \mu(L)I_t) = (1 - \theta_1 L - \dots - \theta_q L^q)e_t, \quad (16)$$

или, другачије записано,

$$X_t = \mu(L)I_t + \frac{1 - \theta_1 L - \dots - \theta_q L^q}{1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p} e_t.$$

Сад ћемо разјаснити шта су величине које се појављују у моделу (16).

I_t је **вештачка променљива**, која може бити једна од две врсте:

- **импулсна вештачка променљива:**

$$I_t = IM_t = \begin{cases} 1, & t = TL; \\ 0, & t \neq TL, \end{cases}$$

- **степеник вештачка променљива:**

$$I_t = S_t = \begin{cases} 1, & t \geq TL; \\ 0, & t < TL. \end{cases}$$

Веза између степеник и импулсне вештачке променљиве је:

$$IM_t = S_t - S_{t-1} = (1 - L)S_t.$$

Даље,

$$\mu(L) = \frac{\omega(L)}{\lambda(L)} L^k,$$

где је

$$\begin{aligned} \omega(L) &= \omega_0 - \omega_1 L - \dots - \omega_m L^m, \\ \lambda(L) &= 1 - \lambda_1 L - \dots - \lambda_r L^r. \end{aligned}$$

Полином $\omega(L)$ односи се на **једнократни ефекат интервенције**, а $\lambda(L)$ служи да моделује **трајни ефекат интервенције**. То је због тога што полином у имениоцу, кад се „пребаци у бројилац” разломка постаје бесконачни ред.

Параметар k представља време које треба да протекне да би се дејство интервенције осетило у серији. На пример, ако је $k = 0$, лом се примети у серији у тренутку кад се дешава, а ако је $k = 5$, онда се лом примети 5 корака даље у будућности.

Пример 8.3. Сад ћемо детаљније размотрити пример, најједноставнију стационарну серију (бели шум), у коју је укључен члан:

$$\mu(L) = \frac{\omega_0}{1 - \lambda L} L, \quad |\lambda| \leq 1.$$

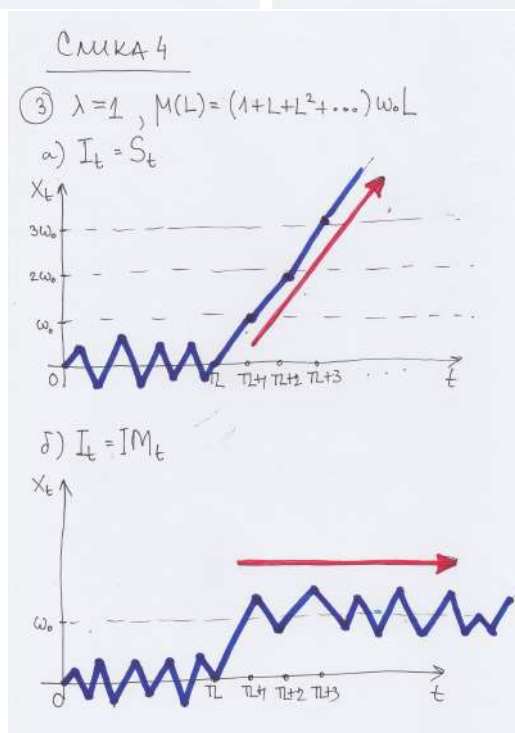
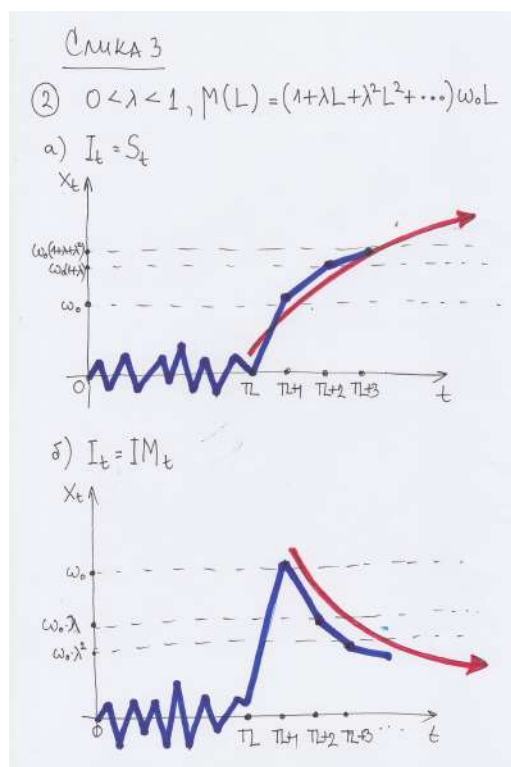
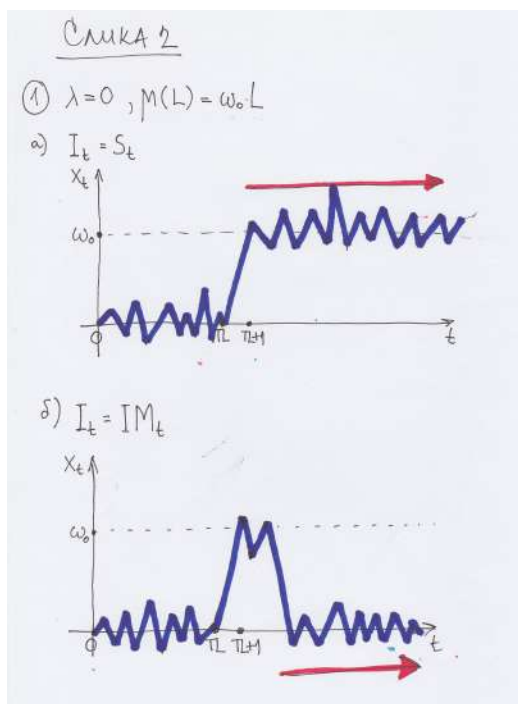
Значи, модел за ту временску серију је:

$$X_t = \mu(L)I_t + e_t.$$

Сви могући случајеви који ту могу да настану су објашњени и нацртани на сликама 2, 3 и 4.

У пракси, често није познат тренутак структурног лома, TL , па се и он мора оценити/проценити (на пример, на основу графичког приказа серије).

Такође, ако у серији постоји структурни лом, мењају се особине серије (на пример, повећава се коефицијент спљоштености). Тестови јединичног корена, се такође, морају прилагодити тој ситуацији.



8.8 Моделовање условне хетероскедастичности

Кад је у питању дисперзија серије, можемо да разликујемо следеће појмове:

1. хомоскедастичност:

$$D(X_t) = \sigma^2 \text{ (дисперзија серије је константна)}$$

2. хетероскедастичност:

$$D(X_t) = \sigma_t^2 \text{ (дисперзија серије зависи од } t \text{)}$$

3. условна хетероскедастичност: $(\mathcal{F}_{t-1} = \sigma\{X_1, \dots, X_{t-1}\})$

$$D(X_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \sigma_t^2 \text{ (условна дисперзија серије зависи од } t\text{)}$$

Овде ћемо детаљније размотрити трећи случај, условну хетероскедастичност. Другачије речено, то је особина да је условна дисперзија (условна у односу на претходни ток серије) променљива. Ова појава се често назива и **волатилност**. Постоје посебне врсте модела, *ARCH* и *GARCH* модели, којима се описује ова променљивост, тј. промена $D(X_t|\mathcal{F}_{t-1})$ кроз време.

8.8.1 *ARCH*(p) модели

Претпостављамо да је $\{X_t\}$ слабо стационарна временска серија. *ARCH* је скраћеница за Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. Модел реда p је дефинисан са:

$$\begin{aligned} X_t &= \sigma_t e_t, \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2, \end{aligned}$$

где је $\{e_t\}$ Гаусов бели шум, а $\alpha_0 > 0$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_p \geq 0$ параметри модела.

За ову серију важи:

$$E(X_t) = E(E(X_t|\mathcal{F}_{t-1})) = E(\sigma_t E(e_t)) = 0.$$

Специјално, детаљније ћемо размотрити *ARCH*(1) модел:

$$\begin{aligned} X_t &= \sigma_t e_t, \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2, \end{aligned}$$

где је $\alpha_0 > 0$ и $\alpha_1 \geq 0$.

Кад квадрирамо прву једначину модела и искористимо другу једначину, добијамо:

$$X_t^2 = (\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2) e_t^2. \quad (17)$$

Одатле следи:

$$\begin{aligned} E(X_t^2) &= E((\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2) e_t^2) \\ &= \alpha_0 \sigma^2 + E(E(X_{t-1}^2 e_t^2 | \mathcal{F}_{t-1})) \\ &= \alpha_0 \sigma^2 + E(X_{t-1}^2 E(e_t^2 | \mathcal{F}_{t-1})) \\ &= \alpha_0 \sigma^2 + E(X_{t-1}^2 E(e_t^2)) \\ &= \alpha_0 \sigma^2 + \alpha_1 \sigma^2 E(X_{t-1}^2), \end{aligned}$$

па се то своди на

$$D(X_t) = \alpha_0 \sigma^2 + \alpha_1 \sigma^2 D(X_t),$$

одакле се добија

$$E(X_t^2) = D(X_t) = \frac{\alpha_0 \sigma^2}{1 - \alpha_1 \sigma^2}.$$

Ако дисперзију белог шума, σ^2 , сматрамо познатом (или можемо да је оценимо), онда можемо да изведемо **услов стационарности** који се овде своди на то да дисперзија серије буде коначна. Једноставности ради, претпоставићемо да је $\sigma^2 = 1$ (аналогно и за остале вредности σ^2). Добијамо:

$$E(X_t^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}, \quad (18)$$

што је коначно за $\alpha_1 < 1$.

Сада ћемо да израчунамо $E(X_t^4)$.

За моменте вишег реда k Гаусовог белог шума важи

$$E(e_t^k) = \begin{cases} \sigma^{2m} \prod_{j=1}^m (2j-1), & k = 2m, m \in \mathbb{N}; \\ 0, & k = 2m+1. \end{cases}$$

Квадрирањем једнакости (17) и применом (18) добијамо

$$\begin{aligned} E(X_t^4) &= E(E(X_t^4 | \mathcal{F}_{t-1})) \\ &= E(E((\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2)^2 e_t^4 | \mathcal{F}_{t-1})) \\ &= E((\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2)^2 E(e_t^4)) \\ &= (\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 \cdot \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} + \alpha_1^2 E(X_{t-1}^4)) \cdot 3 \\ &= \frac{3\alpha_0^2 + 3\alpha_0^2\alpha_1}{1 - \alpha_1} + 3\alpha_1^2 E(X_{t-1}^4), \end{aligned}$$

па је

$$(1 - 3\alpha_1^2)E(X_t^4) = 3\frac{\alpha_0^2(1 + \alpha_1)}{1 - \alpha_1},$$

тј.

$$E(X_t^4) = \frac{3\alpha_0^2(1 + \alpha_1)}{(1 - 3\alpha_1^2)(1 - \alpha_1)}.$$

Да би било $E(X_t^4) \geq 0$ (као што мора да буде), треба да важи $0 \leq \alpha_1^2 < \frac{1}{3}$, тј. добили смо услов који је мало строжији од услова стационарности модела.

Ово правило важи и у општем случају. Да би постојали моменти вишег реда, услови које треба да задовољавају параметри модела постају све строжији.

Даље, за серију $\{X_t\}$ важи

$$\frac{E(X_t^4)}{E(X_t^2)^2} = \frac{3(1 - \alpha_1^2)}{1 - 3\alpha_1^2} > 3.$$

Може се закључити да ова серија има расподелу чији реп је тежи од репа нормалне расподеле. То може да олакша препознавање овог модела.

Да видимо како се може прогнозирати дисперзија серије на основу $ARCH(p)$ модела.

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_n^2(1) &= \alpha_0 + \alpha_1 X_n^2 + \alpha_2 X_{n-1}^2 + \cdots + \alpha_p X_{n-p+1}^2 \\ \hat{\sigma}_n^2(2) &= \alpha_0 + \alpha_1 \hat{\sigma}_n^2(1) + \alpha_2 X_n^2 + \cdots + \alpha_p X_{n-p+2}^2 \\ &\vdots \\ \hat{\sigma}_n^2(h) &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \hat{\sigma}_n^2(h-i) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Искористили смо:

$$\hat{\sigma}_n^2(h-i) = X_{n+h-i}^2, \quad h-i \leq 0$$

8.8.2 Предности и мане ARCH модела

Ова врста модела има и предности и мане. Предност, осим једноставности самог модела, је што модел предвиђа кластере великих шокова (ако се деси нагли скок дисперзије у серији, серија се неће одмах „смирити”), што и јесте реални случај. Основне мане модела би биле то што не прави разлику између позитивних и негативних шокова (што може да буде од значаја у пракси) и што често предвиди већу волатилност него што је то реално случај.

8.8.3 GARCH(p, q) модел

GARCH(p, q) модел (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) је директно уопштења ARCH(p) модела и има облик

$$\begin{aligned} X_t &= \sigma_t \epsilon_t, \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2, \end{aligned}$$

где је $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1, \dots, \alpha_p \geq 0$, $\beta_1, \dots, \beta_q \geq 0$.

Како препознати за коју серију би овај модел могао бити адекватан?

Ако се уведе смена:

$$\tau_t = X_t^2 - \sigma_t^2,$$

добива се

$$X_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j X_{t-j}^2 + \tau_t - \sum_{j=1}^q \beta_j \tau_{t-j}$$

Може се показати да за низ $\{\tau_t\}$ важи

$$E(\tau_t) = 0, \quad \gamma_k = E(\tau_t \tau_k) = 0, \quad \text{за } k > 0, \quad (19)$$

што значи да се овај низ понаша „отприлике” као бели шум. Заиста, чланови низа су некорелисани, јер за $t > k$ важи

$$\begin{aligned} E(\tau_t \tau_k) &= E(E((X_t^2 - \sigma_t^2)(X_k^2 - \sigma_k^2) | \mathcal{F}_k)) \\ &= E((X_k^2 - \sigma_k^2) E(X_t^2 - \sigma_t^2 | \mathcal{F}_k)) \\ &= E((X_k^2 - \sigma_k^2) (E(X_t^2 | \mathcal{F}_k) - \sigma_t^2)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Због тога, кад се уведе смена $Y_t = X_t^2$, модел (19) се понаша „приближно” као ARMA(max{p, q}, q) модел за серију Y_t .

Остале особине GARCH модела се могу извести слично као у случају ARCH модела.

Напомена 8.1. На основу онога што смо раније научили о ARMA моделима, и сада о GARCH моделима, можемо да закључимо да ARMA моделује $E(X_t | \mathcal{F}_{t-1})$, а GARCH моделује $E(\sigma_t^2 | \mathcal{F}_{t-1})$. То се може искомбиновати на једном моделу, на пример:

$$X_t = \phi_0 + \sum_{j=1}^p \phi_j X_{t-j} + \sum_{k=1}^q \theta_k \omega_{t-k} + \omega_t,$$

где је

$$E(\omega_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0$$

u

$$\sigma_t^2 = E(\omega_t^2 | \mathcal{F}_{t-1}) = \alpha_0 + \sum_{m=1}^a \alpha_m \omega_{t-m}^2 + \sum_{n=1}^b \beta_n \sigma_{t-n}^2.$$

9 Вишедимензионе временске серије

До сада смо разматрали искључиво једнодимензионе временске серије, а сада прелазимо на проучавање међусобне зависности две или више једнодимензионих серија и одређивање модела који описују ту зависност. Мотивација за то је чињеница да тренутна вредност посматране серије често не зависи само од претходних вредности исте серије, већ и од претходних вредности више сродних серија (које описују неке друге особине посматране појаве). То је нарочито очигледно у временским серијама које описују различите финансијске или економске величине. Циљ је конструисати вишедимензиони модел који ће описати кретање и међусобне утицаје ових серија.

9.1 Векторске временске серије

Дефиниција 9.1. Векторска временска серија $\mathbf{X}_t$ дата је са:

$$\mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \\ \dots \\ X_{mt} \end{bmatrix}, \quad t = 1, 2, \dots,$$

где су $X_{1t}, X_{2t}, \dots, X_{mt}$ једнодимензионе временске серије, а m је **димензија** серије.

Дефиниција 9.2. Векторска временска серија $\mathbf{X}_t$ је **слабо стационарна** ако важе услови:

1.

$$E(\mathbf{X}_t) = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_m \end{bmatrix} = \boldsymbol{\mu} = \text{const.}, \quad t = 1, 2, \dots$$

2.

$$\text{cov}(X_{it}, X_{js}) = g(t-s), \quad i, j = 1, \dots, m, \quad t, s = 1, 2, \dots$$

Напомена 9.1. Из стационарности компоненти $X_{1t}, X_{2t}, \dots, X_{mt}$ не следи стационарност серије $\mathbf{X}_t$. Објасните!

Дефиниција 9.3. Функција аутоковаријационе матрице векторске серије $\mathbf{X}_t$ је:

$$\Gamma_k = E(\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}_{t-k} - \boldsymbol{\mu})^T = \begin{bmatrix} \gamma_{11}(k) & \gamma_{12}(k) & \dots & \gamma_{1m}(k) \\ \gamma_{21}(k) & \gamma_{22}(k) & \dots & \gamma_{2m}(k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{m1}(k) & \gamma_{m2}(k) & \dots & \gamma_{mm}(k) \end{bmatrix},$$

где је

$$\gamma_{ii}(k) = E(X_{it} - \mu_i)(X_{i,t-k} - \mu_i), \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

аутоковаријациони коефицијент са кашњењем k i -те компоненте, а

$$\gamma_{ij}(k) = E(X_{it} - \mu_i)(X_{j,t-k} - \mu_j), \quad i, j = 1, \dots, m, \quad i \neq j, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

унакрсни (cross-) коваријациони коефицијент са кашњењем k за компоненте i и j .

Напомена 9.2. За $k = 0$ добија се коваријациона матрица вектора $\mathbf{X}_t$.

Дефиниција 9.4. Функција аутокорелационе матрице векторске серије $\mathbf{X}_t$ је:

$$\boldsymbol{\rho}_k = \begin{bmatrix} \rho_{11}(k) & \rho_{12}(k) & \dots & \rho_{1m}(k) \\ \rho_{21}(k) & \rho_{22}(k) & \dots & \rho_{2m}(k) \\ & & \dots & \\ \rho_{m1}(k) & \rho_{m2}(k) & \dots & \rho_{mm}(k) \end{bmatrix},$$

где је

$$\rho_{ij}(k) = \frac{\gamma_{ij}(k)}{\sqrt{\gamma_{ii}(0) \cdot \gamma_{jj}(0)}}, \quad i, j = 1, \dots, m, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Матрице $\boldsymbol{\rho}_k$ и $\boldsymbol{\Gamma}_k$ имају следеће особине:

1. обе матрице су ненегативно дефинитне;
2. $\boldsymbol{\Gamma}_{-k} = \boldsymbol{\Gamma}_k^T$, $\boldsymbol{\rho}_{-k} = \boldsymbol{\rho}_k^T$;
3. оцене ових матрица, на основу реализоване временске серије $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ се могу добити на следећи начин:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\mu}} &= \bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbf{x}_t, \\ \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_k &= \frac{1}{n} \sum_{t=k+1}^n (\mathbf{x}_t - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_{t-k} - \bar{\mathbf{x}})^T \\ \hat{\boldsymbol{\rho}}_k &= \frac{1}{n} \hat{\mathbf{D}}^{-\frac{1}{2}} \cdot \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_k \cdot \hat{\mathbf{D}}^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

где је $\hat{\mathbf{D}}$ дијагонална матрица чији су елементи оцене дисперзија компоненти.

Дефиниција 9.5. m -димензиони вектор белог шума $\boldsymbol{\epsilon}_t$ је

$$\boldsymbol{\epsilon}_t = \begin{bmatrix} \epsilon_{1t} \\ \epsilon_{2t} \\ \dots \\ \epsilon_{mt} \end{bmatrix}$$

где је

$$E(\boldsymbol{\epsilon}_t) = 0, \quad E(\boldsymbol{\epsilon}_t \boldsymbol{\epsilon}_{t-k}^T) = \begin{cases} \boldsymbol{\Sigma}, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases},$$

где је $\boldsymbol{\Sigma}$ симетрична, позитивно дефинитна матрица типа $m \times m$.

Овде важи уопштење Волдове теореме о разлагању:

Теорема 9.1. Свака стационарна m -димензиона временска серија $\mathbf{X}_t$ се може приказати у облику

$$\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\epsilon}_t + \boldsymbol{\psi}_1 \boldsymbol{\epsilon}_{t-1} + \boldsymbol{\psi}_2 \boldsymbol{\epsilon}_{t-2} + \dots,$$

где су сви коефицијенти $\boldsymbol{\psi}_k$ матрице типа $m \times m$. То је **векторски модел покретних просека** бесконачног реда, скраћено $VMA(\infty)$ модел.

Напомена 9.3. Сетимо се, уз (једnodимензиони) линеарни процес смо наводили услов да је ред који чине коефицијенти таквог процеса апсолутно сумабилан. Одговарајући услов за VMA процесе би био да је ред који чине елементи у i -тој врсти и j -тој колони матрице

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\psi_k|$$

апсолутно сумабилан, за све $1 \leq i, j \leq m$.

Дефиниција 9.6. m -димензиони $ARMA(p, q)$ модел ($VARMA(p, q)$) је:

$$(\mathbf{I}_m - \boldsymbol{\Phi}_1 L - \dots - \boldsymbol{\Phi}_p L^p) \mathbf{X}_t = (\mathbf{I}_m - \boldsymbol{\Theta}_1 L - \dots - \boldsymbol{\Theta}_q L^q) \boldsymbol{\epsilon}_t,$$

где су сви коефицијенти матрице типа $m \times m$, а $\mathbf{I}_m$ је јединична матрица типа $m \times m$.

Напомена 9.4. За изградњу $VARMA$ модела користи се иста *Bok - Jenkins* методологија (вишedимензиони информациони критеријуми и тестови). Процес идентификације модела је знатно сложенији него у једnodимензионом случају, због великог броја параметара. Зато се $VARMA$ модели често замењују једноставнијим VAR моделима.

Дефиниција 9.7. m -димензиони $VAR(p)$ модел је:

$$(\mathbf{I}_m - \boldsymbol{\Phi}_1 L - \dots - \boldsymbol{\Phi}_p L^p) \mathbf{X}_t = \boldsymbol{\epsilon}_t.$$

Пример 9.1. Најједноставнији пример VAR модела је $VAR(1)$ модел димензије 2:

$$\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\Phi}_1 \mathbf{X}_{t-1} + \boldsymbol{\epsilon}_t.$$

где је

$$\boldsymbol{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\epsilon}_t = \begin{bmatrix} \epsilon_{1t} \\ \epsilon_{2t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \end{bmatrix}.$$

Овде је

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} E(\epsilon_{1t}^2) & E(\epsilon_{1t}\epsilon_{2t}) \\ E(\epsilon_{2t}\epsilon_{1t}) & E(\epsilon_{2t}^2) \end{bmatrix}$$

Пример 9.2. $VAR(2)$ модел димензије 2 је:

$$\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\Phi}_1 \mathbf{X}_{t-1} + \boldsymbol{\Phi}_2 \mathbf{X}_{t-2} + \boldsymbol{\epsilon}_t.$$

где је

$$\boldsymbol{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} \phi_{11}^{(1)} & \phi_{12}^{(1)} \\ \phi_{21}^{(1)} & \phi_{22}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} \phi_{11}^{(2)} & \phi_{12}^{(2)} \\ \phi_{21}^{(2)} & \phi_{22}^{(2)} \end{bmatrix},$$

а $\boldsymbol{\epsilon}_t$ је исто што и у претходном примеру.

9.2 Услов стационарности VAR модела

Треба одредити под којим условима се $VAR(p)$ процес може приказати у облику векторског линеарног процеса (стационарног $VMA(\infty)$ модела).

Прво разматрамо случај $VAR(1)$ модела димензије m :

$$\mathbf{X}_t = \Phi_1 \mathbf{X}_{t-1} + \epsilon_t.$$

„Расписивањем” модела се добија:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_t &= \Phi_1(\Phi_1 \mathbf{X}_{t-2} + \epsilon_{t-1}) + \epsilon_t \\ &= \Phi_1^2 \mathbf{X}_{t-2} + \Phi_1 \epsilon_{t-1} + \epsilon_t \\ &= \Phi_1^2(\Phi_1 \mathbf{X}_{t-3} + \epsilon_{t-2}) + \Phi_1 \epsilon_{t-1} + \epsilon_t \\ &= \Phi_1^3 \mathbf{X}_{t-3} + \Phi_1^2 \epsilon_{t-2} + \Phi_1 \epsilon_{t-1} + \epsilon_t \\ &= \dots \\ &= \epsilon_t + \Phi_1 \epsilon_{t-1} + \Phi_1^2 \epsilon_{t-2} + \dots \end{aligned}$$

Из овога следи да, ако хоћемо да ова векторска серија буде стационарна, мора да важи:

$$\Phi_1^n \rightarrow \mathbf{0}, \quad n \rightarrow \infty.$$

С друге стране, важи

$$\Phi_1^n = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{D}^n \cdot \mathbf{A},$$

где је

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_m \end{bmatrix},$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ сопствене вредности матрице Φ_1 , а $\mathbf{A}$ матрица чије су врсте сопствени вектори матрице Φ_1 .

Вредности $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ се добијају као решења једначине

$$\det(\Phi_1 - \lambda \mathbf{I}_m) = 0.$$

серија ће бити стационарна ако важи

$$|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_m| < 1$$

што је **услов стационарности** за овај модел.

Даље, изводимо услов стационарности за $VAR(p)$ модел димензије m :

$$\mathbf{X}_t = \Phi_1 \mathbf{X}_{t-1} + \Phi_2 \mathbf{X}_{t-2} + \dots + \Phi_p \mathbf{X}_{t-p} + \epsilon_t. \quad (20)$$

Овде је:

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} \phi_{11}^{(i)} & \phi_{12}^{(i)} & \dots & \phi_{1m}^{(i)} \\ \phi_{21}^{(i)} & \phi_{22}^{(i)} & \dots & \phi_{2m}^{(i)} \\ & \dots & & \\ \phi_{m1}^{(i)} & \phi_{m2}^{(i)} & \dots & \phi_{mm}^{(i)} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Овај модел се може представити као $VAR(1)$ модел димензије mp :

$$\mathbf{X}_t^* = \Phi_1^* \mathbf{X}_{t-1}^* + \epsilon_t^*, \quad (21)$$

где је

$$\Phi_1^* = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_m & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_m & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ & & \dots & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \\ \Phi_p & \Phi_{p-1} & \dots & \Phi_3 & \Phi_2 & \Phi_1 \end{bmatrix}_{mp \times mp} \quad \mathbf{X}_t^* = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{t-p+1} \\ \mathbf{X}_{t-p+2} \\ \dots \\ \mathbf{X}_{t-1} \\ \mathbf{X}_t \end{bmatrix}_{mp \times 1} \quad \epsilon_t^* = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \dots \\ \mathbf{0} \\ \epsilon_t \end{bmatrix}_{mp \times 1}$$

Ово се једноставно докаже тако што се матрична једначина (21) запише као систем једначина, па се примети да се у том систему појављују све једначине које се појављују у (20) и неколико једнакости облика „ $0 = 0$ ”. Проверите!

Пример 9.3. *VAR(2) модел димензије 3:*

$$\begin{bmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \\ X_{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11}^{(1)} & \phi_{12}^{(1)} & \phi_{13}^{(1)} \\ \phi_{21}^{(1)} & \phi_{22}^{(1)} & \phi_{23}^{(1)} \\ \phi_{31}^{(1)} & \phi_{32}^{(1)} & \phi_{33}^{(1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{1,t-1} \\ X_{2,t-1} \\ X_{3,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_{11}^{(2)} & \phi_{12}^{(2)} & \phi_{13}^{(2)} \\ \phi_{21}^{(2)} & \phi_{22}^{(2)} & \phi_{23}^{(2)} \\ \phi_{31}^{(2)} & \phi_{32}^{(2)} & \phi_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{1,t-2} \\ X_{2,t-2} \\ X_{3,t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{1,t} \\ \epsilon_{2,t} \\ \epsilon_{3,t} \end{bmatrix}$$

се своди на VAR(1) модел димензије 6:

$$\begin{bmatrix} X_{1,t-1} \\ X_{2,t-1} \\ X_{3,t-1} \\ X_{1,t} \\ X_{2,t} \\ X_{3,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \phi_{11}^{(2)} & \phi_{12}^{(2)} & \phi_{13}^{(2)} & \phi_{11}^{(1)} & \phi_{12}^{(1)} & \phi_{13}^{(1)} \\ \phi_{21}^{(2)} & \phi_{22}^{(2)} & \phi_{23}^{(2)} & \phi_{21}^{(1)} & \phi_{22}^{(1)} & \phi_{23}^{(1)} \\ \phi_{31}^{(2)} & \phi_{32}^{(2)} & \phi_{33}^{(2)} & \phi_{31}^{(1)} & \phi_{32}^{(1)} & \phi_{33}^{(1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{1,t-2} \\ X_{2,t-2} \\ X_{3,t-2} \\ X_{1,t-1} \\ X_{2,t-1} \\ X_{3,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \epsilon_{1t} \\ \epsilon_{2t} \\ \epsilon_{3t} \end{bmatrix}$$

Даље се на описани начин одређују $\lambda_1, \dots, \lambda_6$, матрице **D** и **A**.

Из претходних разматрања следи услов стационарности VAR(p) модела и закључак:

1. Ако су све сопствене вредности матрице Φ_1^* по модулу мање од 1, серија је **стационарна**.
2. Ако су неке сопствене вредности матрице Φ_1^* по модулу једнаке 1, а остале по модулу мање од 1, серија је **нестационарна (има јединични корен)**.
3. Ако постоји сопствена вредност матрице Φ_1^* која је по модулу већа од 1, серија је **експлозивна**.

Тестови јединичног корена, као и технике оцењивања непознатих параметара модела се прилагођавају вишедимензионом случају и формулишу уз помоћ матричног рачуна. Више о томе се може прочитати у књизи Младеновић, Нојковић „Примењена анализа временских серија”.

9.3 Вишедимензиони ARCH и GARCH модели

Модели којима се описује условна хетероскедастичност у временској серији такође се могу уопштити на вишедимензиони случај.

На пример, $ARCH(p)$ модел димензије m се може задати на следећи начин:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_t &= \Sigma_t^{\frac{1}{2}} \epsilon_t, \\ \Sigma_t &= \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \alpha_j \text{vec}(\mathbf{X}_{t-j} \mathbf{X}_{t-j}^T), \end{aligned}$$

где је

- $\mathbf{X}_t$: m -димензиона временска серија,
- ϵ_t : m -димензиони бели шум,
- Σ_t : условна коваријациона матрица случајног вектора $\mathbf{X}_t$ (у односу на σ -алгебру генерисану са $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_{t-1}$),
- $\alpha_0 : \dots, \alpha_p$ одговарајуће матрице коефицијената,
- $\text{vec}(\cdot)$: нова операција, која „ређа” елементе колона матрице испод главне дијагонале у једну колону.

На сличан начин се могу уопштити и $GARCH$ модели (добијени модел се означава са $MGARCH$). Занимљиво је да се и $MGARCH$ модели одговарајућом сменом могу свести на $VARMA$ моделе, као и у једнодимензионом случају.

Напомена 9.5. *О вишедимензионим $ARCH$ и $GARCH$ моделима, као и осталим аспектима моделовања вишедимензионих временских серија, се може детаљније проучити у књизи Helmut Lutkepohl „New introduction to multiple time series analysis”.*

До сада смо дефинисали различите врсте модела за вишедимензионе временске серије (VAR , VMA и $VARMA$ моделе). У овој лекцији разматрамо два нова односа у којима се могу наћи две једнодимензионе серије, **узрочност** и **коинтеграцију**. Оба концепта се могу проширити на случај кад имамо више од две једнодимензионе серије.

Концепте који ће овде бити разматрани увели су математичари Robert Engle и Clive Granger.

9.4 Узрочност временских серија

Дефиниција 9.8. (Granger) Серија $\{X_t\}$ **узрокује** серију $\{Y_t\}$ ако се за серију Y_t добија тачнија (прецизнија) прогноза када се знају вредности серије X_t у прошлости.

Сада ћемо видети шта то заправо значи, на примеру $VAR(2)$ модела димензије 2.

$$\begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11}^{(1)} & \phi_{12}^{(1)} \\ \phi_{21}^{(1)} & \phi_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{t-1} \\ Y_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_{11}^{(2)} & \phi_{12}^{(2)} \\ \phi_{21}^{(2)} & \phi_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{t-2} \\ Y_{t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{1t} \\ \epsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

или, у расписаном облику:

$$\begin{aligned} X_t &= \phi_{11}^{(1)} X_{t-1} + \phi_{12}^{(1)} Y_{t-1} + \phi_{11}^{(2)} X_{t-2} + \phi_{12}^{(2)} Y_{t-2} + \epsilon_{1t} \\ Y_t &= \phi_{21}^{(1)} X_{t-1} + \phi_{22}^{(1)} Y_{t-1} + \phi_{21}^{(2)} X_{t-2} + \phi_{22}^{(2)} Y_{t-2} + \epsilon_{2t} \end{aligned}$$

Ако серија $\{X_t\}$ не узрокује $\{Y_t\}$, онда у последњој једначини чланови $\phi_{21}^{(1)} X_{t-1}$ и $\phi_{21}^{(2)} X_{t-2}$ не доприносе много (не утичу много на вредност Y_t).

Узрочност се, у овом случају, проверава тестирањем хипотезе:

$$H_0 : X_t \text{ не узрокује } Y_t$$

против

$$H_1 : X_t \text{ узрокује } Y_t$$

тј.

$$H_0 : \phi_{21}^{(1)} = \phi_{21}^{(2)} = 0$$

против

$$H_1 : \phi_{21}^{(1)} \neq 0, \text{ или } \phi_{21}^{(2)} \neq 0$$

Постоје различити тестови, који користе различите тест статистике.

На пример, Granger-ова тест статистика се формира на следећи начин.

Нека је ω „мањи” модел (који при важењу H_0 има два параметра мање), а модел Ω „већи”. Ефективни узорак, на основу реализоване серије обима n , има $n - 2$ чланова (зато што је у питању модел другог реда). Тест статистика је:

$$F = \frac{\frac{RSS_{\omega} - RSS_{\Omega}}{2}}{\frac{RSS_{\Omega}}{(n-2)-4}} \sim F_{2, n-6},$$

где су са RSS означене резидуалне суме квадрата за одговарајуће моделе.

Хипотеза H_0 се прихвата за мале вредности F , а за велике вредности одбацује.

Концепт се слично примењује на било који други модел.

9.4.1 Значај појма узрочности временских серија

Тестирање узрочности серија је значајно зато што помаже да се модел поједностави. На овај начин, ако се пође од општег модела за вишедимензионе серије (у општем случају $VARMA$) могуће је елиминисати вишак коефицијената, који само отежавају рад са моделом, а не доприносе његовом квалитету.

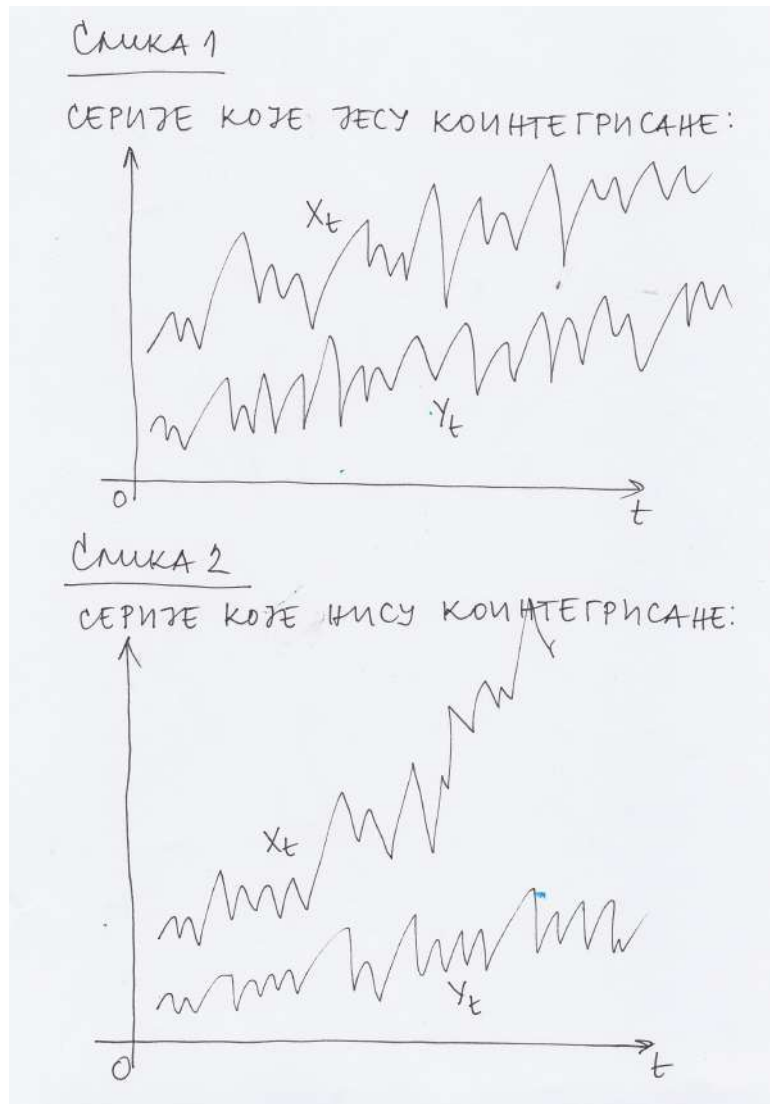
9.5 Коинтеграција временских серија

Дефиниција 9.9. Коинтеграција је појава да линеарна комбинација две или више нестационарних серија представља стационарну серију.

Прво ћемо размотрити неколико примера коинтегрисаних серија.

Пример 9.4. Ако је X_t серија која представља потрошњу неког производа, а Y_t зараду особе у истом периоду, онда су ове серије „отприлике” у вези $X_t = k \cdot Y_t$, за неко $k < 1$ (јер је потрошња неки део зараде). Значи, ове серије су коинтегрисане.

Пример 9.5. Ако су X_t и Y_t цене истог производа у различитим државама, а Z_t девизни курс. Веза између ових серија је $X_t = Y_t Z_t$, која није линеарна, али логаритмовањем се добија $\ln X_t = \ln Y_t + \ln Z_t$, што јесте линеарна веза. Дакле, трансформисане серије $\ln X_t$, $\ln Y_t$ и $\ln Z_t$ јесу коинтегрисане.



Пример 9.6. На Слици 1 нацртан је пример две серије које јесу коинтегрисане. Чини се да имају тренд истог типа (линеарни) и путање им се „не одвајају много” једна од друге током времена. Чини се да су истог реда интегрисаности, тј. потребно је по једно диференцирање да би се обе ове серије свеле на стационарне.

На Слици 2 дат је пример две серије које нису коинтегрисане. Путање им се „одвајају”, имају различит тип тренда (једна линеарни, а друга, можда, стохастички). Немају ни исти степен интегрисаности. Једна серија се једним диференцирањем своди на стационарну, а за другу серију нам се чини да то не важи.

Нека су дате серије $\{X_t\}$ и $\{Y_t\}$ за које претпостављамо да су у вези облика

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t.$$

Такође, претпостављамо да обе серије имају ниво интегрисаности 1, тј. да су ΔX_t и ΔY_t стационарне серије. Онда можемо да формирамо модел овог типа:

$$\Delta Y_t = \gamma_0(Y_{t-1} - \beta_0 - \beta_1 X_{t-1}) + \sum_{j=1}^k \gamma_{1j} \Delta Y_{t-j} + \sum_{j=1}^k \gamma_{2j} \Delta X_{t-j} + \epsilon_t, \quad (22)$$

где су $\gamma_0, \beta_0, \beta_1, \gamma_{1j}, \gamma_{2j}$ некакве константе.

Теорема 9.2. (*Granger - Johanson*) Ако су серије X_t и Y_t коинтегрисане, онда се њихова веза може представити преко модела (22), и обрнуто.

Шта представљају чланови у моделу (22)?

- Члан $Y_{t-1} - \beta_0 - \beta_1 X_{t-1}$ се односи на дугорочну везу између кретања једне и друге серије. Коефицијенти β_0 и β_1 се оцењују на основу реализација обе серије методом најмањих квадрата (формира се линеарни регресиони модел).
- γ_0 је **коефицијент прилагођавања**. Он мора бити негативан, да би се серија, када „испадне” из равнотеже, у следећем кораку „вратила” у оквир претпостављене релације.
- Чланови $\sum_{j=1}^k \gamma_{1j} \Delta Y_{t-j}$ и $\sum_{j=1}^k \gamma_{2j} \Delta X_{t-j}$ се односе на краткорочну динамику обе временске серије. Њихов број је одређен корелационом структуром серије (изгледом парцијалног корелограма код реализоване серије). Коефицијенти γ_{1j} и γ_{2j} (од којих неки могу бити једнаки нули, ако не постоји корелација на одговарајућем растојању) се оцењују методом најмањих квадрата.
- ϵ_t је **случајна грешка** (у најједноставнијем случају, бели шум).

9.5.1 Тестирање коинтеграције на основу реализованих серија

Претпостављамо да серије X_t и Y_t имају по један јединични корен и желимо да проверимо да ли између њих постоји веза облика $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t$. Нека су $x_1, \dots, x_n$ и $y_1, \dots, y_n$ реализације тих серија.

На основу реализација, формира се линеарни регресиони модел

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + e_t, \quad t = 1, \dots, n,$$

па се могу добити оцене $\hat{\beta}_0$ и $\hat{\beta}_1$.

Даље се формира серија резидуала:

$$r_t = y_t - \hat{y}_t, \quad \hat{y}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_t, \quad t = 1, \dots, n.$$

Тестира се хипотеза:

$$H_0 : X_t \text{ и } Y_t \text{ су коинтегрисане}$$

против алтернативе

$$H_1 : X_t \text{ и } Y_t \text{ нису коинтегрисане,}$$

што се своди на

$$H_0 : \text{серија } r_t \text{ нема јединични корен (стационарна је)}$$

против

$$H_1 : \text{серија } r_t \text{ има јединични корен}$$

За тестирање ове хипотезе примењују се модификовани тестови јединичног корена. Ако се хипотеза H_0 прихвати, даље се оцењују остали параметри модела.

9.5.2 Општији модел коинтеграције временских серија

Појам коинтеграције се може уопштити, на следећи начин.

Дефиниција 9.10. (Engle, Granger) Временске серије X_t и Y_t су коинтегрисане реда (d, b) , $d \geq b > 0$ ако је ред интегрисаности обе серије једнак d и постоји нетривијална линеарна комбинација ових серија, $Z_t = \alpha_1 X_t + \alpha_2 Y_t$, чији је ред интегрисаности $d - b$.

Напомена 9.6. „Обична” коинтегрисаност је реда $(1, 0)$.

Сада се може формирати мало општији модел који узима у обзир коинтеграцију:

$$\Delta^d Y_t = \gamma_0 (\Delta^{d-b} Z_{t-1}) + \sum_{j=1}^k \gamma_{1j} \Delta^d Y_{t-j} + \sum_{j=1}^k \gamma_{2j} \Delta^d X_{t-j} + \epsilon_t. \quad (23)$$

Појам коинтеграције се, такође, може уопштити тако да се односи на више од две серије, или на серије различитог нивоа интегрисаности. Такође се може разматрати и сезонска коинтегрисаност серије.

9.5.3 Смисао разматрања коинтеграције временских серија

Модел за коинтегрисане серије (који, наравно, служе за прогнозирање будућег кретања посматраних серија) су некакав компромис између „класичних” модела (који узимају у обзир корелациону структуру вишедимензионих серија, али не говоре о дугорочној узајамној вези њихових компоненти) и линеарних модела којима би се директно описала веза између серија (који, опет, имају своје мане, јер не узимају у обзир структуру тих серија). Варирањем коефицијента прилагођавања (γ_0) може се давати већа или мања важност неком од та два приступа.

10 Допуна - модели временских серија који нису детаљно разматрани у току курса

10.1 Анализа временских серија у временском/фреквентном домену

У овом курсу детаљно смо разматрали стационарне временске серије (*ARMA* модели), а затим смо их надоградили до *ARIMA* модела и *SARIMA* модела. Поступак описивања свих ових модела био је сличан: после разних трансформација, обичних или сезонских диференцирања, серија се своди на *ARMA* модел, који се „препознаје” на основу сличности (теоријског) корелограма, односно парцијалног корелограма са њиховим узорачким еквивалентима. Дакле, ми смо увек бирали модел на основу типа корелационе повезаности чланова серије на различитом растојању. То је принцип анализе временских серија у временском домену.

Постоји и другачији приступ, који се састоји у томе да се анализира **спектар** серије, односно особине **спектралне функције/густине** серије (случајног процеса). Ту се разматрају модели као што је, на пример:

$$X_t = \mu + \int_0^t \alpha(\omega) \cos \omega t d\omega + \int_0^t \beta(\omega) \sin \omega t d\omega,$$

где су $\alpha(\omega)$ и $\beta(\omega)$ на одређени начин одабране случајне величине.

То би била анализа временских серија у **фреквентном домену**, која има примене у различитим областима технике.

10.2 Нелинеарни модели временских серија

Скоро сви модели које смо разматрали у току курса били су **линеарни**, у смислу да се тренутна вредност серије изражава као линеарна комбинација тренутне и претходних вредности белог шума (или некаквих других случајних варијација). Постоји и много врсте **нелинеарних** модела, код који је та зависност облика

$$X_t = f(e_t, e_{t-1}, \dots),$$

где је f нелинеарна функција $e_t, e_{t-1}, \dots$.

10.2.1 Неке (једноставне) врсте нелинеарних модела

1. **билинеарни** модели, на пример:

$$X_t = \mu + \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} - \sum_{j=1}^q \theta_j e_{t-j} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^s \beta_{i,j} X_{t-i} e_{t-j} + e_t;$$

2. **модел са праговима**, код којих серија може да се нађе у два или више различитих режима; пример таквог модела, код кога серија, у зависности од вредности у претходном тренутку, улази у један од два могућа $AR(1)$ режима је:

$$X_t = \begin{cases} \phi_1 X_{t-1} + e_t, & \text{ако је } X_{t-1} < 0; \\ \phi_2 X_{t-1} + e_t, & \text{ако је } X_{t-1} \geq 0, \end{cases} \quad \phi_1 \neq \phi_2;$$

3. **модел са глатким прелазом** (Smooth Transition AR (STAR) модели); пример таквог модела код кога серија глатко прелази из једног у други $AR(p)$ режим је:

$$X_t = \mu_1 + \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + F\left(\frac{X_{t-d} - \alpha}{\beta}\right) \left(\mu_2 + \sum_{i=1}^p \psi_i X_{t-i}\right) + e_t,$$

где је F нека непрекидна/глатка функција.

4. **модел везани за ланце Маркова**, код којих серија прелази из једног у други режим у зависности од стања у коме се налази придружени ланац Маркова; пример таквог модела је:

$$X_t = \begin{cases} \phi_1 X_{t-1} + e_t, & \text{ако је } s_t = 1; \\ \phi_2 X_{t-1} + e_t, & \text{ако је } s_t = 2, \end{cases}$$

где је $\{s_t\}$ ланац Маркова са скупом стања $\{1, 2\}$.

Литература

1. Зорица Младеновић, Александра Нојковић „Примењена анализа временских серија”, Економски факултет, Београд
2. Јован Малишић, Весна Јевремовић „Случајни процеси и временске серије”, Математички факултет, Београд
3. Ruey S. Tsay „Analysis of Financial Time Series”
4. James D. Hamilton „Time Series Analysis”
5. Helmut Lutkepohl „New introduction to multiple time series analysis”