

Случајни процеси (скрипта)

др Јелена Јоцковић,
Математички факултет, Београд

Садржај

1	Увод - кратка историја области вероватноће и случајних процеса	4
2	Дефиниција случајног процеса и основни појмови	6
2.1	Дефиниција случајног процеса	6
2.2	Трајекторије случајног процеса	7
2.3	Средња вредност (математичко очекивање) случајног процеса	9
2.4	Конечнодимензионе расподеле случајног процеса	9
2.5	Неке класе случајних процеса	11
3	Још неке особине случајних процеса	13
3.1	Стохастичка еквиваленција случајних процеса	13
3.2	Непрекидност случајних процеса	14
3.3	Сепарабилност случајних процеса	16
4	Случајни процеси са независним прираштајима	18
4.1	Пуасонов процес	19
4.1.1	Дефиниција и основне особине Пуасоновог процеса	19
4.1.2	Пуасонов поток догађаја - значај Пуасоновог процеса	21
4.1.3	Пуасонов Процес као процес бројања	21
4.2	Конструкција хомогеног Пуасоновог процеса	23
4.3	Винеров процес	27
4.3.1	Порекло Винеровог процеса (Брауновог кретања)	27
4.4	Брауново кретање и једнодимензионо случајно лутање	27
4.5	Дефиниција и основне особине Винеровог процеса	29
4.6	Трајекторије Винеровог процеса	30
4.6.1	Скоро сигурна непрекидност и диференцијабилност	30
4.6.2	Варијација и квадратна варијација	31
4.6.3	Хинчинов закон поновљеног логаритма	34
4.6.4	Принцип рефлексije	35
4.6.5	Расподела случајне величине T_a и максимума процеса	36
4.6.6	Модификације Винеровог процеса	37
5	Случајни процеси другог реда (L^2 - процеси)	39
5.1	Дефиниција и основна својства	39
5.1.1	Особине коваријационе функције процеса другог реда	39
5.2	Непрекидност у средње квадратном смислу	41
5.3	Диференцијабилност у средње квадратном смислу	44
5.4	Стохастички интеграли у средње квадратном смислу	46
5.4.1	Наравоученије из ове лекције	48
6	Ланци Маркова	49
6.1	Дефиниција и основна својства ланца Маркова у дискретном времену	49
6.1.1	Дефиниција ланца Маркова у дискретном времену	49
6.1.2	Матрице вероватноћа преласка у једном и више корака	50

6.1.3	Примери ланаца Маркова	50
6.1.4	Једначине Колмогоров - Чепмена и њихове последице	54
6.1.5	Историја области ланаца Маркова	55
6.2	Стања код ланаца Маркова	55
6.2.1	Повратна и пролазна стања	55
6.2.2	Разлагање скупа стања	58
6.3	Дугорочна правилност у промени стања код ланаца Маркова	59
6.3.1	Стационарне расподеле	59
6.3.2	Ергодичност	60
6.4	Случајно лутање као ланац Маркова	65
6.5	Процеси гранања	67
6.5.1	Прости процес гранања	67
6.5.2	Генераторне функције (подсетник)	69
6.5.3	Процес гранања као ланац Маркова	71
6.5.4	Вероватноћа изумирања популације	71
6.6	Ланци Маркова са непрекидним временом	73
6.6.1	Дефиниција и основна својства	73
6.6.2	Диференцијалне једначине Колмогорова	74
7	Случајни процеси са ортогоналним прираштајима	75
7.1	Дефиниција и основна својства	75
7.2	Структурна функција	75
7.3	Хилбертови простори неких случајних процеса	76
7.4	Стохастички интеграл неслучајне функције	78
7.5	Значај стохастичких интеграла	80
8	Стационарни случајни процеси	81
8.1	Дефиниција и основна својства	81
8.1.1	Коваријациона функција слабо стационарног случајног процеса	81
8.1.2	Примери стационарних процеса	82
8.2	Ергодичност слабо стационарног случајног процеса	84
8.2.1	Примери ергодичних и неергодичних процеса	86
8.3	Спектрална репрезентација слабо стационарног процеса и његове коваријационе функције	87
8.4	Додатни материјал - спектрална репрезентација слабо стационарног случајног низа	92
9	Мартингали	95
9.1	Дефиниција и основне особине мартингала	95
9.1.1	Примери мартингала	97
9.1.2	Порекло назива и значај мартингала	99
9.2	Још неке особине мартингала са дискретним параметром	99
9.3	Дубова декомпозиција субмартингала	100
9.4	Максималне неједнакости за мартингале	102

1 Увод - кратка историја области вероватноће и случајних процеса

Као што је познато, област вероватноће води порекло од игара на срећу. Сам назив, у романским језицима, потиче од латинског *probare* („показати”) и *ilis* („бити способан”).

Нека важна имена и датуми:

- **Gerolamo Cardano** (1501.-1576.) је био лекар, заинтересован и надарен за математику и многе друге области, који се, док је студирао, издржавао коцкањем. 1564. пише књигу „**Liber de ludo aleae**” („Књига о играма на срећу”), која је, заправо, приручник за коцкаре (има чак и поглавље о варању), али у којој се примењују и неки принципи теорије вероватноће (вероватноћа као количник успешних исхода и укупног броја исхода, вероватноћа уније дисјунктних догађаја).
- **Blaise Pascal** (1623.-1662.) је био математичар, физичар, проналазач, теолог, а његов рад из области вероватноће је инспирисан познанством са господином који се звао **Antoine Gombaud Chevalier de Mere** (1607.-1684.), који је био филозоф, писац, саветник на француском двору и страствени коцкар. Заинтересован за коцкарске проблеме свог пријатеља (на пример, како расподелити добитак ако се партија прекине пре времена) он је ступио у контакт са математичаром Фермаом.
- **Pierre de Fermat** (1601.-1665.) је био успешан адвокат, а математика му је била хоби и страст. Познат је, између осталог, по томе што је објављивао своје резултате, али не и доказе, и на тај начин „мучио” своје биографе (велика Фермаова теорема, чије је тврђење пронађено на маргинама књиге доказана је тек 1994.).
Од 1654. Паскал и Ферма се дописују у вези проблема поделе добитка у играма на срећу, и ова преписка, у којој се појављују и строги математички докази, представља формални почетак развоја области вероватноће.
- **Christian Huygens** (1629.-1695.) је био астроном, физичар, математичар, водећи научник тог времена. За развој области вероватноће је значајан због књиге „**De ratiociniis in ludo aleae**” („О шансама у играма на срећу”) из 1657., у којој се, између осталог, појављује прецизна дефиниција математичког очекивања.
- **Jacob Bernoulli** (1654.-1705.), први математичар из те чувене породице, пише књигу „**Ars Conjectandi**” („Уметност претпостављања”) (објављена 1713.), у којој се појављује прва верзија закона великих бројева и тзв. Бернулијева шема.
- **Abraham de Moivre** (1667.-1754.) је за развој области вероватноће значајан због књиге „**The doctrine of chances**” из 1718., у чијим каснијим издањима се појављује нормална расподела. (Де Муавр је, иначе, био Француз који је живео у Енглеској, али никад није успео да добије формално запослење, па је радио по кафанама. Постоји и анегдота да је успео тачно да предвиди сопствену смрт, тако што је приметио да сваке ноћи спава 15 минута дуже и израчунао кад ће саставити 24 сата.)

- **Pierre-Simon marquis de Laplace** (1749.-1827.) је био утицајни математи-чар, физичар и астроном, а за развој области вероватноће је значајан због књиге „**Theorie analitique des probabilite**” из 1812., која је први формално засновани рукопис из те области.
- **Andrey Nikolaevich Kolmogorov** (1903.-1987.) је у својој књизи „**Foundations of the theory of probability**” (штампана 1933., 1956.) аксиоматски засновао теорију вероватноће (на начин сличан Еуклидовим елементима за геометрију) и повезао област вероватноће и теорију мере.

Од 18. века, са развојем астрономије, физике и других наука, поље интересовања се помера од посматрања појединачних исхода неког експеримента ка посматрању промене неке случајне појаве током времена или уз варирање неког другог параметра система. Тако се, полако, ствара потреба за увођењем појма случајног процеса.

- **Andrey Andreyevich Markov** (1856.-1922.) је био један од зачетника области случајних процеса, а једна важна врста процеса носи његово име.
- **Norbert Wiener** (1894.-1964.) је познат као „отац кибернетике”. У свом докторату из 1918. је дао најбољи опис једног од најважнијих случајних процеса, Брауновог кретања (Винеровог процеса), што је водило ка развоју финансијске математике.

Још нека важна имена из области случајних процеса: **Joseph Doob** (1910.-2004.), развио теорију мартингала, **Kiyoshi Ito** (1915.-2008.), зачетник области стохастичке анализе.

2 Дефиниција случајног процеса и основни појмови

2.1 Дефиниција случајног процеса

За случајни процес би се могло рећи да је то фамилија случајних величина $\{X_t\}$, где t припада неком бесконачном скупу индекса T . Овде ћемо ипак навести мало општију дефиницију.

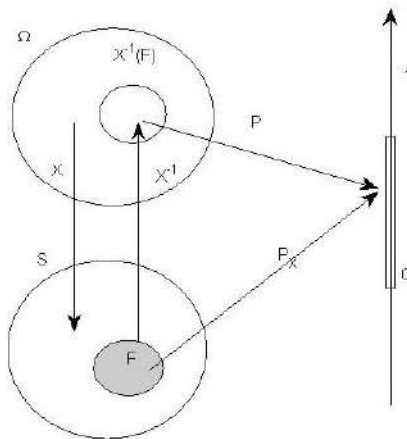
Дефиниција 2.1. Нека је $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ простор вероватноћа и $(S, \mathcal{F})$ мерљив простор. Функција $X : \Omega \rightarrow S$, која је мерљива у односу на σ - алгебре $\mathcal{A}$ и $\mathcal{F}$ ($X^{-1}(F) \in \mathcal{A}$, за $F \in \mathcal{F}$) зове се **случајни елемент** у простору S . Уређени пар $(S, \mathcal{F})$ је **фазни простор (простор вредности)** случајног елемента X .

Пример 2.1. Неки примери случајних елемената су:

- случајна величина: $(S, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$, где је $\mathcal{B}$ Борелова σ - алгебра на реалној правој;
- комплексна случајна величина: $(S, \mathcal{F}) = (\mathbb{C}, \mathcal{B}^2)$, где је $\mathcal{B}^2$ Борелова σ - алгебра на скупу $\mathbb{C}$;
- n -димензиона случајна величина: $(S, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$, где је $\mathcal{B}^n$ Борелова σ - алгебра на скупу $\mathbb{R}^n$;

Дефиниција 2.2. Расподела вероватноћа случајног елемента X је вероватносна мера $P_X : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$, задата са:

$$P_X(F) = P(X^{-1}(F)) = P\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in F\}, \text{ за } F \in \mathcal{F}.$$



Слика 1:

Дефиниција 2.3. Фамилија случајних елемената $\{X_t, t \in T\}$, дефинисаних на истом простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, при чему је T бесконачан скуп, зове се **случајни процес (случајна функција)**.

Ако сви случајни елементи имају исти фазни простор $(S, \mathcal{F})$, онда је $(S, \mathcal{F})$ **фазни простор случајног процеса**.

T је параметарски (индексни) скуп.

Напомена 2.1. За случајни процес користе се ознаке:

$$\{X(t, \omega), t \in T\}, \{X_t(\omega), t \in T\}, \{X(t), t \in T\}, \text{ или } \{X_t, t \in T\}.$$

Ако се подразумева шта је индексни скуп, T се може изоставити.

Неке врсте случајних процеса су:

- Ако се за случајне елементе одаберу они из примера 2.1, добијају се, редом, **реални, комплексни и n -димензиони** случајни процес.
- Ако је индексни скуп вишедимензионалан, на пример, $T \subset \mathbb{R}^n$, онда је у питању **случајно поље**.

Напомена 2.2. Ако није другачије наглашено, даље излагање односи се на реалне и комплексне случајне процесе.

Основна подела случајних процеса

Код случајних процеса параметарски скуп (T), исто као и скуп вредности (S), може бити дискретан или непрекидан (обично коначни или бесконачни интервал). Тако се појављују четири могућности:

1. T **дискретан**, S **дискретан**: пример су случајни низови и вектори, код којих свака компонента узима вредности из дискретног скупа;
2. T **дискретан**, S **непрекидан**: пример је температура на неком месту мерена сваког сата;
3. T **непрекидан**, S **дискретан**: пример је број телефонских позива примљених од тренутка 0 (почетак регистровања) до тренутка t ;
4. T **непрекидан**, S **непрекидан**: пример је максимална температура измерена на неком месту од тренутка 0 (почетак регистровања) до тренутка t .

2.2 Трајекторије случајног процеса

Реални случајни процес $\{X(t, \omega), t \in T\}$ се може посматрати као пресликавање

$$(t, \omega) \in T \times \Omega \rightarrow X(t, \omega) \in \mathbb{R}.$$

- За фиксирано $t \in T$: $X(t, \cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ је (реална) случајна величина.
- За фиксирано $\omega \in \Omega$: $X(\cdot, \omega) : T \rightarrow \mathbb{R}$ је (реална) неслучајна функција, која се зове **трајекторија (реализација)** случајног процеса.

Напомена 2.3. У даљем тексту трајекторија случајног процеса $\{X(t), t \in T\}$ ће бити означавана са $\{X(t, \omega), t \in T\}$.

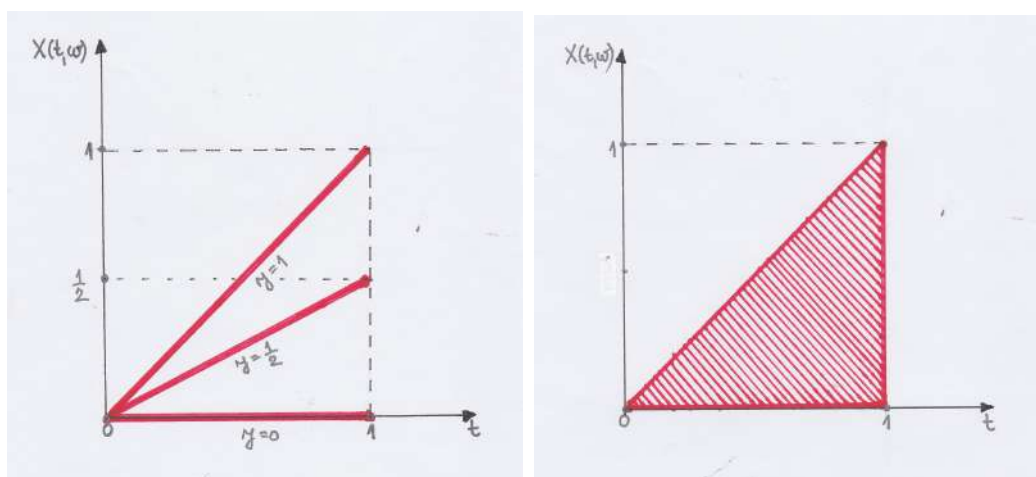
Пример 2.2. Нацртати трајекторије следећих случајних процеса:

1. $X(t) = tY, t \in [0, 1]$, ако Y има дискретну равномерну расподелу на скупу $\{0, 1/2, 1\}$
2. $X(t) = tY, t \in [0, 1]$, ако $Y \sim \mathcal{U}[0, 1]$

3. $X(t) = tY, t \in [0, 1]$, ако је Y случајна величина са густином расподеле $f(y) = 2y, y \in [0, 1]$
4. $X(t) = A + Bt, t \in \mathbb{R}$, ако $A, B \sim \mathcal{N}(0, 1)$, независне
5. $X(t) = A \cos t, t \in \mathbb{R}$, ако $A \sim \mathcal{U}[0, 1]$
6. $X(t) = (A \cos t, A \sin t), t \in \mathbb{R}$, ако $A \sim \mathcal{U}[0, 1]$
7. $X(t) = (A \cos t, B \sin t), t \in \mathbb{R}$, ако $A, B \sim \mathcal{N}(0, 1)$, независне

Решење:

1. Случајна величина Y може узети вредности $y \in \{0, 1/2, 1\}$, па се као трајекторије добијају дужи: $X(t, \omega) = 0$, $X(t, \omega) = \frac{1}{2}t$, $X(t, \omega) = t$, за $t \in [0, 1]$ (црвене дужи на Слици 2).



Слика 2:

2. Случајна величина Y може узети вредности $y \in [0, 1]$, па се као трајекторије добијају све дужи $X(t, \omega) = yt$, за $t \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$ (црвени троугао на Слици 2).
3. Исто као 2.
4. Трајекторије овог случајног процеса су праве у равни.
5. Урадити самостално!
6. Трајекторије овог случајног процеса су концентричне кружнице са центром у координатном почетку, које, све заједно, чине круг полупречника 1.
7. Трајекторије овог случајног процеса су елипсе са центром у координатном почетку, које, све заједно, чине целу раван.

У последња два примера, у питању су комплексни случајни процеси (али, трајекторије, ипак, можемо да замислимо и нацртамо, што у већим димензијама није могуће).

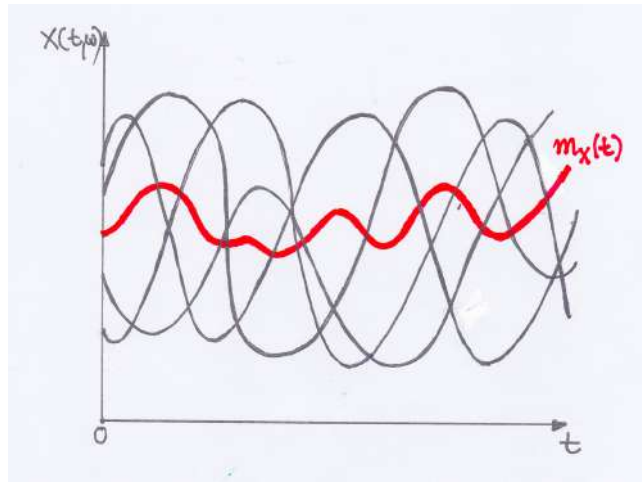
Напомена 2.4. Случајни процес $\{X(t), t \in T\}$ може да се схвати и као пресликавање $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^T$, где је $\mathbb{R}^T$ скуп свих функција $f : T \rightarrow \mathbb{R}$, тј. као „случајна величина” која сваком $\omega \in \Omega$ додељује једну трајекторију случајног процеса.

2.3 Средња вредност (математичко очекивање) случајног процеса

Дефиниција 2.4. Средња вредност (математичко очекивање) случајног процеса $\{X(t), t \in T\}$ је функција

$$m_X(t) = EX(t), t \in T.$$

Напомена 2.5. Средња вредност (математичко очекивање) случајног процеса представља „средњу“ трајекторију око које се групишу остале (Слика 3). Ипак, ова трајекторија није „средња“ у геометријском смислу (проверити, на пример, за прва три случаја Примера 2.2)!



Слика 3:

Дефиниција 2.5. Коваријациона функција случајног процеса $\{X(t), t \in T\}$ је функција

$$K_X(t, s) = \text{cov}(X(t), X(s)) = E((X(t) - m_X(t))(X(s) - m_X(s))), t, s \in T.$$

2.4 Коначнодимензионе расподеле случајног процеса

Дефиниција 2.6. Нека је $\{X(t), t \in T\}$ реални случајни процес.

За дате $t_1, \dots, t_n \in T$, $n \in \mathbb{N}$, случајни вектор $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$ је **n-димензиони засек процеса $\{X(t)\}$** .

Нека је $F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n\}$. Тада је

$$\{F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n), t_1, t_2, \dots, t_n \in T\}$$

фамилија **n-димензионих функција расподеле процеса $\{X(t)\}$** .

Фамилија свих **коначнодимензионих функција расподеле процеса $\{X(t)\}$** је

$$\{F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n), t_1, t_2, \dots, t_n \in T, n \in \mathbb{N}\}.$$

Напомена 2.6. За једнодимензиони засек се често каже само **засек**.

Фамилија коначнодимензионих функција расподеле случајног процеса мора да задовољава услове:

1. **услов симетрије:** За сваку пермутацију $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ индекса $1, 2, \dots, n$ важи

$$F_{t_{j_1}, t_{j_2}, \dots, t_{j_n}}(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_n}) = F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

2. **услов сагласности:**

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, +\infty) = F_{t_1, t_2, \dots, t_{n-1}}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$$

Смисао ових услова је да се задавањем свих n -димензионих функција расподеле, $n \geq 2$, задају и све k -димензионе функције расподеле, $1 \leq k \leq n - 1$.

Теорема 2.1 (Daniell-Kolmogorov). *Нека је T непразан скуп и*

$$\{F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n), t_1, t_2, \dots, t_n \in T, n \in \mathbb{N}\}$$

фамилија функција расподеле која задовољава услове симетрије и сагласности. Тада постоји случајни процес $\{X(t), t \in T\}$, чија је то фамилија коначнодимензионих функција расподеле.

Доказ. (идеја) Тврђење је последица Колмогоровљеве теореме о егзистенцији.

Идеја је да се за простор вероватноћа одабере $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}^T, P)$, где је P вероватносна мера чије је постојање гарантовано теоремом о егзистенцији. Показује се да случајни процес $\{\pi_t, t \in T\}$, дефинисан са $\pi_t(f) = f(t)$ за $f \in \mathbb{R}^T$ задовољава услове теореме. $\square$

Напомена 2.7. *Percy John Daniell (1889.-1946.) је британски математичар који је добио овај резултат независно од Колмогорова.*

2.5 Неке класе случајних процеса

Сад ћемо дефинисати неке важне класе случајних процеса, које ћемо већину, касније у току курса, детаљније разматрати. За сада је потребно знати само дефиниције ових процеса.

Дефиниција 2.7. *Случајни процес $\{X(t), t \in T\}$ је:*

1. **процес са независним вредностима** ако су случајне величине $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ независне за свако $n \in \mathbb{N}$ и све $t_1 < t_2 < \dots < t_n \in T$;
2. **процес са некорелисаним вредностима** ако су случајне величине $X(t)$ и $X(s)$ некорелисане за све $t, s \in T, t \neq s$;
3. **процес са ортогоналним вредностима** ако су случајне величине $X(t)$ и $X(s)$ ортогоналне за све $t, s \in T, t \neq s$.

Ово је једина класа случајних процеса којом се нећемо детаљније бавити у току курса. Разлог је што су, ако је параметарски скуп дискретан, случајни процеси са независним вредностима, заправо, низови независних случајних величина, који су већ разматрани у претходним курсевима из вероватноће. С друге стране, ако је параметарски скуп непрекидан, онда случајни процеси са независним вредностима немају много практичног значаја, јер није природно да су два засека процеса, $X(t)$ и $X(s)$ независне случајне величине ако се t и s мало разликују. На пример, ако је $X(t)$ температура измерена у тренутку t , а $X(s)$ температура измерена на истом месту 2 секунде касније, јасно је да те вредности (у нормалним околностима у свету у коме ми живимо) никако не могу бити независне. Лако је смислити још примера те врсте.

Исти закључак важи и за случајне процесе са некорелисаним и ортогоналним вредностима.

Дефиниција 2.8. *Случајни процес $\{X(t), t \geq t_0\}$ је процес са независним прираштајима ако су случајне величине*

$$X(t_0), X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$

независне за сваки избор $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$.

Дефиниција 2.9. *Комплексни случајни процес $\{X(t), t \in T\}$ је процес са коначним другим моментима (L^2 процес) ако је*

$$E|X(t)|^2 < +\infty, \text{ за свако } t \in T.$$

Дефиниција 2.10. *Комплексни случајни процес $\{X(t), t \in T\}$ је процес са некорелисаним прираштајима ако је важе услови:*

1. $E|X(t) - X(s)|^2 < +\infty$ за $t, s \in T$;
2. $E(X(t_4) - X(t_3))\overline{(X(t_2) - X(t_1))} = E(X(t_4) - X(t_3))E\overline{(X(t_2) - X(t_1))}$ за $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ из T .

Дефиниција 2.11. *Комплексни случајни процес $\{X(t), t \in T\}$ је процес са ортогоналним прираштајима ако је важе услови:*

1. $E|X(t) - X(s)|^2 < +\infty$ за $t, s \in T$;
2. $E(X(t_4) - X(t_3))\overline{(X(t_2) - X(t_1))} = 0$ за $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ из T .

Дефиниција 2.12. Случајни процес $\{X(t), t \in T\}$ је **строго стационаран** ако за свако $n \in \mathbb{N}$ и за све $t_1, \dots, t_n, t_1 + h, \dots, t_n + h \in T$ важи да случајни вектори

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \text{ и } (X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})$$

имају исту расподелу.

Дефиниција 2.13. Случајни процес $\{X(t), t \in T\}$ је **слабо стационаран** ако је важе услови:

1. $E|X(t)|^2 < +\infty$ за $t \in T$;
2. $m_X(t) = m = \text{const.}$ за $t \in T$;
3. $K_X(t, s) = B(t - s)$, за $t, s \in T$.

Дефиниција 2.14. Случајни процес $\{X(t), t \in T\}$ је **процес Маркова** ако за свако $n \in \mathbb{N}$ и за сваки избор $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ из T важи

$$P\{X(t_n) = x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \dots, X(t_1) = x_1\} = P\{X(t_n) = x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}\}.$$

Дефиниција 2.15. Случајни процес $\{X(t), t \in T\}$ је **гаусовски случајни процес** ако му је произвољан n -димензиони засек гаусовска случајна величина, $n \in \mathbb{N}$.

Дефиниција 2.16. Случајни процес $\{X(t), t \in T\}$ је:

1. **мартингал** ако важи $E(X(t_n) | X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_{n-1})) = X(t_{n-1})$;
2. **супермартингал** ако важи $E(X(t_n) | X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_{n-1})) \leq X(t_{n-1})$;
3. **субмартингал** ако важи $E(X(t_n) | X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_{n-1})) \geq X(t_{n-1})$,

скоро сигурно, за сваки избор $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ из T .

3 Још неке особине случајних процеса

3.1 Стохастичка еквиваленција случајних процеса

Осим поделе у различите класе, случајни процеси се могу груписати и на други начин, на основу тога колико им се разликују коначнодимензионе расподеле.

Дефиниција 3.1. Нека су реални случајни процеси $\{X(t), t \in T\}$ и $\{Y(t), t \in T\}$ дефинисани на истом простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Процеси $\{X(t)\}$ и $\{Y(t)\}$:

1. су **стохастички еквивалентни (еквивалентни)** ако је

$$(\forall t \in T) P\{X(t) = Y(t)\} = 1. \quad (1)$$

2. су **стохастички еквивалентни у ширем смислу** ако је

$$P\{X(t_1) \in B_1, X(t_2) \in B_2, \dots, X(t_n) \in B_n\} = P\{Y(t_1) \in B_1, Y(t_2) \in B_2, \dots, Y(t_n) \in B_n\} \quad (2)$$

за свако $n \in \mathbb{N}$ и све $t_1, \dots, t_n \in T$, $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$.

3. се **не разликују** ако је

$$P\{X(t) = Y(t), \forall t \in T\} = 1. \quad (3)$$

Напомена 3.1. Услов (1) се може еквивалентно записати на следеће начине:

$$(\forall t \in T) P\{\omega : X(t, \omega) = Y(t, \omega)\} = 1.$$

или

$$(\forall t \in T)(\exists A_t \in \mathcal{A}, P(A_t) = 0)(\forall \omega \notin A_t) X(t, \omega) = Y(t, \omega).$$

Услов (2) значи да одговарајући n -димензиони засеци једног и другог процеса имају исте расподеле, а услов (3) значи да се скоро све трајекторије ових процеса поклапају. Може се показати да из услова (3) следи услов (1), а из њега следи услов (2). У случају када је параметарски скуп T дискретан услови (1) и (3) су еквивалентни, а ако је T непрекидан, то не мора да важи. Показати!

Случајни процеси који су стохастички еквивалентни датом случајном процесу $\{X(t), t \in T\}$ се зову **верзије (модификације, варијанте)** процеса $\{X(t)\}$. Разне верзије случајног процеса имају исте коначнодимензионе расподеле, али се по особинама трајекторија могу доста разликовати.

Пример 3.1. Нека је $\Omega = [0, 1], T = [0, 1], \mathcal{A} = \mathcal{B}_{[0,1]}$ и P је Лебегова мера. Дати су случајни процеси:

$$X(t, \omega) = 0, t \in T, \quad Y(t, \omega) = \begin{cases} 0, & t \in T, \omega \in \Omega, t \neq \omega \\ 1, & t \in T, \omega \in \Omega, t = \omega \end{cases}$$

Решење: За свако фиксирано $t \in T$ важи

$$P\{\omega : X(t, \omega) \neq Y(t, \omega)\} = P\{\omega : t = \omega\} = P(\{t\}) = 0$$

(својство Лебегове мере), па су зато ови процеси стохастички еквивалентни, а трајекторије су им различите (једне имају прекид, а друге не).

3.2 Непрекидност случајних процеса

Дефиниција 3.2. Случајни процес $\{X(t), t \in T\}$ је **стохастички непрекидан** (непрекидан у вероватноћи) у тачки $t_0 \in T$ ако

$$X(t) \xrightarrow{P} X(t_0), t \rightarrow t_0, \text{ т.ј. } (\forall \epsilon > 0) P\{|X(t) - X(t_0)| > \epsilon\} \rightarrow 0, t \rightarrow t_0. \quad (4)$$

Стохастичка непрекидност је локално својство (важи у одређеној тачки), али се може проширити на произвољан затворени скуп $S \in T$ ако се захтева стохастичка непрекидност у свакој тачки тог скупа.

Напомена 3.2. Стохастичка непрекидност је једнозначно одређена дводимензионим расподелама случајног процеса. То је зато што, ако су познате расподеле свих дводимензионих засека $(X(t), X(t_0)), t \in T$, онда је могуће проверити да ли важи услов (4).

Напомена 3.3. Ако је процес $\{X(t), t \in T\}$ стохастички непрекидан, онда је и процес $\{f(X(t)), t \in T\}$, где је f непрекидна функција, стохастички непрекидан, што следи из следећег разматрања: ако је

$$A_\delta = \{\omega : |X(t, \omega) - X(t_0, \omega)| > \delta\}, \quad \text{и} \quad B_\epsilon = \{\omega : |f(X(t, \omega)) - f(X(t_0, \omega))| > \epsilon\},$$

онда $P(A_\delta) \rightarrow 0, t \rightarrow t_0$, а из непрекидности функције f имамо да $\omega \notin A_\delta$ повлачи $\omega \notin B_\epsilon$, па је $B_\epsilon \subset A_\delta$, одакле следи $P(B_\epsilon) \rightarrow 0, t \rightarrow t_0$. У том случају је, такође, $E(f(X(t)))$ непрекидна функција од t . Последњи услов сам није довољан за стохастичку непрекидност, јер је одређен расподелама једнодимензионих засека процеса.

Дефиниција 3.3. Случајни процес $\{X(t), t \in T\}$ је **скоро сигурно непрекидан** (непрекидан са вероватноћом 1) на скупу $S \subset T$ ако су скоро све његове трајекторије непрекидне на скупу S , тј.

$$P\{\omega : X(t, \omega) \text{ прекидна на } S\} = 0. \quad (5)$$

Скоро сигурна непрекидност је својство које није лако проверити директно, па се у ту сврху користи следећи критеријум Колмогорова.

Теорема 3.1. (Критеријум Колмогорова) Нека је $\{X(t), t \in T\}$ случајни процес и $[a, b] \subset T$ затворени интервал. Ако постоје $p, q, K > 0$, такви да

$$(\forall t_1, t_2 \in [a, b]) E|X(t_2) - X(t_1)|^p \leq K|t_2 - t_1|^{q+1} \quad (6)$$

онда је случајни процес $\{X(t), t \in T\}$ скоро сигурно непрекидан на $[a, b]$.

Доказ. Доказ се може наћи у књизи [7]. □

Дефиниција 3.4. Случајни процес $\{X(t), t \in T\}$ је **непрекидан у средњем реда p** у тачки $t_0 \in T$ ако

$$E|X(t) - X(t_0)|^p \rightarrow 0, t \rightarrow t_0. \quad (7)$$

И непрекидност у средњем је локално својство које се може проширити на већи скуп. За $p = 2$ зове се **средње квадратна непрекидност**.

Напомена 3.4. Однос између разних типова непрекидности случајних процеса (на истом скупу S) исти је као и однос између разних типова конвергенције: из скоро сигурне непрекидности, као и из непрекидности у средњем следи стохастичка непрекидност (у првом случају тривијално следи, а у другом се примени неједнакост Чебишева), а скоро сигурна непрекидност и непрекидност у средњем су неупоредиве.

Пример 3.2. Нека је $\Omega = [0, 1], T = [0, 1], \mathcal{A} = \mathcal{B}_{[0,1]}$ и P је Лебегова мера. Дат је случајни процес:

$$X(t, \omega) = \begin{cases} 0, & t \in T, \omega \in \Omega, t \leq \omega \\ 1, & t \in T, \omega \in \Omega, t > \omega \end{cases}$$

Решење: Процес је стохастички непрекидан: ако су $\epsilon \in (0, 1)$ и $t_0 \in [0, 1]$, фиксирани:

$$\begin{aligned} & P\{|X(t) - X(t_0)| > \epsilon\} \\ &= P\{|X(t) - X(t_0)| = 1\} \\ &= P\{(X(t) = 0, X(t_0) = 1) \text{ или } (X(t) = 1, X(t_0) = 0)\} \\ &= P\{\omega : (t \leq \omega, t_0 > \omega) \text{ или } (t > \omega, t_0 \leq \omega)\} \\ &= P\{\omega : t \leq \omega < t_0 \text{ или } t_0 \leq \omega < t\} \\ &= |t - t_0| \rightarrow 0, t \rightarrow t_0. \end{aligned}$$

Процес није скоро сигурно непрекидан, јер све трајекторије, осим оне за $\omega = 1$ имају прекид. Процес је средње квадратно непрекидан, јер

$$E|X(t) - X(t_0)|^2 = 1 \cdot |t - t_0| \rightarrow 0, t \rightarrow t_0.$$

3.3 Сепарабилност случајних процеса

Нека је $\{X(t), t \in T\}$ реални случајни процес, дефинисан на простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Посматрамо догађаје облика

$$D = \{\omega : X(t, \omega) \in B, t \in T\}, \quad B \in \mathcal{B}.$$

Вероватноћа догађаја D се може одредити у случају да је skup T пребројив (у том случају је D пресек пребројиво много догађаја из $\mathcal{A}$, па и он припада $\mathcal{A}$), а ако T није пребројив, то у општем случају није могуће. Класи таквих догађаја чија се вероватноћа не може израчунати могу да припадају, на пример, догађаји облика

$$\{\omega : X(t, \omega) \text{ мерљива функција } t\},$$

(особина мељивости се може заменити особинама ограничености, монотоније, непрекидности, интеграбилности...) који могу бити важни из теоријских или практичних разлога. Зато се уводи додатно ограничење за случајни процес - сепарабилност.

Дефиниција 3.5. Нека је $\{X(t), t \in T\}$ случајни процес дефинисан на простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, са непрекидним параметром, где је $T \subset \mathbb{R}$ интервал. Случајни процес $\{X(t)\}$ је **сепарабилан** ако постоји пребројив skup $T_0 \subset T$, густ у T и догађај $A \in \mathcal{A}$, $P(A) = 0$, такви да важи:

$$(\forall \omega \notin A) (\forall t \in T) (\exists (t_n)_{n \in \mathbb{N}}, t_n \in T_0) \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t, \lim_{n \rightarrow \infty} X(t_n, \omega) = X(t, \omega). \quad (8)$$

T_0 се зове **сепарирајући skup**, а A је **занемарљиви догађај**.

Да ли је сепарирајући skup једнозначно одређен? Показује се да за одређене класе случајних процеса то није тако.

Теорема 3.2. Ако је случајни процес $\{X(t), t \in T\}$ сепарабилан и стохастички непрекидан, онда сепарирајући skup T_0 може бити било који пребројив skup, густ у T .

Доказ. Нека је T_0 сепарирајући skup, а U_0 произвољан пребројиви skup који је густ у T . Нека је A занемарљиви догађај. Даље, нека је $t \in T_0$, а $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ тачака из U_0 , $u_n \rightarrow t, n \rightarrow +\infty$. Тада $X(u_n) \rightarrow X(t)$ у вероватноћи, па постоји подниз (n_k) , такав да $X(u_{n_k}) \rightarrow X(t)$ скоро сигурно. То значи:

$$(\exists A_t) (P(A_t) = 0) (\forall \omega \notin A_t) X(u_{n_k}, \omega) \rightarrow X(t, \omega).$$

Нека је $B = A \cup \bigcup_{t \in T_0} A_t$, $\omega \notin B$ и $t^* \in T$. Тада, због сепарабилности, постоји низ (t_n) тачака из T_0 , такав да $t_n \rightarrow t^*$ и $X(t_n, \omega) \rightarrow X(t^*, \omega)$.

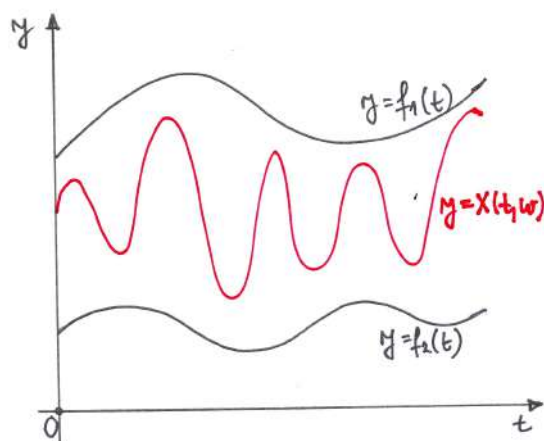
Пошто $\omega \notin A_{t_n}$, а skup U_0 је густ у T , онда постоји низ тачака (v_n) из U_0 , такав да за свако n важи $|t_n - v_n| < 1/n$ и $|X(v_n, \omega) - X(t_n, \omega)| < 1/n$.

Према томе, $v_n \rightarrow t^*$ и $X(v_n, \omega) \rightarrow X(t^*, \omega)$. □

Напомена 3.5. Ако је случајни процес још и скоро сигурно непрекидан, онда се тврђење 3.2 једноставније доказује, односно, следи из чињенице да за $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t$, $\lim_{n \rightarrow \infty} X(t_n, \omega) = X(t, \omega)$ скоро увек важи, због непрекидности трајекторија.

Између осталог, за сепарабилне процесе се може одредити вероватноћа да им трајекторије леже између две дате криве (Слика 1).

Важи и следећа теорема:



Слика 4:

Теорема 3.3 (Doob). *За сваки стохастички непрекидни случајни процес $\{X(t), t \in T\}$ постоји случајни процес $\{Y(t), t \in T\}$, који је дефинисан на истом простору вероватноћа, који је сепарабилан и стохастички еквивалентан процесу $\{X(t)\}$.*

Напомена 3.6. *Процес чије постојање је гарантовано претходном теоремом се зове сепарабилна модификација процеса $\{X(t)\}$.*

4 Случајни процеси са независним прираштајима

Дефиниција 4.1. Случајни процес $\{X(t), t \geq t_0\}$ је процес са независним прираштајима ако су случајне величине

$$X(t_0), X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$

независне за сваки избор $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$. $X(t_0)$ је почетно стање процеса, а расподела те случајне величине је почетна расподела процеса.

Ако расподела прираштаја $X(t) - X(s), t > s$ зависи само од разлике $t - s$, а не од t и s појединачно, процес $\{X(t), t \geq t_0\}$ је хомоген (процес са стационарним прираштајима).

Напомена 4.1. Из дефиниције следи и да су ислучајне величине

$$X(s) \text{ и } X(t) - X(q)$$

независне за сваки избор $t_0 \leq s \leq q < t$.

Процеси са независним прираштајима имају следеће особине:

1. Ако је $\{X(t), t \in T\}$ процес са независним прираштајима, а f неслучајна функција дефинисана на T , онда је и $\{X(t) - f(t), t \in T\}$ процес са независним прираштајима.
2. Процес са независним прираштајима је, скоро сигурно, процес Маркова. Ово следи из:

$$X(t) = X(s) + (X(t) - X(s)), \quad s < t$$

и чињенице да $X(t) - X(s)$ не зависи од $X(u), u < s$. Тврђење у обрнутом смеру не мора да важи (пример је прост процес гранања, који ће бити разматран касније).

Неки примери ових процеса, са дискретним параметром, су нам већ познати.

Пример 4.1. (бацање новчића) Баца се новчић и као резултат тог експеримента бележи 1 ако је пало писмо и 0 ако је пала глава. Дакле, резултат k -тог бацања је:

$$X_k = \begin{cases} 1, & \text{пало } \Pi; \\ 0, & \text{пало } \Gamma. \end{cases}$$

Случајни низ $\{S_n, n \in N_0\}$, дефинисан са:

$$S_0 = 0, \quad S_n = X_1 + \dots + X_n, \quad n \geq 1$$

је низ са независним прираштајима, који је и хомоген.

Пример 4.2. (случајно лутање по правој (једнодимензионо случајно лутање)) Честица се креће по правој, полази из тачке 0 и прави јединични корак у позитивном смеру са вероватноћом p , а јединични корак у негативном смеру са вероватноћом $1 - p$. Кораци у лутању су дати низом независних случајних величина $\{X_k, k \in N\}$, за који важи:

$$P\{X_k = 1\} = p, \quad P\{X_k = -1\} = 1 - p.$$

Случајни низ $\{S_n, n \in N_0\}$, чији је општи члан дефинисан са:

$$S_0 = 0, \quad S_n = X_1 + \dots + X_n, \quad n \geq 1$$

представља положај честице после n корака. То је низ са независним прираштајима, који је и хомоген.

Важни примери процеса са независним прираштајима су Пуасонов и Винеров процес, који ће бити детаљније разматрани у наставку курса.

4.1 Пуасонов процес

4.1.1 Дефиниција и основне особине Пуасоновог процеса

Дефиниција 4.2. *Случајни процес $\{N(t), t \geq 0\}$ је Пуасонов процес ако има следеће особине:*

1. $N(0) = 0$ скоро сигурно;
2. процес има независне прираштаје;
3. постоји неоппадајућа функција $\mu : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, која је непрекидна с десне стране, $\mu(0) = 0$ и за произвољне $0 < s < t$:

$$N(t) - N(s) \in \mathcal{P}(\mu(t) - \mu(s));$$

4. трајекторије процеса $\{N(t), t \geq 0\}$ су скоро сигурно непрекидне с десне стране за $t \geq 0$ и скоро сигурно имају леву граничну вредност за $t > 0$ (**cadlag** својство).

μ је **функција средње вредности Пуасоновог процеса**.

Специјално, ако је $\mu(t) - \mu(s) = \int_s^t \lambda(u) du$ за неку функцију $\lambda(u) \geq 0$, онда је λ **функција интензитета процеса $\{N(t)\}$** .

Ако је $\mu(t) = \lambda t$ за неко $\lambda \geq 0$, онда је $\{N(t)\}$ **хомогени Пуасонов процес са интензитетом λ** . За $\lambda = 1$, у питању је **стандардни хомогени Пуасонов процес**.

Основне особине Пуасоновог процеса су:

1. једнодимензионе расподеле: $N(t) \in \mathcal{P}(\mu(t))$, па је $E(N(t)) = D(N(t)) = \mu(t)$
2. коваријациона функција Пуасоновог процеса:
за $0 \leq s < t < +\infty$ добијамо

$$\begin{aligned} K_N(t, s) &= E(N(t) - EN(t))(N(s) - EN(s)) \\ &= E(N(t) \cdot N(s)) - EN(t) \cdot EN(s) \\ &= E((N(t) - N(s) + N(s)) \cdot (N(s) - N(0))) - EN(t) \cdot EN(s) \\ &= E((N(t) - N(s)) \cdot (N(s) - N(0))) + EN(s)^2 - EN(t) \cdot EN(s) \\ &= E((N(t) - N(s)) \cdot E(N(s) - N(0)) + EN(s)^2 - EN(t) \cdot EN(s)) \\ &= (\mu(t) - \mu(s))(\mu(s) - \mu(0)) + \mu(s) + \mu(s)^2 - \mu(t)\mu(s) \\ &= \mu(s) \\ &= \mu(\min\{s, t\}) \end{aligned}$$

3. расподела n -димензионог засека $(N(t_1), N(t_2), \dots, N(t_n))$, $0 < t_1 < \dots < t_n < \infty$ Пуасоновог процеса лако се изводи на основу независности прираштаја:

$$\begin{aligned} &P\{N(t_1) = k_1, N(t_2) = k_1 + k_2, \dots, N(t_n) = k_1 + k_2 + \dots + k_n\} \\ &= P\{N(t_1) = k_1, N(t_2) - N(t_1) = k_2, \dots, N(t_n) - N(t_{n-1}) = k_n\} \\ &= P\{N(t_1) = k_1\} \cdot P\{N(t_2) - N(t_1) = k_2\} \cdots P\{N(t_n) - N(t_{n-1}) = k_n\} \\ &= \dots \end{aligned}$$

4. Пуасонов процес је процес Маркова: за произвољне $0 < t_1 < \dots < t_n < \infty$ и ненегативне целе $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n$ важи

$$\begin{aligned}
& P\{N(t_n) = k_n | N(t_1) = k_1, \dots, N(t_{n-1}) = k_{n-1}\} \\
&= \frac{P\{N(t_1) = k_1, N(t_2) = k_2, \dots, N(t_n) = k_n\}}{P\{N(t_1) = k_1, \dots, N(t_{n-1}) = k_{n-1}\}} \\
&= \frac{P\{N(t_1) = k_1, N(t_2) - N(t_1) = k_2 - k_1, \dots, N(t_n) - N(t_{n-1}) = k_n - k_{n-1}\}}{P\{N(t_1) = k_1, N(t_2) - N(t_1) = k_2 - k_1, \dots, N(t_{n-1}) - N(t_{n-2}) = k_{n-1} - k_{n-2}\}} \\
&= \frac{P\{N(t_1) = k_1\} P\{N(t_2) - N(t_1) = k_2 - k_1\} \dots P\{N(t_n) - N(t_{n-1}) = k_n - k_{n-1}\}}{P\{N(t_1) = k_1\} P\{N(t_2) - N(t_1) = k_2 - k_1\} \dots P\{N(t_{n-1}) - N(t_{n-2}) = k_{n-1} - k_{n-2}\}} \\
&= P\{N(t_n) - N(t_{n-1}) = k_n - k_{n-1}\} \\
&= \frac{P\{N(t_n) - N(t_{n-1}) = k_n - k_{n-1}\} P\{N(t_{n-1}) = k_{n-1}\}}{P\{N(t_{n-1}) = k_{n-1}\}} \\
&= \frac{P\{N(t_n) - N(t_{n-1}) = k_n - k_{n-1}, N(t_{n-1}) = k_{n-1}\}}{P\{N(t_{n-1}) = k_{n-1}\}} \\
&= \frac{P\{N(t_n) = k_n, N(t_{n-1}) = k_{n-1}\}}{P\{N(t_{n-1}) = k_{n-1}\}} \\
&= P\{N(t_n) = k_n | N(t_{n-1}) = k_{n-1}\}
\end{aligned}$$

5. Трајекторије Пуасоновог процеса су, скоро сигурно, неоппадајуће, степенасте функције, са скоковима величине 1. Доказ за хомогени Пуасонов процес $(\mu(t) : t \geq 0)$:

$$\begin{aligned}
P\{N(s+h) - N(s) = 0\} &= \frac{(\lambda h)^0 e^{-\lambda h}}{0!} = e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + \frac{\lambda^2 h^2}{2} + o(h^2), h \rightarrow 0 \\
P\{N(s+h) - N(s) = 1\} &= \frac{(\lambda h)^1 e^{-\lambda h}}{1!} = \lambda h e^{-\lambda h} = \lambda h - \lambda^2 h^2 + o(h^2), h \rightarrow 0 \\
P\{N(s+h) - N(s) > 1\} &= 1 - e^{-\lambda h} - \lambda h e^{-\lambda h} = \frac{\lambda^2 h^2}{2} + o(h^2), h \rightarrow 0
\end{aligned}$$

За $0 \leq s < t < +\infty$:

$$\begin{aligned}
& P\left\{\max_{1 \leq k \leq n} \left(N\left(s + \frac{k}{n}(t-s)\right) - N\left(s + \frac{k-1}{n}(t-s)\right)\right) > 1\right\} \\
&\leq \sum_{k=1}^n P\left\{\left(N\left(s + \frac{k}{n}(t-s)\right) - N\left(s + \frac{k-1}{n}(t-s)\right)\right) > 1\right\} \\
&= \sum_{k=1}^n \left(\lambda^2 \frac{(t-s)^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= n \left(\lambda^2 \frac{(t-s)^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= \lambda^2 \frac{(t-s)^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty
\end{aligned}$$

6. Ако је $\{N(t), t \geq 0\}$ стандардни хомогени Пуасонов процес и μ функција која испуњава услове за функцију средње вредности Пуасоновог процеса, онда је $\{N(\mu(t)), t \geq 0\}$ Пуасонов процес са функцијом средње вредности μ . И обрнуто,

ако је $\{N(t), t \geq 0\}$ Пуасонов процес са функцијом средње вредности μ , и постоји инверзна функција μ^{-1} функције μ , онда је $\{N(\mu^{-1}(t)), t \geq 0\}$ стандардни хомогени Пуасонов процес.

4.1.2 Пуасонов поток догађаја - значај Пуасоновог процеса

Зашто је Пуасонов процес често погодан модел за догађаје који се дешавају на мање или више случајан начин (број телефонских позива у неком интервалу, број посета интернет сајтовима, долазак корисника на шалтер, распад честица...)? Свим наведеним примерима су заједничке следеће особине:

1. Вероватноћа $p_n(t)$ да се у интервалу дужине t оствари n таквих догађаја зависи од t и n , али не зависи од положаја тог интервала на временској оси (**хомогеност у времену**).
2. Бројеви догађаја који се остварују у дисјунктним временским интервалима су независне величине (**независност прираштаја**).
3. Вероватноћа да се у малом интервалу дужине Δt оствари један догађај је $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$, $\Delta t \rightarrow 0$, а више од једног догађаја $o(\Delta t)$ (**ординарност потока догађаја**).

Из ових услова се добија систем једначина

$$\begin{aligned} p_0(t + \Delta t) &= p_0(t)p_0(\Delta t) \\ p_n(t + \Delta t) &= p_{n-1}(t)p_1(\Delta t) + p_n(t)p_0(\Delta t) + o(\Delta t), n \geq 1 \end{aligned}$$

чијим решавањем се добија

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, n = 0, 1, 2, \dots$$

што значи да је у питању Пуасонов процес.

Напомена 4.2. Математичка дисциплина која се детаљније бави овим проблемима је теорија масовног опслуживања.

4.1.3 Пуасонов Процес као процес бројања

Дефинишемо класу процеса бројања, којој припада и Пуасонов процес.

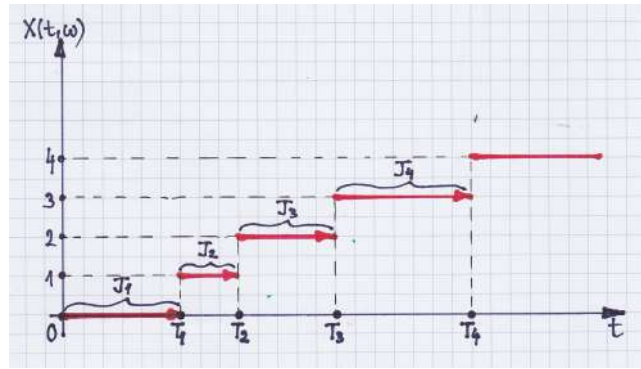
Дефиниција 4.3. Случајни процес $\{X(t), t \geq 0\}$ је процес бројања (бројачки процес) ако $X(t)$ представља број догађаја истог типа који се на случајан начин реализују у интервалу $[0, t]$. Случајна величина $X(t) - X(s)$ за $s < t$ представља број таквих догађаја који се реализују у интервалу $(s, t]$. Случајни низ $(T_n)_{n \geq 0}$ дефинисан са

$$T_0 = 0, \quad T_n = \inf\{t \geq 0, X(t) = n\}, n \in \mathbb{N}$$

се зове **низ времена доспећа (долазака)**, а случајни низ

$$(\tau_n)_{n \geq 1}, \quad \tau_n = T_n - T_{n-1}$$

се зове **низ времена чекања**.



Слика 5:

Заједничко за све процесе бројања је да су им трајекторије неоппадајуће, степенасте функције, са прекидима у тачкама $T_1, T_2, \dots$, непрекидне са десне стране. Пример је дат на Слици 2.

О расподелама случајних величина T_n и τ_n у случају Пуасоновог процеса говори следећа теорема.

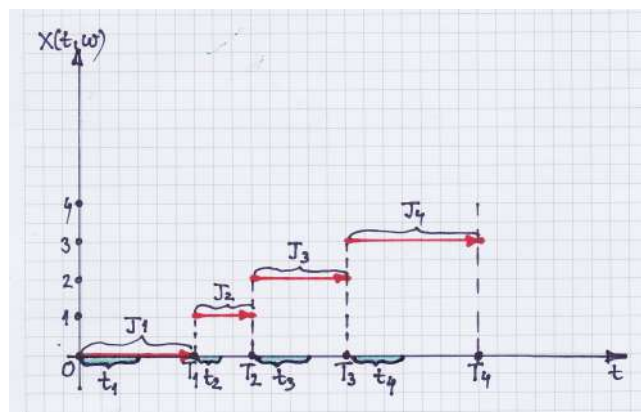
Теорема 4.1. Нека је $\{N(t), t \geq 0\}$ хомогени Пуасонов процес са интензитетом λ . За њега важи:

1. Времена чекања $\tau_n, n \in \mathbb{N}$ су независне случајне величине.
2. Случајна величина τ_n има експоненцијалну расподелу са параметром λ ($\mathcal{E}(\lambda)$).
3. Случајна величина T_n има Ерлангову расподелу (гама расподелу са параметрима n и λ , $\Gamma(n, \lambda)$).

Доказ. 1.

$$\begin{aligned}
 & P\{\tau_{n_1} > t_1, \tau_{n_2} > t_2, \dots, \tau_{n_k} > t_k\} \\
 &= P\{N(T_{n_1-1} + t_1) - N(T_{n_1-1}) = 0, \dots, N(T_{n_k-1} + t_k) - N(T_{n_k-1}) = 0\} \\
 &= P\{N(T_{n_1-1} + t_1) - N(T_{n_1-1}) = 0\} \dots P\{N(T_{n_k-1} + t_k) - N(T_{n_k-1}) = 0\} \\
 &= P\{\tau_{n_1} > t_1\} P\{\tau_{n_2} > t_2\} \dots P\{\tau_{n_k} > t_k\}
 \end{aligned}$$

Погледати Слику 3!



Слика 6:

2.

$$\begin{aligned}
P\{\tau_n > t\} &= P\{N(T_{n-1} + t) - N(T_{n-1}) = 0\} \\
&= P\{N(t) - N(0) = 0\} \\
&= P\{N(t) = 0\} \\
&= e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
F_{T_n}(t) &= P\{T_n \leq t\} = P\{N(t) \geq n\} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \\
f_{T_n}(t) &= \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k\lambda(\lambda t)^{k-1} - \lambda(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \\
&= \lambda \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} - \lambda \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \\
&= \frac{\lambda e^{-\lambda t} (\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}
\end{aligned}$$

□

Пример 4.3. (Аутостоперов парадокс) Пролазак аутомобила на једном делу пута описује се хомогеним Пуасоновим процесом. Просечно време које протекне између пролазака аутомобила на том месту је 15 минута. Аутостопер стиже на то место у случајно одабраном тренутку. Колико је средње време чакања аутостопера? Претпоставља се да је сваки возач расположен да га повезе. Понуђени одговори:

1. 10 минута;
2. 15 минута;
3. 7,5 минута;
4. 5 минута.

4.2 Конструкција хомогеног Пуасоновог процеса

Потребно је показати да случајни процес који испуњава сва четири услова из дефиниције Пуасоновог процеса заиста постоји, тј. конструисати га.

Теорема 4.2. Нека је $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ независних случајних величина са $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелом, $\lambda > 0$ и

$$T_0 = 0, \quad T_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n, n \in \mathbb{N}, \quad (9)$$

и $\{N(t), t \geq 0\}$ случајни процес дефинисан са

$$N(t) = |\{k \geq 1, T_k \leq t\}|, \quad t \geq 0. \quad (10)$$

Тада је $\{N(t), t \geq 0\}$ хомогени Пуасонов процес са интензитетом λ .

Напомена 4.3. Ако се $\mathcal{E}(\lambda)$ расподела замени произвољном расподелом, добија се шира класа процеса позната као **процеси обнављања**.

Доказ. Испитујемо да ли важе особине из дефиниције Пуасоновог процеса.

- $N(0) = |\{k \geq 1 : T_k \leq 0\}| = 0$ скоро сигурно, што следи из особина експоненцијалне расподеле (узима позитивне вредности скоро сигурно).
- Прираштаји процеса имају $\mathcal{P}(\lambda(t-s))$ расподелу:

1. $N(t) \in \mathcal{P}(\lambda t)$: случајна величина T_n , која је збир n независних случајних величина са $\mathcal{E}(\lambda)$ расподелом, има $\Gamma(n, \lambda)$ расподелу, што се доказује индукцијом. Густина ове расподеле је

$$f_n(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$$

Одговарајућа функција расподеле је

$$F_n(x) = P\{T_n \leq x\} = 1 - e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!}.$$

У том случају важи:

$$\begin{aligned} P\{N(t) = n\} &= P\{T_n \leq t < T_{n+1}\} \\ &= P\{T_n \leq t\} - P\{T_{n+1} \leq t\} \\ &= 1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} - \left(1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^n \frac{(\lambda t)^k}{k!}\right) \\ &= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}. \end{aligned}$$

2. За $0 < s < t$ важи

$$P\{N(s) = k, N(t) - N(s) = l\} = e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^l}{l!}, \quad (11)$$

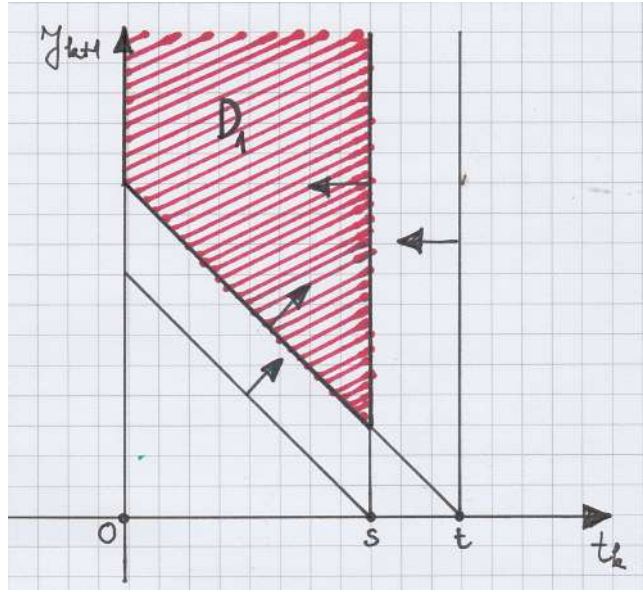
за $k, l \in \mathbb{Z}^+$.

Доказ. За $k = l = 0$:

$$\begin{aligned} P\{N(s) = 0, N(t) - N(s) = 0\} &= P\{s < T_1, t < T_1\} \\ &= P\{t < T_1\} \\ &= e^{-\lambda t} \\ &= e^{-\lambda s} \cdot \frac{(\lambda s)^0}{0!} \cdot e^{-\lambda(t-s)} \cdot \frac{(\lambda(t-s))^0}{0!} \end{aligned}$$

За $k > 0, l = 0$:

$$\begin{aligned} P\{N(s) = k, N(t) - N(s) = 0\} &= P\{T_k \leq s < T_{k+1}, T_k \leq t < T_{k+1}\} \\ &= P\{T_k \leq s < T_k + Y_{k+1}, T_k \leq t < T_k + Y_{k+1}\} \\ &= \int \int_{D_1} f_1(y_{k+1}) f_k(t_k) dy_{k+1} dt_k \\ &= \int_0^s \frac{\lambda (\lambda t_k)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t_k} \int_{t-t_k}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda y_{k+1}} dy_{k+1} dt_k \\ &= \dots \\ &= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda s)^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda s} \cdot \frac{(\lambda s)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda(t-s)} \cdot \frac{(\lambda(t-s))^0}{0!} \end{aligned}$$

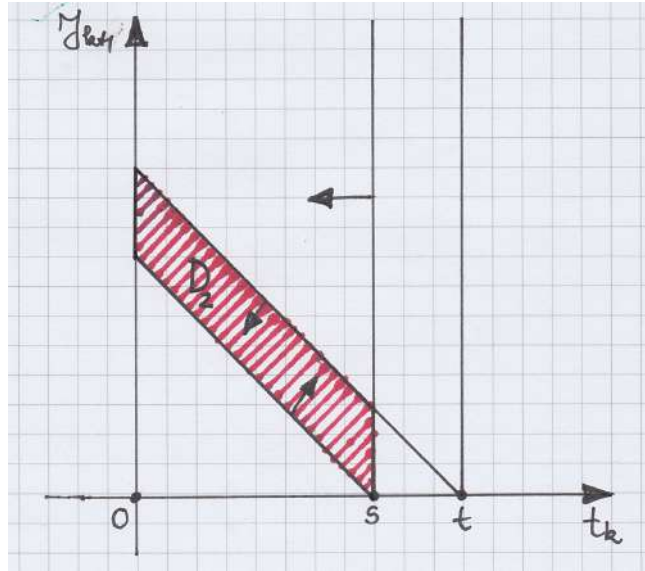


Слика 7:

За $k > 0, l > 0$:

$$\begin{aligned}
P\{N(s) = k, N(t) - N(s) = l\} &= P\{T_k \leq s < T_{k+1}, T_{k+l} \leq t < T_{k+l+1}\} \\
&= P\{T_k \leq s < T_{k+1}, T_{k+l} - T_{k+1} \leq t - T_{k+1} < T_{k+l+1} - T_{k+1}, t - T_{k+1} \geq 0\} \\
&= P\{T_k \leq s < T_{k+1} \leq t, T_{k+l} - T_{k+1} \leq t - T_{k+1} < T_{k+l+1} - T_{k+1}\} \\
&= E(I_{\{T_k \leq s < T_{k+1} \leq t\}} \cdot P\{T_{k+l} - T_{k+1} \leq t - T_{k+1} < T_{k+l+1} - T_{k+1} | T_k, T_{k+1}\}) \\
&= E(I_{\{T_k \leq s < T_{k+1} \leq t\}} \cdot P\{T_{k+l} - T_{k+1} \leq t - T_{k+1} < T_{k+l+1} - T_{k+1} | T_{k+1}\}) \\
&= E(I_{\{T_k \leq s < T_{k+1} \leq t\}} \cdot P\{T_{l-1} \leq t - T_{k+1} < T_l | T_{k+1}\}) \\
&= E(I_{\{T_k \leq s < T_{k+1} \leq t\}} \cdot P\{N^*(t - T_{k+1}) = l - 1 | T_{k+1}\}) \\
&= \int \int_{D_2} f_1(y_{k+1}) f_k(t_k) P\{N^*(t - t_k - y_{k+1}) = l - 1\} dy_{k+1} dt_k \\
&= \int_0^s \int_{s-t_k}^{t-t_k} f_1(y_{k+1}) f_k(t_k) P\{N^*(t - t_k - y_{k+1}) = l - 1\} dy_{k+1} dt_k \\
&= \int_0^s \frac{\lambda(\lambda t_k)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t_k} \int_{s-t_k}^{t-t_k} \lambda e^{-\lambda y_{k+1}} \frac{(\lambda(t - t_k - y_{k+1}))^{l-1} e^{-\lambda(t - t_k - y_{k+1})}}{(l-1)!} dy_{k+1} dt_k \\
&= \dots \\
&= e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda s)^k}{k!} \cdot \frac{(\lambda(t-s))^l}{l!} \\
&= e^{-\lambda s} \cdot \frac{(\lambda s)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda(t-s)} \cdot \frac{(\lambda(t-s))^l}{l!}
\end{aligned}$$

Овде је $\{N^*(t), t \geq 0\}$ случајни процес са истом расподелом као процес $\{N(t)\}$, али од њега независан. Области D_1 и D_2 по којима се врши интеграљење нацртане су на Сликама 1 и 2. $\square$



Слика 8:

3. Одређивање расподеле прираштаја процеса:

$$\begin{aligned}
 P\{N(t) - N(s) = l\} &= \sum_{k=0}^{+\infty} P\{N(s) = k, N(t) - N(s) = l\} \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} e^{-\lambda s} \frac{(\lambda(t-s))^l}{l!} e^{-\lambda(t-s)} \\
 &= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda(t-s))^l}{l!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} \\
 &= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda(t-s))^l}{l!} e^{\lambda s} \\
 &= e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^l}{l!}.
 \end{aligned}$$

- Независност прираштаја процеса: следи из (11).
- Трајекторије процеса $\{N(t)\}$ су непрекидне с десне стране за $t \geq 0$ и имају леву граничну вредност за $t > 0$: следи из чињенице да $N(t, \omega)$ узима вредност k на интервалу $[T_k(\omega), T_{k+1}(\omega))$, а онда има скок до $k + 1$ у тачки $T_{k+1}(\omega)$.

□

4.3 Винеров процес

4.3.1 Порекло Винеровог процеса (Брауновог кретања)

У лето 1827. шкотски ботаничар Роберт Браун (Robert Brown) је, вршећи неке експерименте, приметио да кад ситне честице полена упадну у посуду са течностју, оне врше непрекидно, хаотично кретање. Ова појава је потврђена за било какве (микроскопски) ситне честице. Такође је приметио да се ситније честице крећу брже од крупнијих, да је кретање брже на већој температури, као и у течности мање вискозности. Прецизније научно објашњење ове појаве (која је после названа **Брауново кретање**) дао је Алберт Ајнштајн (Albert Einstein (1879. - 1955.)), закључивши да кретање потиче од судара честица полена са молекулима течности. Тиме је, између осталог, убедио многе истакнуте научнике тог времена у постојање атома - била је у питању појава лако проверива у пракси. Многе од особина Брауновог кретања изведене су на хеуристички начин у докторској дисертацији Луја Башељеа (Louis Bachelier (1870. -1946.)) из 1900. године, са називом „Случајни карактер цена акција на финансијском тржишту”. Он је, између осталог, предложио да се Брауново кретање искористи као модел кретања цена акција на француској берзи, што је прва примена „озбиљне” математике у области финансија. Најпрецизнији математички опис Брауновог кретања дао је Норберт Винер у својој докторској дисертацији из 1918. године и каснијим радовима. Њему у част, Брауново кретање се другачије зове **Винеров процес**.

4.4 Брауново кретање и једнодимензионо случајно лутање

У овом одељку се разматра Брауново кретање само по једној координати (једнодимензионо Брауново кретање). Какав је то процес? Он може да се замисли као „јакко убразано” једнодимензионо случајно лутање са „јакко уситњеним” корацима. Када се кораци „уситњавају” и „убрзавају”, добија се непрекидни случајни процес - Брауново кретање. Даље, изводимо особине овог процеса из особина једнодимензионог случајног лутања.

Посматра се симетрично једнодимензионо случајно лутање: кораци дужине h се дешавају у интервалима Δt , а вероватноћа корака у једном или другом смеру је $1/2$. Значи, за кораке у лутању важи:

$$P\{X_k = h\} = P\{X_k = -h\} = \frac{1}{2}, \quad k \in \mathbb{N},$$

а за положај честице у датом тренутку важи:

$$Y(0) = 0, \text{ скоро сигурно, } Y(t_n) = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \quad t_n = n\Delta t.$$

Ако се претпостави да $\Delta t \rightarrow 0$ и $h \rightarrow 0$, добија се непрекидан процес $\{Y(t), t \geq 0\}$, за који важи:

- $Y(0) = 0$ скоро сигурно, као и код случајног лутања.
- Случајни процес $\{Y(t)\}$ има независне прираштаје, што је такође особина „наслеђена” од случајног лутања.
- Одређујемо расподелу прираштаја процеса $\{Y(t)\}$:

1. За дисперзију процеса $\{Y(t)\}$ у тачки $t + s$ за $0 < s < t$ важи:

$$\begin{aligned}
 D(Y(t+s)) &= D(Y(t+s) - Y(0)) \\
 &= D((Y(t+s) - Y(s)) + (Y(s) - Y(0))) \\
 &= D(Y(t+s) - Y(s)) + D(Y(s) - Y(0)) \\
 &= D(Y(t) - Y(0)) + D(Y(s) - Y(0)) \\
 &= D(Y(t)) + D(Y(s)).
 \end{aligned}$$

Значи, ако је $f(t) = D(Y(t))$, онда је f непрекидне, ненегативна функција, дефинисана на интервалу $[0, +\infty)$ за коју важи

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad x, y \geq 0. \quad (12)$$

Ова функционална једначина се решава на следећи начин:

- (а) $f(0+0) = f(0)$, одакле следи $f(0) = 0$;
- (б) $f(nx) = nf(x)$, $n \in \mathbb{N}$ (проверава се индукцијом);
- (ц) $f(x) = f\left(n \cdot \frac{x}{n}\right) = nf\left(\frac{x}{n}\right)$, одакле се добија $f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n}f(x)$, $n \in \mathbb{N}$;
- (д) $f\left(\frac{mx}{n}\right) = mf\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{m}{n}f(x)$.

Из свега показаног следи

$$f(rx) = rf(x), \quad r \in \mathbb{Q}, \quad r \geq 0.$$

Нека је $f(1) = c > 0$ (мора бити $c > 0$, јер ако би било $c = 0$, онда би било $f(x) = 0$ за све $x \in \mathbb{Q}^+$ што је немогуће).

Скуп $\mathbb{Q}^+$ је густ у $\mathbb{R}^+$, па је

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+) (\exists (r_n) \in \mathbb{Q}^+) \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x.$$

Тада је:

$$f(x) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} r_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (r_n \cdot c) = c \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = cx, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Закључак:

$$D(Y(t)) = \sigma^2 t, \quad t > 0, \quad \text{за неко } \sigma^2 > 0.$$

σ^2 се зове **коефицијент дифузије**, а физички смисао те константе је да је то брзина промене дисперзије.

- За случајну величину $Y(t)$ важи:

$$E(Y(t)) = 0, \quad D(Y(t)) = \sigma^2 t, \quad \frac{Y(t)}{\sigma\sqrt{t}} \in \mathcal{N}(0, 1),$$

зато што за $\Delta t \rightarrow 0$ број корака у лутању неограничено расте, па важи централна гранична теорема. Добија се и $Y(t) \in \mathcal{N}(0, \sigma^2 t)$, а због хомогености прираштаја важи и

$$Y(t+s) - Y(s) \in \mathcal{N}(0, \sigma^2 t). \quad (13)$$

4.5 Дефиниција и основне особине Винеровог процеса

Дефиниција 4.4. Случајни процес $\{W(t), t \geq 0\}$ је Винеров процес ако има следеће особине:

1. $W(0) = 0$ скоро сигурно;
2. процес $\{W(t)\}$ има независне прираштаје;
3. за све $0 \leq s < t < +\infty$:

$$W(t) - W(s) \in \mathcal{N}(0, t - s).$$

Видимо да, осим што припада класи процеса са независним прораштајима, Винеров процес припада и класи гаусовских процеса.

Винеров процес има следеће особине:

1. $W(t) \in \mathcal{N}(0, t) \Rightarrow E(W(t)) = 0, D(W(t)) = t$;
2. коваријациона функција Винеровог процеса: за $0 \leq s < t < +\infty$:

$$\begin{aligned} K_W(t, s) &= E(W(t) - EW(t))(W(s) - EW(s)) \\ &= E(W(t)W(s)) \\ &= E(W(t) - W(s) + W(s))W(s) \\ &= E(W(t) - W(s))(W(s) - W(0)) + EW(s)^2 \\ &= E(W(t) - W(s))E(W(s) - W(0)) + DW(s) \\ &= 0 \cdot 0 + s \\ &= \min\{s, t\} \end{aligned}$$

3. расподела n -димензионог засека за $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$:

$$f_{t_1, t_2 - t_1, \dots, t_n - t_{n-1}}(x_1, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_k - t_{k-1})}} e^{-\frac{(x_k - x_{k-1})^2}{2(t_k - t_{k-1})}}, \quad x_0 = 0;$$

4. Винеров процес је L^2 - непрекидан:

$$E|W(t_0 + h) - W(t_0)|^2 = D(W(t_0 + h) - W(t_0)) = h \rightarrow 0, \text{ за } h \rightarrow 0.$$

У следећој теорему показано је којим све трансформацијама Винеровог процеса се поново добија Винеров процес.

Теорема 4.3. Нека је $\{W(t), t \geq 0\}$ Винеров процес. Тада важи:

1. $\{W(t + a) - W(a), t \geq 0\}$ је Винеров процес за $a > 0$.
2. $\{\frac{1}{c}W(c^2t), t \geq 0\}$ је Винеров процес за $c \neq 0$.
3. $\{-W(t), t \geq 0\}$ је Винеров процес.
4. Случајни процеси $\{W(t), t > 0\}$ и $\{W_1(t), t > 0\} = \{tW(\frac{1}{t}), t > 0\}$ имају исте фамилије коначнодимензионих расподела вероватноћа.

Доказ. Прва три дела се једноставно показују, директном провером све три особине Винеровог процеса. Последње тврђење следи из следећих чињеница:

1. Сваки прираштај, па и сваки n -димензиони засек првог процеса је гаусовски случајни вектор, са очекивањем 0 и коваријационом матрицом која је одређена коваријационом функцијом процеса.
2. Сваки прираштај, па и сваки n -димензиони засек другог процеса је гаусовски случајни вектор, као линеарна комбинација компоненти нормално расподељеног случајног вектора. Доказ за $n = 2$ и $0 < t_2 < t_1$:

$$t_2 W\left(\frac{1}{t_2}\right) - t_1 W\left(\frac{1}{t_1}\right) = t_2 \left(W\left(\frac{1}{t_2}\right) - W\left(\frac{1}{t_1}\right) \right) + (t_2 - t_1) W\left(\frac{1}{t_1}\right).$$

3. Расподела гаусовског случајног вектора са очекивањем 0 је јединствено одређена коваријационом матрицом, односно коваријационом функцијом процеса.
4. Случајни процеси имају исте коваријационе функције. За $0 \leq s < t < +\infty$:

$$\begin{aligned} K_{W_1}(t, s) &= E(W_1(t)W_1(s)) \\ &= E\left(tW\left(\frac{1}{t}\right)sW\left(\frac{1}{s}\right)\right) \\ &= tsE\left(W\left(\frac{1}{t}\right)W\left(\frac{1}{s}\right)\right) \\ &= tsK_W\left(\frac{1}{t}, \frac{1}{s}\right) \\ &= ts \min\left\{\frac{1}{t}, \frac{1}{s}\right\} \\ &= ts \cdot \frac{1}{t} \\ &= s \\ &= K_W(t, s). \end{aligned}$$

□

4.6 Трајекторије Винеровог процеса

У овој лекцији детаљно разматрамо трајекторије Винеровог процеса.

4.6.1 Скоро сигурна непрекидност и диференцијабилност

Теорема 4.4. *Винеров процес је скоро сигурно непрекидан на сваком коначном интервалу.*

Доказ. За произвољне $0 \leq s < t < +\infty$ важи:

$$E|W(t) - W(s)|^4 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}} dx = \dots = 3(t-s)^2.$$

Када се примени критеријум Колмогорова за $p = 4, q = 1, K \geq 3$ добија се да је Винеров процес скоро сигурно непрекидан на сваком интервалу $[0, a], a > 0$. □

Теорема 4.5. *Трајекторије Винеровог процеса скоро сигурно нису диференцијабилне ни у једној тачки.*

Доказ. Ово је идеја доказа да не може постојати извод трајекторије Винеровог процеса ни у једној фиксираној тачки t_0 .

Нека је:

$$\frac{W(t_0 + h) - W(t_0)}{h} \in \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{h}\right). \quad (14)$$

Случајна величина са ознаком $W'(t_0)$ је извод случајне величине (14) у смислу неке врсте конвергенције (стохастичке, скоро сигурне или у средњем), ако (14) конвергира ка $W'(t_0)$ кад $h \rightarrow 0$, у смислу те конвергенције.

У конкретном случају, случајна величина која би представљала извод (у смислу било које конвергенције) би морала да има $\mathcal{N}(0, +\infty)$ расподелу, а таква расподела не постоји.

Дакле, не постоји извод $W'(t_0)$ ни у једном смислу, па ни у смислу скоро сигурне конвергенције. То значи да трајекторије Винеровог процеса скоро сигурно нису диференцијабилне у тачки t_0 . $\square$

Напомена 4.4. Тврђење је познато као теорема Пели-Винер-Зигмунда, а детаљан доказ је дат у књизи [7].

4.6.2 Варијација и квадратна варијација

Теорема 4.6. Нека је $0 \leq a < b < +\infty$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$,

$$S_n = \sum_{i=1}^n |W(t_i) - W(t_{i-1})|, \quad A > 0.$$

Ако је $\delta = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1}) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, онда

$$P\{S_n > A\} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Напомена 4.5. Тврђење теореме значи да Винеров процес има неограничену варијацију на било ком интервалу $[a, b], 0 \leq a < b < +\infty$.

Доказ.

$$\begin{aligned}
E(S_n) &= E \sum_{i=1}^n |W(t_i) - W(t_{i-1})| \\
&= \sum_{i=1}^n E|W(t_i) - W(t_{i-1})| \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}} e^{-\frac{x^2}{2(t_i - t_{i-1})}} dx \\
&= \sum_{i=1}^n 2 \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}} e^{-\frac{x^2}{2(t_i - t_{i-1})}} dx \\
&= \dots = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{i=1}^n \sqrt{t_i - t_{i-1}} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{i=1}^n \frac{t_i - t_{i-1}}{\sqrt{t_i - t_{i-1}}} \\
&\geq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{i=1}^n \frac{t_i - t_{i-1}}{\sqrt{\delta}} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{b-a}{\sqrt{\delta}} \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D(S_n) &= D \sum_{i=1}^n |W(t_i) - W(t_{i-1})| \\
&= \sum_{i=1}^n D|W(t_i) - W(t_{i-1})| \\
&= \sum_{i=1}^n (E(W(t_i) - W(t_{i-1}))^2 - (E|W(t_i) - W(t_{i-1})|)^2) \\
&= \sum_{i=1}^n (D(W(t_i) - W(t_{i-1})) + (E(W(t_i) - W(t_{i-1}))^2 - (E|W(t_i) - W(t_{i-1})|)^2) \\
&= \sum_{i=1}^n \left(t_i - t_{i-1} - \frac{2}{\pi} (t_i - t_{i-1}) \right) \\
&= \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \\
&= \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) (b-a).
\end{aligned}$$

За довољно велико n је $E(S_n) - A > 0$ и важи

$$\begin{aligned}
&\{|S_n - E(S_n)| < E(S_n) - A\} \\
&= \{S_n - E(S_n) < E(S_n) - A, E(S_n) - S_n < E(S_n) - A\} \\
&= \{S_n - E(S_n) < E(S_n) - A, S_n > A\} \\
&\subset \{S_n > A\},
\end{aligned}$$

одакле следи

$$\begin{aligned} P\{S_n \leq A\} &= 1 - P\{S_n > A\} \\ &\leq 1 - P\{|S_n - E(S_n)| < E(S_n) - A\} \\ &= P\{|S_n - E(S_n)| \geq E(S_n) - A\}. \end{aligned}$$

На основу неједнакости Чебишева, добија се:

$$P\{S_n \leq A\} \leq \frac{E|S_n - E(S_n)|^2}{(E(S_n) - A)^2} = \frac{D(S_n)}{(E(S_n) - A)^2} = \frac{(1 - \frac{2}{\pi})(b - a)}{(E(S_n) - A)^2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

□

Теорема 4.7. Нека је $0 \leq a < b < +\infty$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$,

$$S_n = \sum_{i=1}^n (W(t_i) - W(t_{i-1}))^2.$$

Ако је $\delta = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1}) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, онда

$$S_n \rightarrow b - a, n \rightarrow \infty, \text{ у средње квадратном смислу}$$

Напомена 4.6. Тврђење теореме значи да Винеров процес има ограничену квадратну варијацију на било ком интервалу $[a, b], 0 \leq a < b < +\infty$.

Доказ. Треба доказати да

$$E \left(\sum_{i=1}^n (W(t_i) - W(t_{i-1}))^2 - (b - a) \right)^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

$$E(S_n) = \sum_{i=1}^n E(W(t_i) - W(t_{i-1}))^2 = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = b - a.$$

$$\begin{aligned} D(S_n) &= \sum_{i=1}^n D(W(t_i) - W(t_{i-1}))^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left(E(W(t_i) - W(t_{i-1}))^4 - (E(W(t_i) - W(t_{i-1}))^2)^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^n (3(t_i - t_{i-1})^2 - (t_i - t_{i-1})^2) \\ &= 2 \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^2 \\ &\leq 2 \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1}) \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Из свега показаног следи

$$E \left(\sum_{i=1}^n (W(t_i) - W(t_{i-1}))^2 - (b - a) \right)^2 = D(S_n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

□

Претходна четири тврђења говорила су о локалном понашању трајекторија Винеровог процеса, тј. о томе шта бисмо видели кад бисмо „зумирали” произвољан део трајекторије: непрекидну линију која се може „нацртати једним потезом”, али пуну ситних „пикова”. Наредна тврђења говоре о глобалном понашању трајекторија, тј. дају „рецепт” како нацртати типичну трајекторију овог процеса.

4.6.3 Хинчинов закон поновљеног логаритма

Теорема 4.8. (*Хинчинов закон поновљеног логаритма*)

За Винеров процес $\{W(t), t \geq 0\}$ важи:

1. $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{W(t)}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = 1$ скоро сигурно;
2. $\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{W(t)}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = -1$ скоро сигурно;
3. $\limsup_{t \rightarrow 0+} \frac{W(t)}{\sqrt{2t \ln \ln \frac{1}{t}}} = 1$ скоро сигурно;
4. $\liminf_{t \rightarrow 0+} \frac{W(t)}{\sqrt{2t \ln \ln \frac{1}{t}}} = -1$ скоро сигурно;

Доказ. (идеја)

Доказ тврђења (1) је нетривијалан и излази из оквира курса, али овде можемо видети како из (1) следе остала тврђења теореме.

Из (1) следи (2), због чињенице да је $\{-W(t), t \geq 0\}$ Винеров процес:

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{-W(t)}{\sqrt{2t \ln \ln t}} &= 1, \text{ скоро сигурно;} \\ -\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{W(t)}{\sqrt{2t \ln \ln t}} &= 1, \text{ скоро сигурно;} \\ \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{W(t)}{\sqrt{2t \ln \ln t}} &= -1, \text{ скоро сигурно.} \end{aligned}$$

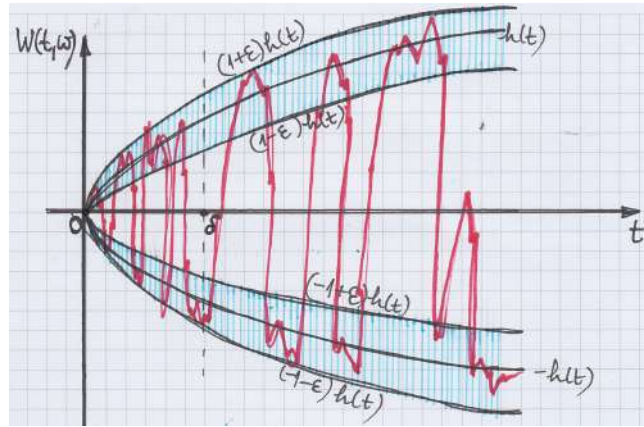
На исти начин из (3) следи (4).

Из (1) следи (3), због чињенице да процеси $\{W(t)\}$ и $\{tW(\frac{1}{t})\}$ имају исте расподеле вероватноћа:

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{tW(\frac{1}{t})}{\sqrt{2t \ln \ln t}} &= 1, \text{ скоро сигурно;} \\ \limsup_{s \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{s}W(s)}{\sqrt{2\frac{1}{s} \ln \ln \frac{1}{s}}} &= 1, \text{ скоро сигурно;} \\ \limsup_{s \rightarrow 0+} \frac{W(s)}{\sqrt{2s \ln \ln \frac{1}{s}}} &= 1, \text{ скоро сигурно.} \end{aligned}$$

□

Напомена 4.7. Нека је $h(t) = \sqrt{2t \ln \ln \frac{1}{t}}$. Тврђење теореме се може интерпретирати и овако: за свако $\epsilon > 0$ постоји $\delta > 0$, такво да део трајекторије процеса $\{W(t)\}$ за $t \in [0, \delta]$ скоро сигурно бесконачно много пута припада „траци“ $[(1 - \epsilon)h(t), (1 + \epsilon)h(t)]$ и скоро сигурно бесконачно много пута припада „траци“ $[(-1 - \epsilon)h(t), (-1 + \epsilon)h(t)]$. Последица овога је да за $t \in [0, \delta]$ процес скоро сигурно бесконачно много пута узима вредност 0. Ово је нацртано на Слици 1.



Слика 9:

Теорема 4.9.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{W(t)}{t} = 0, \text{ скоро сигурно.}$$

Напомена 4.8. Ово значи да трајекторије Винеровог процеса расту спорије од t кад $t \rightarrow +\infty$.

4.6.4 Принцип рефлексije

Теорема 4.10 (Принцип рефлексije). Нека је $\{W(t), t \geq 0\}$ Винеров процес, $a > 0$ и

$$T_a = \inf\{t \geq 0 : W(t) = a\}$$

тренутак достизања нивоа a . Тада је случајни процес $\{W_1(t), t \geq 0\}$, дефинисан са:

$$W_1(t) = \begin{cases} W(t), & t \leq T_a \\ 2a - W(t), & t > T_a \end{cases}$$

такође Винеров процес.

Доказ. (идеја)

Случајни процес $\{W(t + T_a), t \geq 0\}$ је исти процес као

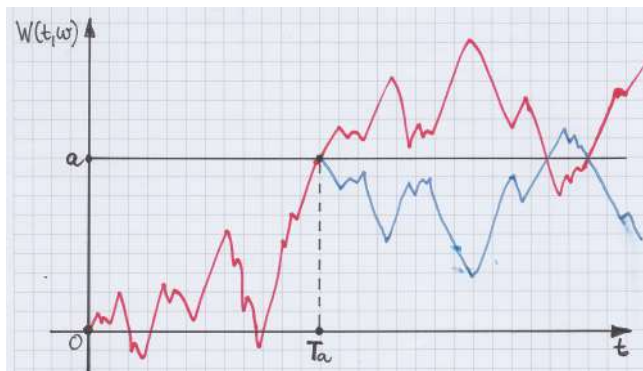
$$\begin{aligned} & \{W(T_a) + (W(t + T_a) - W(T_a)), t \geq 0\} \\ &= \{a + (W(t + T_a) - a), t \geq 0\}, \end{aligned}$$

а то је исто што и процес

$$\begin{aligned} & \{a + (a - W(t + T_a)), t \geq 0\} \\ &= \{2a - W(t), t \geq T_a\}. \end{aligned}$$

□

Принцип рефлексije заправо значи да, ако је процес $\{W(t)\}$ већ достигао ниво a , онда су вероватноће да у тренутку $t > T_a$ процес узме вредности веће и мање од a једнаке. То је илустровано на Слици 2: плави део трајекторије је једнако вероватан као њему симетричан део црвене трајекторије.



Слика 10:

4.6.5 Расподела случајне величине T_a и максимума процеса

Из претходних разматрања се добија расподела случајне величине T_a и расподела максимума процеса.

1. Расподела случајне величине T_a (за $a > 0$):

$$\begin{aligned} P\{W(t) \geq a\} &= P\{W(t) \geq a, t \geq T_a\} + P\{W(t) \geq a, t < T_a\} \\ &= P\{W(t) \geq a | t \geq T_a\} P\{t \geq T_a\} + P\{W(t) \geq a | t < T_a\} P\{t < T_a\} \\ &= \frac{1}{2} P\{T_a \leq t\}, \end{aligned}$$

одакле се добија

$$\begin{aligned} F_{T_a}(t) &= P\{T_a \leq t\} \\ &= 2P\{W(t) \geq a\} \\ &= 2 \int_a^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx \\ &= 2 \int_{\frac{a}{\sqrt{t}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= 2 \left(1 - \Phi \left(\frac{a}{\sqrt{t}} \right) \right), \quad t > 0. \end{aligned}$$

Одавде се види да је

$$P\{T_a < +\infty\} = \lim_{t \rightarrow +\infty} F_{T_a}(t) = 2 \left(1 - \frac{1}{2} \right) = 1.$$

Одговарајућа густина расподеле је

$$f_{T_a}(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{2t}}.$$

Пошто T_a и T_{-a} имају исту расподелу, може се свуда ставити $|a|$.

2. Распoдела максимума процеса (за $a > 0$):

$$M(t) = \max_{0 \leq s \leq t} W(s).$$

$$F_{M(t)}(a) = P\{M(t) \leq a\} = P\{T_a \geq t\} = 1 - 2 \left(1 - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)\right) = 2\Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right) - 1.$$

Одатле се добија одговарајућа густина:

$$f_{M(t)}(a) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{a^2}{2t}}.$$

За минимум процеса:

$$m(t) = \min_{0 \leq s \leq t} W(s),$$

резултати се једноставно добијају из једнакости

$$m(t) = \min_{0 \leq s \leq t} W(s) = -\max_{0 \leq s \leq t} (-W(s)) = -\max_{0 \leq s \leq t} W(s) = -M(t).$$

Из претходних разматрања се добија да се принцип рефлексije може записати на још (бар) два начина:

$$P\{W(t) > a | M(t) > a\} = P\{W(t) < a | M(t) > a\} \quad \text{и}$$

$$P\{W(t) > a | T_a \leq t\} = P\{W(t) < a | T_a \leq t\}.$$

Теорема 4.11.

$$P\left\{\max_{0 \leq t \leq +\infty} W(t) = +\infty\right\} = P\left\{\min_{0 \leq t \leq +\infty} W(t) = -\infty\right\} = 1.$$

Доказ.

$$P\left\{\max_{0 \leq t \leq +\infty} W(t) > k\right\} \geq P\left\{\max_{0 \leq s \leq t} W(s) > k\right\} = P\{M(t) > k\} = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{k}{\sqrt{t}}\right)\right) \rightarrow 1, \quad t \rightarrow +\infty$$

$$P\left\{\max_{0 \leq t \leq +\infty} W(t) = +\infty\right\} = P\left\{\bigcap_{k=1}^{+\infty} \left\{\max_{0 \leq t \leq +\infty} W(t) > k\right\}\right\} = 1$$

$$P\left\{\min_{0 \leq t \leq +\infty} W(t) = -\infty\right\} = P\left\{-\max_{0 \leq t \leq +\infty} (-W(t)) = -\infty\right\} = P\left\{\max_{0 \leq t \leq +\infty} W(t) = +\infty\right\} = 1$$

□

4.6.6 Модификације Винеровог процеса

- Брауново кретање са почетком у x :

$$\{x + W(t), t \geq 0\};$$

- Брауново кретање са померањем (дрифтом) α :

$$\{\alpha t + W(t), t \geq 0\};$$

- Браунов мост:

$$\{W(t) - tW(1), t \in [0, 1]\};$$

- геометријско Брауново кретање:

$$\{e^{W(t)}, t \geq 0\}$$

(користи се, на пример, у финансијама, за моделовање кретања цена разних производа, јер оне морају бити ненегативне);

- рефлектовано Брауново кретање:

$$\{|W(t)|, t \geq 0\}$$

(може да послужи за моделовање кретања честица у хомогеној течности у близини зида посуде);

- апсорбовано Брауново кретање:

$$X(t) = \begin{cases} W(t), & t \leq t_0; \\ 0, & t > t_0. \end{cases}$$

(може да послужи за моделовање цена акција компаније која банкротира у тренутку t_0 или за моделовање кретања лепљиве честице у близини зида посуде);

- радијално Брауново кретање:

$$\{W_1^2(t) + W_2^2(t) + \dots + W_k^2(t), t \geq 0\}$$

- вишедимензионо Брауново кретање:

$$\{(W_1(t), W_2(t), \dots, W_k(t)), t \geq 0\}$$

(користи се, на пример, у финансијама, за описивање истовремених промена на више банковних рачуна)

- ...

5 Случајни процеси другог реда (L^2 - процеси)

5.1 Дефиниција и основна својства

Дефиниција 5.1. *Комплексни случајни процес $\{X(t), t \in T\}$ је процес са коначним другим моментима (L^2 - процес, процес другог реда) ако је*

$$E|X(t)|^2 < +\infty, \text{ за свако } t \in T.$$

Напомена 5.1. *Комплексни случајни процес се може приказати као*

$$X(t) = X_1(t) + iX_2(t), t \in T,$$

где су $\{X_1(t), t \in T\}$ и $\{X_2(t), t \in T\}$, реални случајни процеси, $i^2 = -1$.

Средња вредност и коваријациона функција случајних процеса другог реда су **коначне**, што следи из неједнакости Коши-Шварца:

$$m_X(t) = EX(t), t \in T, \quad |m_X(t)| = |EX(t)| \leq \sqrt{E|X(t)|^2} < +\infty,$$

$$K_X(t, s) = E(X(t) - EX(t))(\overline{X(s) - EX(s)}),$$

$$|K_X(t, s)|^2 \leq E|X(t) - m_X(t)|^2 E|X(s) - m_X(s)|^2 < +\infty.$$

5.1.1 Особине коваријационе функције процеса другог реда

1. Ако је $Y(t) = a(t)X(t) + b(t)$, где су a и b неслучајне функције, онда је:

$$K_Y(t, s) = a(t)\overline{a(s)}K_X(t, s).$$

Ово се једноставно доказује сређивањем коваријационе функције процеса $\{Y(t)\}$. Последица је да процес $\{X^*(t)\}$, $X^*(t) = X(t) - m_X(t)$ има исту коваријациону функцију као процес $\{X(t)\}$. У том случају је

$$K_X(t, s) = E(X^*(t)\overline{X^*(s)}).$$

2. Дисперзија је $D(X(t)) = K_X(t, t) \geq 0$, и коначна је.

3. Хермитска симетрија:

$$K_X(t, s) = \overline{K_X(s, t)}$$

Ово се за реалне процесе своди на обичну симетрију.

4. Из неједнакости Коши-Шварца:

$$|K_X(t, s)|^2 \leq K_X(t, t) \cdot K_X(s, s)$$

5. Ненегативна дефинитност:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall t_1, t_2, \dots, t_n \in T)(\forall z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n z_i \overline{z_j} K_X(t_i, t_j) \geq 0$$

Коваријациона функција говори о јачини корелационе повезаности између два засека истог процеса. Да би се испитала међусобна повезаност засека два различита процеса, дефинише се узајамно коваријациона функција за та два процеса.

Дефиниција 5.2. Нека су $\{X(t), t \in T\}$ и $\{Y(t), t \in T\}$ два L^2 - процеса. **Узајамно коваријациона (крос коваријациона) функција** за ова два процеса је дефинисана са

$$K_{X,Y}(t, s) = E(X(t) - m_X(t))(\overline{Y(s) - m_Y(s)}), \quad t, s \in T.$$

Узајамно коваријациона функција два процеса има сличне особине као (обична) коваријациона функција.

Теорема 5.1. Функција $K(t, s)$, $t, s \in T$ је коваријациона функција неког случајног процеса акко је ненегативно дефинитна.

Доказ. 1. Смер $\rightarrow$: Претпоставимо да је $K(t, s)$ коваријациона функција процеса $\{X(t), t \in T\}$. Тада, за све $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_n \in T$ и $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ важи

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n z_i \overline{z_j} K(t_i, t_j) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n z_i \overline{z_j} E(X^*(t_i) \overline{X^*(t_j)}) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E(z_i X^*(t_i) \overline{z_j X^*(t_j)}) \\ &= E \left| \sum_{i=1}^n z_i X^*(t_i) \right|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

што значи да је функција K ненегативно дефинитна.

2. Смер $\leftarrow$, доказ за реалне случајне процесе:

Претпоставимо да је K ненегативно дефинитна функција. Ако је

$$f(z_1, z_2, \dots, z_n) = e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n z_i z_j q_{ij}} = e^{-\frac{1}{2} z^T Q z}, \quad (15)$$

где је $Q = [q_{ij}]_{n \times n}$, $q_{ij} = K(t_i, t_j)$, симетрична, ненегативно дефинитна матрица, онда је (15) карактеристична функција n -димензионе нормалне расподеле са вектором очекивања $\mathbf{0}$.

У питању је фамилија расподела која задовољава услове симетрије и сагласности, па из теореме Данијел - Колмогорова следи да постоји случајни процес (гаусовски) чија је коваријациона функција баш K .

Доказ за комплексни случај постоји у књизи Јован Малишић „Случајни процеси - теорија и примене”. $\square$

Теорема 5.2. Класа коваријационих функција је затворена у односу на сабирање, множење и граничну вредност.

Доказ. Нека су $K_1(t, s)$ и $K_2(t, s)$ коваријационе функције, а $\{X_1^*(t)\}$ и $\{X_2^*(t)\}$ одговарајући случајни процеси. Коваријациона функција случајног процеса говори о јачини корелационе везе између различитих засека ИСТОГ процеса, па зато моземо претпоставити погодне облике повезаности између засека РАЗЛИЧИТИХ процеса. 1. сабирање: Процеси се могу одабрати тако да буду некорелисани, тј.

$$E(X_1^*(t) \overline{X_2^*(s)}) = 0, t \neq s.$$

Тада важи

$$\begin{aligned} K_{X_1+X_2}(t, s) &= E(X_1^*(t) + X_2^*(t))(\overline{X_1^*(s) + X_2^*(s)}) \\ &= E(X_1^*(t) \overline{X_1^*(s)}) + E(X_1^*(t) \overline{X_2^*(s)}) + E(X_2^*(t) \overline{X_1^*(s)}) + E(X_2^*(t) \overline{X_2^*(s)}) \\ &= E(X_1^*(t) \overline{X_1^*(s)}) + E(X_2^*(t) \overline{X_2^*(s)}) \\ &= K_{X_1}(t, s) + K_{X_2}(t, s). \end{aligned}$$

2. множење: Процеси се могу одабрати тако да буду независни. Тада важи

$$\begin{aligned} K_{X_1 \cdot X_2}(t, s) &= E(X_1^*(t)X_2^*(t))\overline{(X_1^*(s)X_2^*(s))}) \\ &= E(X_1^*(t)\overline{X_1^*(s)}) \cdot E(X_2^*(t)\overline{X_2^*(s)}) \\ &= K_{X_1}(t, s) \cdot K_{X_2}(t, s). \end{aligned}$$

3. гранична вредност: Нека је $K_m(t, s)_{m \in \mathbb{N}}$ низ коваријационих функција задатих на $T \times T$ и $\lim_{m \rightarrow +\infty} K_m(t, s) = K(t, s)$. Тада за све $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_n \in T$ и $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ важи

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n z_i \overline{z_j} K_m(t_i, t_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n z_i \overline{z_j} K(t_i, t_j).$$

Сви чланови на левој страни једнакости су ненегативни, па и члан на десној страни мора бити ненегативан, а то значи да је функција K ненегативно дефинитна. $\square$

Напомена 5.2. Комбиновањем тврђења теореме и претходно наведених особина коваријационе функције добија се да је

$$\alpha_1 K_1(t, s) + \alpha_2 K_2(t, s), \alpha_1, \alpha_2 > 0$$

такође коваријациона функција. Ово се може даље уопштавати.

5.2 Непрекидност у средње квадратном смислу

Дефиниција 5.3. Случајни процес $\{X(t), t \in T\}$ је **непрекидан у средње квадратном смислу** (L^2 - непрекидан) у тачки $t_0 \in T$ ако

$$E|X(t) - X(t_0)|^2 \rightarrow 0, t \rightarrow t_0. \quad (16)$$

Наредно тврђење говори о томе да се L^2 - непрекидност процеса другог реда може проверити испитивањем „обичне” непрекидности функције средње вредности процеса и коваријационе функције. Слична тврђења ће бити доказана за L^2 - диференцијабилност и L^2 - интеграбилност. Поента свега тога (и разлог зашто се ова врста процеса детаљно изучава у току курса) је да се покаже да за процесе другог реда средња вредност и коваријациона функција веома добро описују важне особине процеса.

Теорема 5.3. Нека је $\{X(t), t \in T\}$ L^2 - случајни процес чија је средња вредност m_X и коваријациона функција K_X . Процес $\{X(t)\}$ је L^2 - непрекидан у тачки $t_0 \in T$ ако је m_X непрекидна функција у тачки t_0 и K_X непрекидна функција у тачки (t_0, t_0) .

Доказ.

$$\begin{aligned} E|X(t) - X(t_0)|^2 &= E(X(t) - X(t_0))\overline{(X(t) - X(t_0))}) \\ &= E(X(t)\overline{X(t)}) - E(X(t_0)\overline{X(t)}) - E(X(t)\overline{X(t_0)}) + E(X(t_0)\overline{X(t_0)}) \\ &= K_X(t, t) + m_X(t)\overline{m_X(t)} - K_X(t_0, t) - m_X(t_0)\overline{m_X(t)} \\ &\quad - K_X(t, t_0) - m_X(t)\overline{m_X(t_0)} + K_X(t_0, t_0) + m_X(t_0)\overline{m_X(t_0)} \\ &= A + B, \end{aligned}$$

где је

$$A = K_X(t, t) - K_X(t_0, t) - K_X(t, t_0) + K_X(t_0, t_0), \quad B = |m_X(t) - m_X(t_0)|^2.$$

1. Смер $\leftarrow$: Претпоставимо да је m_X непрекидна функција у тачки t_0 и K_X непрекидна функција у тачки (t_0, t_0) . Тада $A \rightarrow 0$ и $B \rightarrow 0$ кад $t \rightarrow t_0$, па важи

$$E|X(t) - X(t_0)|^2 = A + B \rightarrow 0, \quad t \rightarrow t_0.$$

2. Смер $\rightarrow$: Претпоставимо да је процес $\{X(t)\}$ је L^2 - непрекидан у тачки $t_0 \in T$, тј. $E|X(t) - X(t_0)|^2 \rightarrow 0, t \rightarrow t_0$. Тада важи

$$\begin{aligned} E|X^*(t) - X^*(t_0)|^2 &= A, A \geq 0 \\ E|X(t) - X(t_0)|^2 &= A + B \geq B = |m_X(t) - m_X(t_0)|^2, \end{aligned}$$

одакле се добија

$$|m_X(t) - m_X(t_0)|^2 \rightarrow 0, \quad t \rightarrow t_0, \quad \text{тј. } m_X(t) \rightarrow m_X(t_0), \quad t \rightarrow t_0.$$

Одатле следи и

$$E|X^*(t) - X^*(t_0)|^2 \rightarrow 0, \quad t \rightarrow t_0.$$

За коваријациону функцију важи

$$\begin{aligned} |K_X(t, s) - K_X(t_0, t_0)| &= |E(X^*(t)\overline{X^*(s)}) - E(X^*(t_0)\overline{X^*(t_0)})| \\ &= |E(X^*(t)\overline{X^*(s)} - X^*(t_0)\overline{X^*(t_0)})| \\ &= |E(X^*(t)\overline{X^*(s)} - X^*(t)\overline{X^*(t_0)} + X^*(t)\overline{X^*(t_0)} - X^*(t_0)\overline{X^*(t_0)})| \\ &= |E(X^*(t)(\overline{X^*(s)} - \overline{X^*(t_0)}) + \overline{X^*(t_0)}(X^*(t) - X^*(t_0)))| \\ &\leq |E(X^*(t)(\overline{X^*(s)} - \overline{X^*(t_0)}))| + |E(\overline{X^*(t_0)}(X^*(t) - X^*(t_0)))| \\ &\leq \sqrt{E|X^*(t)|^2 E|X^*(s) - X^*(t_0)|^2} + \sqrt{E|X^*(t_0)|^2 E|X^*(t) - X^*(t_0)|^2} \\ &\rightarrow 0, \quad t, s \rightarrow t_0, \end{aligned}$$

на основу неједнакости Коши-Шварца. Први чланови под оба корена су коначни (зато што је у питању процес другог реда), а друга два члана теже 0 (претходно показано), па важи

$$K_X(t, s) \rightarrow K_X(t_0, t_0), \quad t, s \rightarrow t_0.$$

□

На реду је помоћно тврђење, које ће се користити у даљем раду.

Теорема 5.4. Нека је $\{X(t), t \in T\}$ L^2 процес и $t_0 \in T$. Тада важи

$$(\exists X_0) E|X_0|^2 < +\infty, E|X(t) - X_0|^2 \rightarrow 0, \quad t \rightarrow t_0$$

ако

$$(\exists C \in \mathbb{C}) (\forall (t_n), (s_n) : t_n, s_n \rightarrow t_0, n \rightarrow \infty) E(X(t_n)\overline{X(s_n)}) \rightarrow C, \quad n, m \rightarrow \infty.$$

Доказ. 1. Смер $\rightarrow$: Претпоставимо $E|X(t) - X_0|^2 \rightarrow 0, t \rightarrow t_0$. Нека је $E(X_0\overline{X_0}) = C$. Тада за све низове $(t_n), (s_m), t_n, s_m \rightarrow t_0, n, m \rightarrow \infty$ важи

$$\begin{aligned} |E(X(t_n)\overline{X(s_m)}) - C| &= |E(X(t_n)\overline{X(s_m)}) - E(X_0\overline{X_0})| \\ &= |E(X(t_n)\overline{X(s_m)} - X_0\overline{X_0}) + E(X_0\overline{X_0}) - E(X_0\overline{X_0})| \\ &\leq |E(X(t_n)(\overline{X(s_m)} - \overline{X_0}))| + |E(\overline{X_0}(X(t_n) - X_0))| \\ &\leq \sqrt{E|X(t_n)|^2 E|X(s_m) - X_0|^2} + \sqrt{E|X_0|^2 E|X(t_n) - X_0|^2} \\ &\rightarrow 0, \quad t_n, s_m \rightarrow t_0, \end{aligned} \tag{17}$$

на основу неједнакости Коши - Шварца, чињенице да су први чланови под кореном коначни по претпоставци теореме, а преостали чланови теже нули.

2. Смер $\leftarrow$: Претпоставимо да $E(X(t_n)\overline{X(s_m)}) \rightarrow C, m, n \rightarrow +\infty$. За низ $(X(t_n))$ важи

$$\begin{aligned} E|X(t_n) - X(t_k)|^2 &= E(X(t_n)\overline{X(t_n)}) - E(X(t_n)\overline{X(t_k)}) - E(X(t_k)\overline{X(t_n)}) + E(X(t_k)\overline{X(t_k)}) \\ &\rightarrow C - C - C + C = 0, \quad k, n \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

а одатле следи да је $(X(t_n))$ Кошијев низ, па је конвергентан, тј.

$$(\exists X_0) E|X(t_n) - X_0|^2 \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

За неки други низ $(s_m), s_m \rightarrow t_0, m \rightarrow \infty$ важи

$$\begin{aligned} E|X(t_n) - X(s_m)|^2 &= E(X(t_n)\overline{X(t_n)}) - E(X(t_n)\overline{X(s_m)}) - E(X(s_m)\overline{X(t_n)}) + E(X(s_m)\overline{X(s_m)}) \\ &\rightarrow C - C - C + C = 0, \quad n, m \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E|X(s_m) - X_0|^2 &= E|(X(s_m) - X(t_n)) + (X(t_n) - X_0)|^2 \\ &\leq 2E|X(s_m) - X(t_n)|^2 + 2E|X(t_n) - X_0|^2 \\ &\rightarrow 0, \quad m, n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

□

Напомена 5.3. Техника (17) за доказивање да једно очекивање тежи другом која се своди на неједнакост Коши - Шварца се често користи код извођења особина процеса другог реда.

Следеће тврђење нам тренутно није нарочито битно, али ће се показати као значајно кад се будемо бавили стационарним процесима. У доказу се користи Теорема 5.4.

Теорема 5.5. Ако је коваријациона функција K непрекидна у свакој дијагоналној тачки $(t_0, t_0) \in T \times T$, онда је она непрекидна у свакој тачки $(t, s) \in T \times T$.

Доказ. Претпоставимо да је функција K непрекидна у тачкама $(t, t), (s, s) \in T \times T$. Тада важи:

$$\begin{aligned} E|X^*(t + h_1) - X^*(t)|^2 &= E(X^*(t + h_1)\overline{X^*(t + h_1)}) - E(X^*(t + h_1)\overline{X^*(t)}) \\ &\quad - E(X^*(t)\overline{X^*(t + h_1)}) + E(X^*(t)\overline{X^*(t)}) \\ &= K(t + h_1, t + h_1) - K(t + h_1, t) - K(t, t + h_1) + K(t, t) \\ &\rightarrow 0, \quad h_1 \rightarrow 0, \end{aligned}$$

а на исти начин, $E|X^*(s + h_2) - X^*(s)|^2 \rightarrow 0, \quad h_2 \rightarrow 0$. Одатле следи:

$$E(X^*(t + h_1)\overline{X^*(s + h_2)}) \rightarrow E(X^*(t)\overline{X^*(s)}), \quad (h_1, h_2) \rightarrow (0, 0),$$

а то значи

$$K(t + h_1, s + h_2) \rightarrow K(t, s), \quad (t + h_1, s + h_2) \rightarrow (t, s).$$

□

5.3 Диференцијабилност у средње квадратном смислу

У вези са случајним процесима могу се разматрати разне врсте диференцијабилности: диференцијабилност у смислу стохастичке конвергенције, у смислу скоро сигурне конвергенције и у смислу средње квадратне конвергенције. Извод у смислу стохастичке конвергенције има неке „чудне” особине, које од извода не очекујемо. На пример, Пуасонов процес има извод на целом параметарском скупу и извод је увек једнак нули! Ова врста извода онда није нарочито значајна јер не одређује тај случајни процес (у смислу да на основу познатог извода не можемо, до на неку константу, одредити полазну функцију (процес), као што то можемо у „обичној” анализи). С друге стране, извод у смислу скоро сигурне конвергенције је, заправо, обичан извод реалне функције, па ту нема ништа ново. Остаје да се детаљније анализира извод у смислу средње квадратне конвергенције.

Дефиниција 5.4. L^2 процес $\{X(t), t \in T\}$ је **средње квадратно диференцијабилан** (L^2 - **диференцијабилан**) у тачки $t_0 \in T$ ако постоји случајна величина $X'(t_0)$, таква да важи

$$E \left| \frac{X(t_0 + h) - X(t_0)}{h} - X'(t_0) \right|^2 \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0.$$

Тада је $X'(t_0)$ **средње квадратни извод** (L^2 - **извод**) процеса $\{X(t)\}$ у тачки t_0 .

Пре одређивања потребног и довољног услова за средње квадратну диференцијабилност доказаћемо још једно помоћно твђење.

Теорема 5.6. Нека је L^2 - процес $\{X(t), t \in T\}$ L^2 - диференцијабилан. Тада важи:

1. Постоји $(m_X(t))'$ и важи

$$(m_X(t))' = m_{X'}(t)$$

(извод средње вредности је средња вредност извода);

2. ако је $EX(t) = 0, t \in T$, онда је $E(X'(t)\overline{X(s)}) = \frac{\partial K_X(t,s)}{\partial t}$;

3. ако је $EX(t) = 0, t \in T$, онда је $E(X'(t)\overline{X'(s)}) = \frac{\partial^2 K_X(t,s)}{\partial t \partial s}$.

Доказ. 1.

$$\begin{aligned} \left| \frac{EX(t+h) - EX(t)}{h} - EX'(t) \right|^2 &= \left| E \left(\frac{X(t+h) - X(t)}{h} - X'(t) \right) \right|^2 \\ &\leq E \left| \frac{X(t+h) - X(t)}{h} - X'(t) \right|^2 \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} E(X'(t)\overline{X(s)}) &= \lim_{h \rightarrow 0} E \left(\frac{X(t+h) - X(t)}{h} \overline{X(s)} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{K_X(t+h, s) - K_X(t, s)}{h} \\ &= \frac{\partial K_X(t, s)}{\partial t} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
E(X'(t)\overline{X'(s)}) &= \lim_{h_1, h_2 \rightarrow 0} E \left(\frac{X(t+h_1) - X(t)}{h_1} \cdot \frac{\overline{X(s+h_2) - X(s)}}{h_2} \right) \\
&= \lim_{h_1, h_2 \rightarrow 0} \frac{K_X(t+h_1, s+h_2) - K_X(t, s+h_2) - K_X(t+h_1, s) + K_X(t, s)}{h_1 h_2} \\
&= \frac{\partial^2 K_X(t, s)}{\partial t \partial s}
\end{aligned}$$

□

Напомена 5.4. У делу 2 и 3 претходне теореме поново се користи неједноакост Коши - Шварца да би се показало да је гранична вредност једног очекивања друго очекивање. Пробајте да за вежбање детаљно записите те доказе.

Теорема 5.7. Нека је $\{X(t), t \in T\}$ L^2 процес чија је средња вредност m_X и коваријациона функција K_X . Процес $\{X(t)\}$ је L^2 - диференцијабилан у тачки $t_0 \in T$ ако постоји $m'_X(t_0)$ и постоји уопштени други извод $\frac{\partial^2 K_X(t, s)}{\partial t \partial s}$ у тачки (t_0, t_0) .

Доказ. На основу раније доказаног помоћног тврђења, L^2 -извод у тачки t_0 постоји ако постоји коначна гранична вредност

$$M = \lim_{h_1, h_2 \rightarrow 0} E \left(\frac{X(t_0 + h_1) - X(t_0)}{h_1} \cdot \frac{\overline{X(t_0 + h_2) - X(t_0)}}{h_2} \right).$$

Даље „расписујемо” израз са десне стране:

$$\begin{aligned}
&E \left(\frac{X(t_0 + h_1) - X(t_0)}{h_1} \cdot \frac{\overline{X(t_0 + h_2) - X(t_0)}}{h_2} \right) \\
&= \frac{1}{h_1 h_2} \left(E(X(t_0 + h_1)\overline{X(t_0 + h_2)}) - E(X(t_0)\overline{X(t_0 + h_2)}) - E(X(t_0 + h_1)\overline{X(t_0)}) + E(X(t_0)\overline{X(t_0)}) \right) \\
&= \frac{1}{h_1 h_2} (K_X(t_0 + h_1, t_0 + h_2) - K_X(t_0, t_0 + h_2) - K_X(t_0 + h_1, t_0) + K_X(t_0, t_0)) \\
&+ \frac{1}{h_1 h_2} \left(m_X(t_0 + h_1)\overline{m_X(t_0 + h_2)} - m_X(t_0)\overline{m_X(t_0 + h_2)} - m_X(t_0 + h_1)\overline{m_X(t_0)} + m_X(t_0)\overline{m_X(t_0)} \right) \\
&= \frac{1}{h_1 h_2} (K_X(t_0 + h_1, t_0 + h_2) - K_X(t_0, t_0 + h_2) - K_X(t_0 + h_1, t_0) + K_X(t_0, t_0)) \\
&+ \frac{m_X(t_0 + h_1) - m_X(t_0)}{h_1} \frac{\overline{m_X(t_0 + h_2) - m_X(t_0)}}{h_2} = A + BC
\end{aligned}$$

1. Смер $\leftarrow$: Ако постоје $\lim_{h_1, h_2 \rightarrow 0} A$, $\lim_{h_1 \rightarrow 0} B$ и $\lim_{h_2 \rightarrow 0} C$, онда постоји гранична вредност M , па и L^2 - извод.

2. Смер $\rightarrow$: Ако постоји L^2 - извод, онда основу дела 1 претходне теореме следи да постоји гранична вредност израза BC , па због тога мора да постоји и гранична вредност израза A . □

Напомена 5.5. Из теореме 5.7 се добија (кад се пређе на граничну вредност израза $A + BC$) :

$$E|X'(t_0)|^2 = \frac{\partial^2 K_X(t, s)}{\partial t \partial s} \Big|_{(t_0, t_0)} + |m'_X(t_0)|^2, \text{ одакле следи } E|X'(t_0)|^2 < +\infty,$$

тј. L^2 - извод случајног процеса другог реда, ако постоји, је поново случајни процес другог реда.

5.4 Стохастички интеграли у средње квадратном смислу

Ако се разматра средње квадратна диференцијабилност (а већ је објашњена мотивација за то), онда је природно дефинисати и проучавати и средње квадратну интегралбилност. Стохастички интеграли у средње квадратном смислу (Риманов и Риман-Стилтјесов) се дефинишу на сличан начин као у „обичној” анализи, само што се уместо „обичне” конвергенције користи средње квадратна конвергенција.

Дефиниција 5.5. Нека је $\{X(t), t \in T\}$ L^2 - процес, $[a, b] \subset T$,

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

произвољно разбијање интервала $[a, b]$, $\phi_k \in (t_{k-1}, t_k)$ и $\max_{1 \leq k \leq n} (t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty$. Нека је

$$S_n = \sum_{k=1}^n X(\phi_k)(t_k - t_{k-1})$$

интегрална сума. Ако за низ $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ важи $E|S_n - S|^2 \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, тада је S **средње квадратни Риманов интеграл** (L^2 - интеграл) процеса $\{X(t)\}$ и означава се са $S = \int_a^b X(t)dt$. За процес $\{X(t)\}$ се тада каже да је **средње квадратно интеграбилан** (L^2 - интеграбилан).

Напомена 5.6. Може се показати да је овако дефинисан интеграл добро дефинисан, тј. не зависи од избора разбијања.

Напомена 5.7. Интеграл облика $\int_c^d X(t)dt$ где је $c = -\infty$ или $d = +\infty$ се дефинишу као средње квадратне граничне вредности већ дефинисаних интеграла, када $a \rightarrow -\infty$ и $b \rightarrow +\infty$.

Особине интеграла овако дефинисаног интеграла дате су у следећој теорему.

Теорема 5.8. Ако су $\{X(t), t \in T\}$, $\{X_1(t), t \in T\}$ и $\{X_2(t), t \in T\}$ L^2 - процеси за које постоје средње квадратни Риманови интеграл на коначном интервалу $[a, b]$. Тада важи:

1.

$$\int_a^b X(t)dt = \int_a^c X(t)dt + \int_c^b X(t)dt, \quad a < c < b;$$

2.

$$\int_a^b (\alpha_1 X_1(t) + \alpha_2 X_2(t))dt = \alpha_1 \int_a^b X_1(t)dt + \alpha_2 \int_a^b X_2(t)dt,$$

за произвољне константе α_1 и α_2 ;

3.

$$E \left(\int_a^b X_1(t)dt \cdot \overline{\int_a^b X_2(t)dt} \right) = \int_a^b \int_a^b E(X_1(t) \overline{X_2(s)})dt ds.$$

Специјално, за $X_2(t) = 1/(b-a)$ добија се:

$$E \left(\int_a^b X_1(t)dt \right) = \int_a^b EX_1(t)dt$$

(средња вредност интеграла је интеграл средње вредности).

Доказ. (Идеја) Први и други део тврђења се доказују на исти начин као у „обичној” анализи, расписивањем одговарајућих интегралних сума и преласком на граничну вредност. Трећи део тврђења се доказује тако што се, уз помоћ неједнакости Коши-Шварца покаже да важи $|E(A) - B| \rightarrow 0$, где је A производ интеграла са леве стране, а B интегрална сума за интеграл са десне стране једнакости. Пробајте, за вежбање, ово детаљно да испишете! $\square$

Теорема 5.9. Риманов интеграл $\int_a^b X(t)dt$ постоји ако постоје интеграли $\int_a^b m_X(t)dt$ и $\int_a^b \int_a^b K_X(t, s)dtds$.

Доказ. Посматрају се две поделе интервала $[a, b]$:

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b, \quad \max_{1 \leq k \leq n} (t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty, \quad \phi_k \in (t_{k-1}, t_k);$$

$$a = s_0 < s_1 < \dots < s_m = b, \quad \max_{1 \leq j \leq m} (s_j - s_{j-1}) \rightarrow 0, m \rightarrow +\infty, \quad \psi_j \in (s_{j-1}, s_j);$$

и добијају низови интегралних сума $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(S_m)_{m \in \mathbb{N}}$. Низ $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ има L^2 -граничну вредност ако постоји коначна гранична вредност $\lim_{n, m \rightarrow \infty} E(T_n \overline{S_m})$

$$\begin{aligned} E(T_n \overline{S_m}) &= E \left(\sum_{k=1}^n X(\phi_k)(t_k - t_{k-1}) \sum_{j=1}^m \overline{X(\psi_j)}(s_j - s_{j-1}) \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m (t_k - t_{k-1})(s_j - s_{j-1}) E \left(X(\phi_k) \overline{X(\psi_j)} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m (t_k - t_{k-1})(s_j - s_{j-1}) \left(K_X(\phi_k, \psi_j) + m_X(\phi_k) \overline{m_X(\psi_j)} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m (t_k - t_{k-1})(s_j - s_{j-1}) K_X(\phi_k, \psi_j) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m (t_k - t_{k-1})(s_j - s_{j-1}) m_X(\phi_k) \overline{m_X(\psi_j)} = A + B \end{aligned}$$

A је интегрална сума за $\int_a^b \int_a^b K_X(t, s)dtds$, а B је „квадрирана” интегрална сума за $\int_a^b m_X(t)dt$.

1. Смер $\leftarrow$: Ако постоје граничне вредности израза A и B , онда постоји гранична вредност израза $E(T_n \overline{S_m})$, па постоји и L^2 -интеграл.
2. Смер $\rightarrow$: Ако постоји L^2 -интеграл, онда основу дела 3 претходне теореме следи да постоји гранична вредност израза B , па због тога мора да постоји и гранична вредност израза A .

$\square$

Напомена 5.8. Из доказа теореме 5.9 следи да важи

$$E|S|^2 = \left| \int_a^b m_X(t)dt \right|^2 + \int_a^b \int_a^b K_X(t, s)dtds < +\infty.$$

То значи да је средње квадратни Риманов интеграл случајног процеса другог реда, ако постоји, поново случајни процес другог реда.

Дефиниција 5.6. Нека је $\{X(t), t \in T\}$ L^2 процес, $[a, b] \subset T$, $m_X(t) = 0$,

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

произвољно разбијање интервала $[a, b]$, f неслучајна функција дефинисана на $[a, b]$, $\phi_k \in (t_{k-1}, t_k)$ произвољна тачка и $\max_{1 \leq k \leq n} (t_k - t_{k-1}) \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty$. Нека је

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\phi_k)(X(t_k) - X(t_{k-1}))$$

интегрална сума. Ако за низ $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ важи $E|S_n - S|^2 \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, тада је S **средње квадратни Риман-Стилтјесов интеграл** процеса $\{X(t)\}$ и означава се са

$$S = \int_a^b f(t) dX(t).$$

Напомена 5.9. Може се показати да је овако дефинисан интеграл добро дефинисан, тј. не зависи од избора разбијања. И за њега се може формулисати потребан и довољан услов за егзистенцију, изражен преко особина коваријационе функције.

5.4.1 Наравоученије из ове лекције

Случајни процеси другог реда имају неколико zgodних особина:

- L^2 - непрекидност, L^2 - диференцијабилност и L^2 - интеграбилност ових процеса се изражавају преко „обичне” непрекидности, диференцијабилности и интеграбилности функције средње вредности и коваријационе функције процеса, што значи да је ове особине лако проверити у пракси. Довољно је познавати расподеле дводимензионих засека процеса.
- L^2 - извод и L^2 - интеграл случајног процеса другог реда су, ако постоје, поново процеси другог реда. Тиме се отвара могућност за компликованије трансформације процеса, при чему се његове најважније особине не мењају.

6 Ланци Маркова

6.1 Дефиниција и основна својства ланца Маркова у дискретном времену

На почетку курса смо дефинисали процесе Маркова, тако што смо захтевали да важи **својство Маркова**, које смо, неформално, читали као:

„Будућност процеса зависи само од садашњости, а не и од прошлости.”

Сад ћемо прецизно дефинисати ову врсту процеса и детаљније размотрити њихове особине.

Процеси Маркова могу имати дискретан и непрекидан параметарски скуп, тј. могу бити „у дискретном времену” или „у непрекидном времену”. За сада ћемо разматрати процесе Маркова у дискретном времену.

Зашто „ланац” Маркова? Појам „ланац” односи се на процесе (са дискретним или непрекидним параметарским скупом) који могу да узимају највише пребројиво много вредности, тј. фазни простор им је пребројив скуп. Ми ћемо овде разматрати само такве процесе.

6.1.1 Дефиниција ланца Маркова у дискретном времену

Замислимо да посматрамо некакав (природни или вештачки направљени) систем, који у дискретним временским тренуцима прелази из једног стања у друго. Претпоставимо и да за тај систем важе следеће особине:

1. скуп стања је пребројив и може се претпоставити да је то скуп $\mathbb{Z}$;
2. важи својство Маркова, које, у дискретном случају, гласи:

$$P\{X_{t+1} = j | X_0 = i_0, \dots, X_{t-1} = i_{t-1}, X_t = i\} = P\{X_{t+1} = j | X_t = i\},$$

где су $i, j, i_0, \dots, i_{t-1}$ нека од стања система;

3. вероватноћа преласка из стања i у стање j ,

$$p_{ij} = P\{X_{t+1} = j | X_t = i\}$$

не зависи од временског тренутка t .

За такав систем кажемо да је **хомогени ланац Маркова са скупом стања $\mathbb{Z}$** и можемо га згодно приказати на слици (Слика 1). На овом приказу кружићи представљају стања у којима се систем може наћи, а стрелице представљају вероватноће преласка из једног стања у друго. То је уобичајени начин да се прикаже ланац Маркова.

Напомена 6.1. На Слици 1 су нацртане само неке од стрелица. Обично се не цртају оне стрелице које се односе на вероватноћу преласка која је једнака нули.

Сад ћемо оно што смо управо описали „спаковати” у формалну дефиницију.

Дефиниција 6.1. Случајни низ $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ је **хомогени ланац Маркова са скупом стања $\mathbb{Z}$** ако му је фазни простор пребројив (може се нумерисати скупом $\mathbb{Z}$) и за све $t \in \mathbb{N}_0$, $i, j, i_0, \dots, i_{t-1} \in \mathbb{Z}$ важи својство Маркова:

$$P\{X_{t+1} = j | X_0 = i_0, \dots, X_{t-1} = i_{t-1}, X_t = i\} = P\{X_{t+1} = j | X_t = i\} = p_{ij}.$$

Број p_{ij} је **вероватноћа преласка из стања i у стање j** .

Напомена 6.2. Ланац је **нехомоген** ако вероватноћа преласка зависи од t (и тада се означава са $p_{ij}(t)$). У овом курсу ћемо разматрати само хомогене ланце Маркова.

6.1.2 Матрице вероватноћа преласка у једном и више корака

Дефиниција 6.2. Матрица $P = [p_{ij}]_{|\mathbb{Z}| \times |\mathbb{Z}|}$ је матрица вероватноћа преласка.

Ова матрица је **стохастичка**, тј.

$$p_{ij} \geq 0, \quad \sum_j p_{ij} = 1$$

(јер из сваког стања систем одлази у неко друго стање, или остаје у истом). Такође, ако је

$$p_i^{(0)} = P\{X_0 = i\}, \quad i \in \mathbb{Z}$$

почетна расподела ланца, онда важи и

$$\sum_i p_i^{(0)} = 1$$

(јер на почетку систем мора бити у неком од стања).

Дефиниција 6.3. Нека је $p_{ij}(n) = P\{X_{t+n} = j | X_t = i\}$, за $i, j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$. Матрица $P_n = [p_{ij}(n)]_{|\mathbb{Z}| \times |\mathbb{Z}|}$ је матрица вероватноћа преласка у n корака.

Напомена 6.3. $P_1 = P$.

Код ланаца Маркова, расподелу произвољног n -димензионог засека можемо да изразимо преко вероватноћа преласка и почетне расподеле ланца. Прецизније:

$$P\{X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n\} = p_{i_0}^{(0)} p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{n-1} i_n}.$$

Ово се једноставно показује индукцијом, проверите! Практични смисао је да је ланац Маркова потпуно одређен почетном расподелом и вероватноћама преласка.

6.1.3 Примери ланаца Маркова

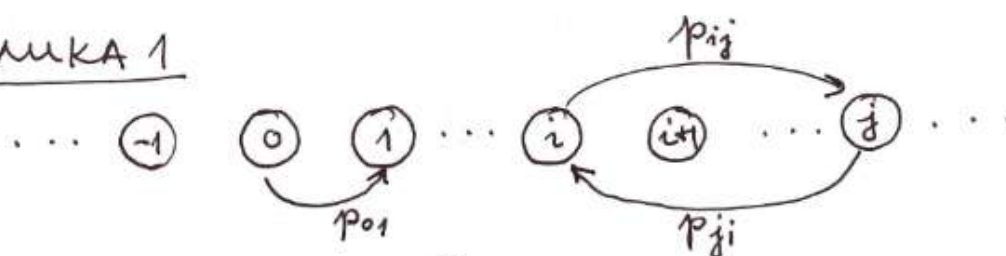
Кад проверавамо да ли је у питању ланац Маркова, заправо само треба да проверимо да ли важи својство Маркова. Сад ћемо навести неке карактеристичне примере, а неке од њих ћемо касније додатно анализирати.

Пример 6.1. (систем са два стања) Ово је најједноставнији пример ланца Маркова. Систем има два могућа стања (стање 1 и стање 2). Са датом вероватноћом p систем прелази из стања 1 у стање 2, а са вероватноћом q прелази из стања 2 у стање 1. Ако је X_n стање у коме се систем налази у тренутку n , онда је $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ ланац Маркова са скупом стања $\{1, 2\}$. Преласци из једног стања у друго су нацртани на Слици 2. Матрица вероватноћа преласка је:

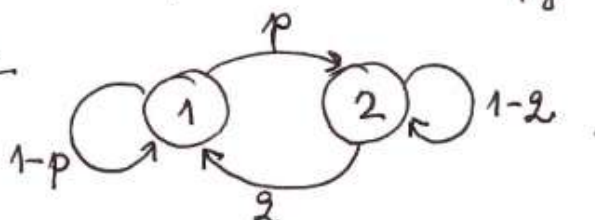
$$P = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix}$$

Пример из реалног живота би могао бити: упаљено/угашено светло. Систем са два стања је, истовремено, први пример ланца Маркова који је описан у математичкој литератури. Више о томе можете прочитати на крају овог материјала и у додатној литератури која иде уз ову лекцију.

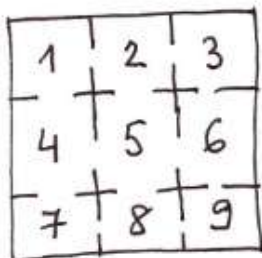
Слика 1



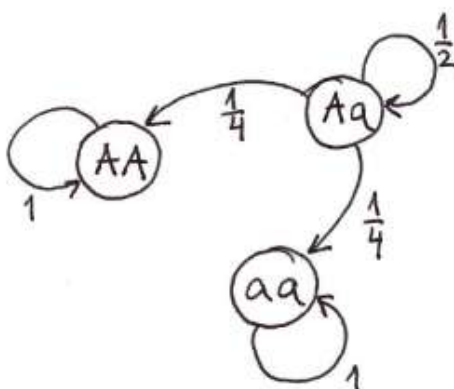
Слика 2



Слика 3



Слика 4

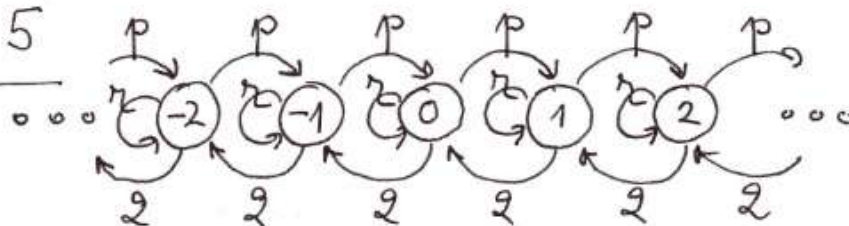


Напомена 6.4. Није битно како ћемо означавати стања за дати систем (1 и 2, ON и OFF, A и B...), важно је само да знамо да одредимо вероватноће преласка из једног стања у друго.

Пример 6.2. (миш у лавиринту) Миш се налази у лавиринту који се састоји од девет просторија (Слика 3). Он се креће из једне просторије у другу, тако што из сваке од просторија прелази у једну од k суседних са вероватноћом $\frac{1}{k}$. Ако је X_n број (ознака) просторије у којој се миш налази у тренутку n , онда је $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ ланац Маркова са скупом стања $\{1, 2, \dots, 9\}$.

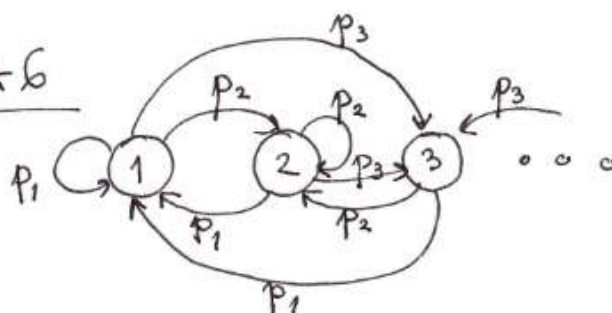
Да ли овде важи својство Маркова? Да, зато што вероватноћа преласка миша у наредну просторију зависи само од његовог тренутног положаја, а не од тога кроз које је све просторије претходно прошао.

Слика 5



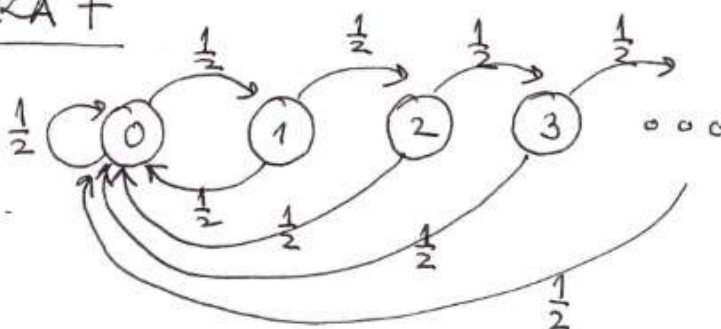
$$P = \begin{bmatrix} \ddots & q & p & 0 & \\ & q & p & q & \\ & 0 & q & p & \ddots \end{bmatrix}_{|\mathbb{Z}| \times |\mathbb{Z}|}$$

Слика 6



$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Слика 7



За вежбање нацртати преласке из једног стања у друго и написати матрицу вероватноћа преласка! Описати случај када се миш налази у сличном лавиринту од 4 просторије!

Пример 6.3. (размножавање грашка) Ово је пример инспирисан Менделовим експериментима из генетике. Ген који одређује облик семена грашка (глатко или наборано семе) се састоји од два алела: A - доминантни и a - рецесивни. Биљка се укршта са

истим таквим примерком, тако што се случајно бира по један алел од сваког од њих. Добијена комбинација алела (АА, Аа или аа) представља генотип потомка. Укрштање се тако наставља кроз генерације. Ако је X_n генотип потомка у n -тој генерацији, онда је $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ ланац Маркова са скупом стања $\{AA, Aa, aa\}$.

Да ли овде важи својство Маркова? Да, зато што генотип потомка зависи само од генотипа родитеља, а не и од генотипа ранијих предака.

Како одредити вероватноће преласка за овај ланац? На пример, за прелазак из стања (генотипа) Аа у остала стања имамо следећа разматрања. Вероватноћа да се добије генотип који се састоји од два рецесивна алела (наборано семе или аа) је једнака производу вероватноћа да се од оба примерка одабере рецесивни алел а, тј. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Исто тако, вероватноћа да се добије генотип који се састоји од два доминантна алела (глатко семе, генотип АА) је једнака производу вероватноћа да се од оба примерка одабере доминантни алел А, тј. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Вероватноћа да се добије генотип који се састоји од једног доминантног и једног рецесивног алела (глатко семе, генотип Аа) је онда допуна збира вероватноћа до 1, тј. $\frac{1}{2}$.

Преласци из једног стања у друго су нацртани на Слици 4. Матрица вероватноћа преласка је

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Пример 6.4. (случајно лутање по правој) Честица полази из нуле скоро сигурно и у јединици времена прави јединични корак у позитивном смеру са вероватноћом p , у негативном смеру са вероватноћом q , а остаје у истој тачки са вероватноћом r , $p + q + r = 1$. Ако је X_n положај честице после n корака, онда је $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ ланац Маркова са скупом стања $\mathbb{Z}$. Преласци из једног стања у друго и матрица вероватноћа преласка су дати на Слици 5. Већ знамо да је сваки случајни процес са независним прираштајима (а ту спада и случајно лутање) уједно и процес Маркова. Овај пример је рачунски мало компликованији, па ћемо га касније детаљно разматрати.

Пример 6.5. (низ независних случајних величина са истом расподелом) Нека је $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ низ независних случајних величина са истом расподелом и вредностима у скупу $\mathbb{N}_0$. И ово је ланац Маркова! Да проверимо:

$$p_{ij} = P\{X_{n+1} = j | X_n = i\} = P\{X_{n+1} = j\} = p_j.$$

Дакле, овде важи својство Маркова, и то у још строжијој форми: вероватноћа преласка зависи само од стања у које систем стиже! Преласци из једног стања у друго и матрица вероватноћа преласка су дати на Слици 6.

Пример 6.6. (најдужи непрекинути низ код бацања новчића) Баца се фер новчић и региструје да ли је пало писмо (П) или глава (Г). Нека је X_n најдужи непрекинути низ Г у тренутку n . Тада је $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ ланац Маркова са скупом стања $\mathbb{N}_0$. Проверити зашто важи својство Маркова! Преласци из једног стања у друго и матрица вероватноћа преласка су дати на Слици 7.

Напомена 6.5. Приметимо да у последња три примера имамо матрице вероватноћа преласка бесконачног реда. У том случају не можемо директно добити резултате за које, иначе, користимо матрични рачун, већ морамо мало да се „сналазимо”. То ће бити јасније кад будемо детаљно разматрали случајно лутање као ланац Маркова.

6.1.4 Једначине Колмогоров - Чепмена и њихове последице

Теорема 6.1. *За произвољне $m, n \in \mathbb{N}$ важе једначине Колмогоров-Чепмена:*

$$p_{ij}(m+n) = \sum_k p_{ik}(m)p_{kj}(n). \quad (18)$$

Доказ. За произвољне догађаје A, B, C , $P(C) > 0$ важи

$$P(AB|C) = \frac{P(ABC)}{P(C)} = \frac{P(A|BC)P(BC)}{P(C)} = \frac{P(A|BC)P(B|C)P(C)}{P(C)} = P(A|BC)P(B|C).$$

Из последње једнакости и својства Маркова следи:

$$\begin{aligned} p_{ij}(m+n) &= P\{X_{m+n} = j | X_0 = i\} \\ &= \sum_k P\{X_{m+n} = j, X_m = k | X_0 = i\} \\ &= \sum_k P\{X_{m+n} = j | X_m = k, X_0 = i\} P\{X_m = k | X_0 = i\} \\ &= \sum_k P\{X_{m+n} = j | X_m = k\} P\{X_m = k | X_0 = i\} \\ &= \sum_k p_{kj}(n) p_{ik}(m). \end{aligned}$$

□

Можемо да приметимо да израз (18) заправо представља „расписано” матрично множење. Из тога следи следећа последица.

Последица 6.1.

$$\mathbf{P}_{m+n} = \mathbf{P}_m \mathbf{P}_n, \quad \mathbf{P}_n = \mathbf{P}^n, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Напомена 6.6. *Sydney Чарпан (1888.-1970.) је био британски математичар и геофизичар који је добио овај резултат независно од Колмогорова.*

Пример 6.7. *(размножавање грашка)*

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/8 & 1/4 & 3/8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7/16 & 1/8 & 7/16 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Сад можемо да „погодимо” (па, ако желимо, докажемо индукцијом) да важи

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{P}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (1 - 1/2^n)/2 & 1/2^n & (1 - 1/2^n)/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Шта се дешава са овом матрицом кад $n \rightarrow +\infty$? Видимо да важи

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}_n = \mathbf{P}^*,$$

где је

$$\mathbf{P}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Шта ово значи за цео систем, тј. наслеђивање особина код грашка? То значи да ће, после великог броја генерација, генотип Аа скоро сигурно нестати. Објаснити!

Пример 6.8. (систем са два стања)

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix}$$

За вежбање, проверити да ли важи:

$$\mathbf{P}^n = \frac{1}{p+q} \begin{bmatrix} q & p \\ q & p \end{bmatrix} + \frac{(1-p-q)^n}{p+q} \begin{bmatrix} p & -p \\ -q & p \end{bmatrix}.$$

6.1.5 Историја области ланаца Маркова

Први рад из ове области је објавио сам Марков 1913. године. Навео је занимљив пример ланца са два стања. Посматрао је првих 20000 слова Пушкинове поеме „Евгеније Оњегин” (пошто је, претходно, избацио све интерпункцијске знаке) као низ сугласника и самогласника. Значи, стања у том ланцу су била „сугласник” и „самогласник”. Одредио је вероватноће преласка и добио могућност да упореди „језик поезије” и „свакодневни језик”. Више о овом експерименту, животу Маркова и приликама у руској науци у то доба се може прочитати у раду [2] и литератури која се у том раду наводи.

6.2 Стања код ланаца Маркова

У овој лекцији ћемо детаљније размотрити скуп могућих стања у којима може да се нађе ланац Маркова и покушати да направимо некакву „хијерархију” међу њима.

6.2.1 Повратна и пролазна стања

Дефиниција 6.4. Нека је $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ ланац Маркова. Стање i је **повратно** ако

$$P\{X_n = i \text{ за неко } n \geq 1 | X_0 = i\} = 1,$$

а **пролазно** ако је

$$P\{X_n = i \text{ за неко } n \geq 1 | X_0 = i\} < 1.$$

Дефиниција 6.5.

$$v_{ij}(n) = P\{X_1 \neq j, X_2 \neq j, \dots, X_{n-1} \neq j, X_n = j | X_0 = i\}$$

је вероватноћа догађаја да систем први пут дође у стање j у тренутку n , ако је у почетном тренутку био у стању i .

$$v_{ij} = \sum_{n=1}^{+\infty} v_{ij}(n)$$

је вероватноћа доласка система у стање j , ако је у почетном тренутку био у стању i .

Напомена 6.7. $v_{ij}(0) = 0$ (допуна дефиниције), за повратно стање i је $v_{ii} = 1$, а за пролазно $v_{ii} < 1$.

Теорема 6.2. Стање i је повратно ако и само ако $\sum_{n=1}^{+\infty} p_{ii}(n) = +\infty$.

Доказ. Дефинишемо генераторне функције:

$$P_{ij}(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{ij}(n)s^n, \quad V_{ij}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_{ij}(n)s^n,$$

где је

$$p_{ij}(0) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Оба реда конвергирају за $|s| < 1$.

Доказујемо да важе једнакости:

$$P_{ii}(s) = 1 + V_{ii}(s)P_{ii}(s) \text{ и } P_{ij}(s) = V_{ij}(s)P_{jj}(s). \quad (19)$$

Нека су i и j фиксирана стања. Нека су догађаји A_n и B_n дефинисани на следећи начин:

$$A_n = \{X_n = j\}, \quad B_n = \{X_1 \neq j, X_2 \neq j, \dots, X_{n-1} \neq j, X_n = j\}.$$

Тада важи:

$$A_n = A_n B_1 \cup A_n B_2 \cup \dots \cup A_n B_n.$$

$$\begin{aligned} p_{ij}(n) &= P\{X_n = j | X_0 = i\} \\ &= \sum_{k=1}^n P\{A_n B_k | X_0 = i\} \\ &= \sum_{k=1}^n P\{A_n | B_k\} P\{B_k | X_0 = i\} \\ &= \sum_{k=1}^n p_{jj}(n-k) v_{ij}(k). \end{aligned}$$

Одатле се добија:

$$\begin{aligned} V_{ij}(s)P_{jj}(s) &= \sum_{n=1}^{+\infty} v_{ij}(n)s^n \sum_{m=0}^{+\infty} p_{jj}(m)s^m \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (v_{ij}(1)p_{jj}(n-1) + \dots + v_{ij}(n)p_{jj}(0))s^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} p_{ij}(n)s^n \\ &= \begin{cases} P_{ij}(s), & i \neq j \\ P_{ii}(s) - 1, & i = j. \end{cases} \end{aligned}$$

Прва од једнакости (19) може да се запише на следећи начин:

$$P_{ii}(s)(1 - V_{ii}(s)) = 1.$$

1. Смер $\Rightarrow$: Ако је i повратно стање, онда је $v_{ii} = \sum_{n=1}^{+\infty} v_{ii}(n) = 1$, па је

$$V_{ii}(1) = \lim_{s \rightarrow 1} V_{ii}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_{ii}(n) = 1.$$

Користи се Абелова теорема: ако је $a_n \geq 0, n \in \mathbb{N}$, $G(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n s^n < +\infty$ за

$|s| < 1$, онда је $\lim_{s \rightarrow 1} G(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. Добија се:

$$\lim_{s \rightarrow 1} P_{ii}(s) = \infty,$$

па је

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_{ii}(n) = +\infty.$$

2. Смер $\Leftarrow$: Ако је $\sum_{n=1}^{+\infty} p_{ii}(n) = +\infty$, онда је

$$\lim_{s \rightarrow 1} P_{ii}(s) = +\infty,$$

па је

$$\lim_{s \rightarrow 1} V_{ii}(s) = 1.$$

Добија се $v_{ii} = \sum_{n=1}^{+\infty} v_{ii}(n) = 1$, што значи да је i повратно стање.

□

Пример 6.9. (размножавање грашка) У овом случају, стања $1 = AA$ и $3 = aa$ су повратна, јер важи:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{11}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{33}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty.$$

Стање $2 = Aa$ је пролазно, јер важи:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{22}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 < +\infty.$$

Пример 6.10. (систем са два стања) Овде важи:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{11}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{q}{p+q} + \frac{p}{p+q} (1-p-q)^n \right) = +\infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{22}(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{p}{p+q} + \frac{q}{p+q} (1-p-q)^n \right) = +\infty.$$

Проверити! Одатле следи да су у овом случају оба стања повратна.

6.2.2 Разлагање скупа стања

Дефиниција 6.6. Нека је $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ ланац Маркова са скупом стања $\mathbb{Z}$. Стање $j \in \mathbb{Z}$ је **достижно** из стања $i \in \mathbb{Z}$ (i **комуницира са** j) ако је $v_{ij} > 0$. Ако је $v_{ij} > 0, v_{ji} > 0$ онда стања i и j **међусобно комуницирају**.

Дефиниција 6.7. Нека је E подскуп скупа свих стања. Скуп E је **затворен** ако је за свако $i \in E, j \notin E$ $p_{ij} = 0$. Ако затворени скуп садржи само једно стање, онда су то стање и тај скуп **апсорбујући**. Скуп је **неразложив** ако произвољна два стања из тог скупа међусобно комуницирају.

Дефиниција 6.8. Период стања i је

$$d(i) = NZD\{n : p_{ii}(n) > 0\}.$$

Стање i је **периодично** ако је $d(i) > 1$, а **непериодично** ако је $d(i) = 1$.

Наредно тврђење говори о томе у каквој вези могу бити стања која међусобно комуницирају.

Теорема 6.3. Нека су i и j стања која међусобно комуницирају. Стање i је пролазно (повратно) ако је стање j пролазно (повратно).

Доказ. Претпоставимо да i и j међусобно комуницирају. Тада се у неком броју корака може стићи из i у j , и у неком (не обавезно истом) броју корака се може стићи из j у i . Дакле,

$$(\exists m, n \in \mathbb{N}) p_{ij}(m) = a > 0, p_{ji}(n) = b > 0.$$

На основу једначина Чепмен-Колмогорова се добија:

$$p_{ii}(m + k + n) = \sum_s p_{is}(m) p_{si}(k + n) = \sum_s p_{is}(m) \sum_r p_{sr}(k) p_{ri}(n).$$

За $s = r = j$ се добија

$$p_{ii}(m + k + n) \geq p_{ij}(m) p_{jj}(k) p_{ji}(n) = ab p_{jj}(k),$$

а кад стања i и j замене места:

$$p_{jj}(n + k + m) \geq p_{ji}(n) p_{ii}(k) p_{ij}(m) = ab p_{ii}(k).$$

Кад се сумирају леве и десне стране последње две неједнакости добија се да редови $\sum_k p_{ii}(k)$ и $\sum_k p_{jj}(k)$ истовремено конвергирају и дивергирају, чиме је тврђење доказано. $\square$

Теорема 6.4. Скуп стања се може на јединствен начин представити у облику

$$E_0 \cup E_1 \cup E_2 \cup \dots$$

где је E_0 скуп пролазних стања, а $E_1, E_2, \dots$ неразложиви, затворени скупови повратних стања.

Доказ. Дефинишемо релацију $\sim$ на скупу свих повратних стања, на следећи начин: $i \sim j$ ако стања i и j међусобно комуницирају ($v_{ij} > 0, v_{ji} > 0$). Показујемо да је $\sim$ релација еквиваленције:

1. рефлексивност је очигледна јер $v_{ii} > 0$ за повратно стање i
2. симетричност је очигледна
3. транзитивност: из $i \sim j$, $j \sim k$ значи да $v_{ij} > 0, v_{ji} > 0, v_{jk} > 0, v_{kj} > 0$, а из тога следи и $v_{ik} > 0, v_{ki} > 0$, тј. $i \sim k$.

Дакле, $\sim$ је релација еквиваленције, па она разбија скуп свих повратних стања на дисјунктне класе еквиваленције.

Доказујемо да су класе еквиваленције затворени скупови. Претпоставимо супротно, тј. да за неко k E_k није затворен скуп. То значи да $(\exists i \in E_k, j \notin E_k) p_{ij} > 0$. Пошто i и j нису у истој класи еквиваленције, они међусобно не комуницирају, тј. мора бити $v_{ij} = 0$ или $v_{ji} = 0$. Пошто је $v_{ij} > p_{ij} > 0$, онда мора бити $v_{ji} = 0$. Доказујемо да, у том случају, стање i не може бити повратно. Важи $P\{X_1 = i | X_0 = i\} = p_{ii} < 1$, јер $p_{ij} > 0$. За $n \geq 2$ важи:

$$\begin{aligned}
& P\{X_n = i \text{ за неко } n \geq 2 | X_0 = i\} \\
&= P\{X_n = i \text{ за неко } n \geq 2, X_k = j \text{ за неко } k, 1 \leq k < n | X_0 = i\} \\
&+ P\{X_n = i \text{ за неко } n \geq 2, X_k \neq j \text{ за свако } k, 1 \leq k < n | X_0 = i\} \\
&= P\{X_n = i \text{ за неко } n \geq 2 | X_k = j \text{ за неко } k, 1 \leq k < n, X_0 = i\} \\
&\cdot P\{X_k = j \text{ за неко } k, 1 \leq k < n | X_0 = i\} \\
&+ P\{X_n = i \text{ за неко } n \geq 2 | X_k \neq j \text{ за свако } k, 1 \leq k < n, X_0 = i\} \\
&\cdot P\{X_k \neq j \text{ за свако } k, 1 \leq k < n | X_0 = i\} \\
&\leq v_{ji} P\{X_k = j \text{ за неко } k, 1 \leq k < n | X_0 = i\} \\
&+ P\{X_n = i \text{ за неко } n \geq 2 | X_k \neq j \text{ за свако } k, 1 \leq k < n\} (1 - p_{ij}) < 1.
\end{aligned}$$

□

Пример 6.11. (размножаваће грашка) Овде је $E_0 = \{Aa\}, E_1 = \{AA\}, E_2 = \{aa\}$. Сва стања су непериодична.

Пример 6.12. (миш у лавиринту) Овде је $E_1 = \{1, 2, \dots, 9\}$. Период свих стања је 2, јер миш може да се врати у просторију из које је управо изашао.

6.3 Дугорочна правилност у промени стања код ланаца Маркова

У овој лекцији разматраћемо две врсте правилности у понашању ланаца Маркова: постојање стационарне расподеле и ергодичност.

6.3.1 Стационарне расподеле

Дефиниција 6.9. Стационарна расподела за хомогени ланац Маркова $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ са скупом стања $\mathbb{Z}$ је расподела вероватноћа $(\pi_i), i \in \mathbb{Z}$, $\sum_{i \in \mathbb{Z}} \pi_i = 1$ за коју важи

$$p_i^{(0)} = P\{X_0 = i\} = \pi_i, i \in \mathbb{Z} \Rightarrow p_i^{(n)} = P\{X_n = i\} = \pi_i, i \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}.$$

Напомена 6.8. $(\pi_i), i \in \mathbb{Z}$ је стационарна расподела ако

$$\pi_j = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \pi_i p_{ij}(n), j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}.$$

Ово даје практичан начин да се одреди стационарна расподела: решавањем матричне једначине $\pi = \pi \cdot \mathbf{P}$.

Стационарна расподела даје пропорцију времена коју систем проводи у појединачним стањима до тренутка n , за велико n . Стационарна расподела не мора да постоји, ни да буде јединствена.

Пример 6.13. (размножавање грашкa) Овде је $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$. Једнакост $\pi = \pi \cdot \mathbf{P}$ има расписани облик:

$$[\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3] = [\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

одакле следи

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (\pi_1 + \pi_2/4, \pi_2/2, \pi_2/4 + \pi_3).$$

Уз услов $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$ добија се да стационарних расподела има бесконачно много и имају облик

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (\alpha, 0, 1 - \alpha), \quad \alpha \in [0, 1].$$

Пример 6.14. (систем са два стања) Проверити да је у овом случају стационарна расподела:

$$(\pi_1, \pi_2) = \left(\frac{q}{p+q}, \frac{p}{p+q} \right).$$

Пример 6.15. (најдужи непрекинути низ код бацања новчића) Проверити да је у овом случају стационарна расподела јединствена и има облик

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots), \quad \pi_n = \frac{1}{2^{n+1}}, n \in \mathbb{N}_0.$$

Пример 6.16. Пробајте да смислите пример ланца Маркова за који не постоји стационарна расподела.

6.3.2 Ергодичност

У претходној лекцији смо видели шта је стационарна расподела, а сада дефинишемо један нови појам (ергодичност), а у вези с њим и још једну врсту граничне расподеле.

Дефиниција 6.10. Хомогени ланац Маркова $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ са скупом стања S је **ергодичан** ако за произвољна стања $i, j \in S$ постоји

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) = p_j > 0,$$

где p_j не зависи од i и важи $\sum_{j \in S} p_j = 1$.

Напомена 6.9. Ово значи да „гранична” матрица $\mathbf{P}^n$, $n \rightarrow \infty$ има све врсте једнаке (што значи да није битно из ког стања се полази, већ само у које стање се стиже).

Напомена 6.10. Ако постоји оваква гранична расподела $(p_j), j \in S$, онда је то уједно и стационарна расподела. Заиста, ако пођемо од матричне једнакости

$$\mathbf{P}^{n+1} = \mathbf{P}^n \cdot \mathbf{P},$$

онда кад $n \rightarrow \infty$ добијамо

$$\begin{bmatrix} v \\ v \\ \vdots \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ v \\ \vdots \\ v \end{bmatrix} \cdot \mathbf{P},$$

где је v вектор који се појављује као та поновљена врста граничне матрице (тј. $v = (p_j), j \in S$ је гранична расподела). Кад у добијеној матричној једнакости посматрамо било који врсту, добијамо да важи

$$v = v \cdot \mathbf{P},$$

тј. да је v заиста стационарна расподела за тај ланац.

Сад ћемо да одредимо довољан услов за ергодичност у случају кад је скуп стања коначан.

Теорема 6.5. Нека је $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ хомогени ланац Маркова са коначним скупом стања $S = \{1, 2, \dots, m\}$, за који важи $p_{ij} \geq \delta$, за неко $\delta > 0$ и све $i, j \in S$. Тада је ланац $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ ергодичан.

Доказ. Из једначина Колмогоров - Чепмена следи позитивност граничних вероватноћа:

$$p_{ij}(n) = \sum_{k=1}^m p_{ik}(n-1)p_{kj}(1) = \sum_{k=1}^m p_{ik}(n-1)p_{kj} \geq \delta \sum_{k=1}^m p_{ik}(n-1) = \delta$$

Нека је j фиксирано стање и

$$\alpha_{n,j} = \min\{p_{1j}(n), p_{2j}(n), \dots, p_{mj}(n)\},$$

$$\beta_{n,j} = \max\{p_{1j}(n), p_{2j}(n), \dots, p_{mj}(n)\}.$$

Доказујемо да важи:

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{n,j} = \alpha, \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_{n,j} = \beta, \quad \alpha \leq \beta$$

1. $\alpha_{n,j} \leq \beta_{n,j}$ је очигледно

2. Доказујемо да је $\alpha_{n+1,j} \geq \alpha_{n,j}$: опет се примењују једначине Колмогоров - Чепмена, па се добија

$$p_{ij}(n+1) = \sum_{k=1}^m p_{ik}p_{kj}(n) \geq \alpha_{n,j} \sum_{k=1}^m p_{ik} = \alpha_{n,j}.$$

3. Доказујемо да је $\beta_{n+1,j} \leq \beta_{n,j}$: из једначина Колмогоров - Чепмена, па се добија

$$p_{ij}(n+1) = \sum_{k=1}^m p_{ik}p_{kj}(n) \leq \beta_{n,j} \sum_{k=1}^m p_{ik} = \beta_{n,j}.$$

Доказујемо да је $\alpha = \beta$: $p_{ij}(n+1) = \sum_{k=1}^m p_{ik}p_{kj}(n)$. Први члан на десној страни је $\geq \delta$, а сваки од преосталих је $\geq \alpha_{n,j}$, а бар један од њих је једнак $\beta_{n,j}$ (нека је $p_{k_0j}(n) = \beta_{n,j}$). Тада важи

$$\begin{aligned} p_{ij}(n+1) &\geq \alpha_{n,j} \sum_{k=1}^m p_{ik} - \alpha_{n,j}p_{ik_0} + p_{ik_0}\beta_{n,j} \\ &= \alpha_{n,j} \sum_{k=1}^m p_{ik} + p_{ik_0}(\beta_{n,j} - \alpha_{n,j}) \\ &\geq \alpha_{n,j} \sum_{k=1}^m p_{ik} + \delta(\beta_{n,j} - \alpha_{n,j}) \end{aligned}$$

С друге стране, сваки од чланова $p_{kj}(n) \leq \beta_{n,j}$, а бар један од њих је једнак $\alpha_{n,j}$ (нека је $p_{k_1j}(n) = \alpha_{n,j}$).

$$\begin{aligned} p_{ij}(n+1) &\leq \beta_{n,j} \sum_{k=1}^m p_{ik} - \beta_{n,j}p_{ik_1} + p_{ik_1}\alpha_{n,j} \\ &= \beta_{n,j} \sum_{k=1}^m p_{ik} + p_{ik_1}(\alpha_{n,j} - \beta_{n,j}) \\ &\leq \beta_{n,j} \sum_{k=1}^m p_{ik} + \delta(\alpha_{n,j} - \beta_{n,j}) \end{aligned}$$

Одатле следи

$$\begin{aligned} \beta_{n+1,j} - \alpha_{n+1,j} &\leq (\beta_{n,j} - \alpha_{n,j})(1 - 2\delta), \quad n \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow \beta_{n,j} - \alpha_{n,j} &\rightarrow 0, n \rightarrow \infty \\ \Rightarrow \alpha = \beta &= \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n). \end{aligned}$$

□

Сад доказујемо једну последицу претходне теореме, која ће мало да „олабави“ довољан услов.

Теорема 6.6. Нека је $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ хомогени ланац Маркова са коначним скупом стања $S = \{1, 2, \dots, m\}$, за који важи $p_{ij}(r) \geq \delta$, за неке $\delta > 0$ и $r \in \mathbb{N}$ и све $i, j \in S$. Тада је ланац $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ ергодичан.

Доказ. Нека је $Y_t = X_{tr}$. Тада је, на основу претходне теореме, $\{Y_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ ергодичан ланац. Дакле, $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(nr) = p_j$, при чему p_j не зависи од i .

Опет користимо једначине Колмогоров - Чепмена:

$$\begin{aligned} p_{ij}(nr+1) &= \sum_{k=1}^m p_{ik}p_{kj}(nr) \rightarrow p_j \sum_{k=1}^m p_{ik} = p_j, \quad n \rightarrow \infty, \\ p_{ij}(nr+2) &= \sum_{k=1}^m p_{ik}p_{kj}(nr+1) \rightarrow p_j \sum_{k=1}^m p_{ik} = p_j, \quad n \rightarrow \infty, \\ &\dots \\ p_{ij}(nr+r-1) &\rightarrow p_j, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

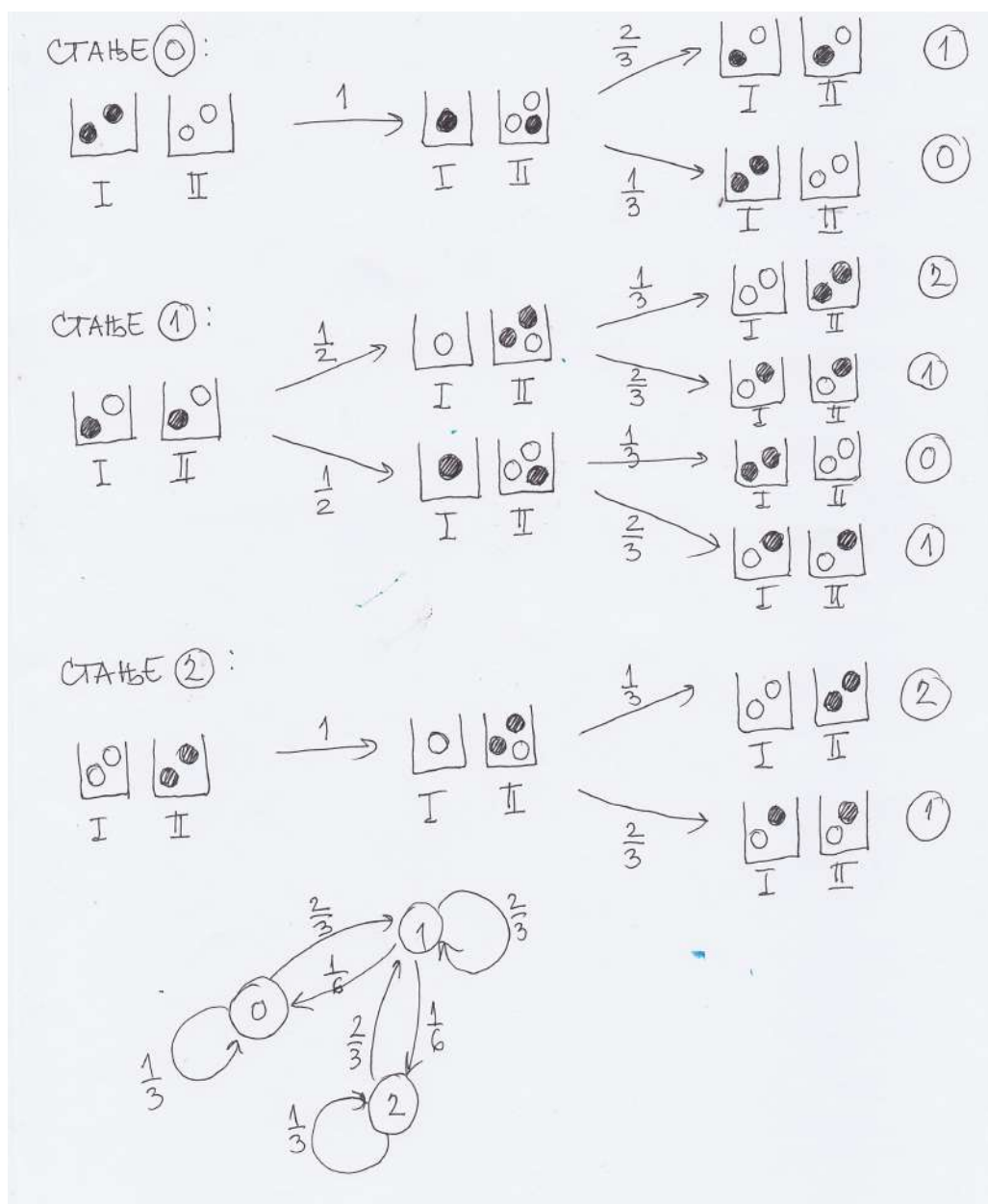
Одавде следи да $p_{ij}(n) \rightarrow p_j, n \rightarrow \infty$ за свако n , што значи да је ланац $\{X_t, t \in \mathbb{N}_0\}$ ергодичан. □

Пример 6.17. (пример ергодичног ланца) У првој кутији налазе се две беле куглице, а у другој две црне. Изводи се следећа операција, која се састоји од два корака:

1. први корак: из прве кутије се случајно бира једна куглица и пребацује у другу кутију;
2. други корак: из друге кутије се случајно бира једна куглица и пребацује у прву кутију.

Нека је X_t број белих куглица у првој кутији после t операција. Тада је $\{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ ергодичан ланац Маркова.

У овом случају, скуп стања је $S = \{0, 1, 2\}$. Сви могући прелази из једног стања у друго нацртани су на Слици 1.



Слика 11:

Одатле се добија да је матрица вероватноћа преласка:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Прво треба одредити матрицу

$$\mathbf{P}^n = \frac{1}{6^n} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}^n = \frac{1}{6^n} \mathbf{C}^n$$

Одређујемо карактеристичне вредности матрице $\mathbf{C}$:

$$\det(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 4 & 0 \\ 1 & 4 - \lambda & 1 \\ 0 & 4 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda(2 - \lambda)(\lambda - 6)$$

Дакле, карактеристичне вредности су $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 6$.

Сад за сваку од карактеристичних вредности одређујемо одговарајући карактеристични вектор.

1. за $\lambda_1 = 0$:

$$\begin{bmatrix} p & q & r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} p & q & r \end{bmatrix}$$

Решење има облик $(p, -2p, p)$, па је један карактеристични вектор $v_1 = (1, -2, 1)$.

2. за $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{bmatrix} p & q & r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} p & q & r \end{bmatrix}$$

Решење има облик $(p, 0, -p)$, па је један карактеристични вектор $v_2 = (1, 0, -1)$.

3. за $\lambda_3 = 6$:

$$\begin{bmatrix} p & q & r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} = 6 \cdot \begin{bmatrix} p & q & r \end{bmatrix}$$

Решење има облик $(p, 4p, p)$, па је један карактеристични вектор $v_3 = (1, 4, 1)$.

Добија се:

$$\mathbf{C}^n = \mathbf{B}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{bmatrix} \cdot \mathbf{B},$$

где је

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Важно:

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & -6 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

па се добија

$$\mathbf{C}^n = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 6^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 \cdot 2^n + 6^n & 4 \cdot 6^n & 6^n - 3 \cdot 2^n \\ 6^n & 4 \cdot 6^n & 6^n \\ 6^n - 3 \cdot 2^n & 4 \cdot 6^n & 6^n + 3 \cdot 2^n \end{bmatrix}$$

На крају,

$$\mathbf{P}^n = \frac{1}{6^n} \mathbf{C}^n = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3/3^n + 1 & 4 & -3/3^n + 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -3/3^n + 1 & 4 & 3/3^n + 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3/3^n & 0 & -3/3^n \\ 0 & 0 & 0 \\ -3/3^n & 0 & 3/3^n \end{bmatrix} + \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Кад $n \rightarrow \infty$, онда важи:

$$\mathbf{P}^n \rightarrow \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Добили смо граничну матрицу чије су све врсте једнаке, што потврђује да је ланац ергодичан. Гранична расподела је:

$$(p_1, p_2, p_3) = \frac{1}{6}(1, 4, 1) = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right).$$

Пример 6.18. (пример ланца који није ергодичан) Проверити за размножавање граш-ка!

6.4 Случајно лутање као ланац Маркова

Сад ћемо детаљније размотрити случајно лутање као ланац Маркова и покушати да применимо различита тврђења која смо до сада формулисали. Овај случај специјално издвајамо јер је матрица вероватноћа преласка бесконачна, па не можемо да користимо матрични рачун.

Честица креће из нуле скоро сигурно и прави корак у позитивном смеру са вероватноћом p , а у негативном са вероватноћом $1 - p$. S_n , за $n \in \mathbb{N}$, представља положај честице у тренутку n .

$$P\{X_k = 1\} = p, \quad P\{X_k = -1\} = 1 - p, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$S_0 = 0 \text{ с.с.}, \quad S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Тада је $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ ланац Маркова са скупом стања $\mathbb{Z}$. Даље одређујемо особине овог ланца.

1. почетна расподела:

$$p_0^{(0)} = 1, \quad p_i^{(0)} = 0 \text{ за } i \neq 0$$

(следи из чињенице да честица полази из нуле скоро сигурно)

2. вероватноће преласка:

$$p_{ij} = \begin{cases} p, & j = i + 1 \\ 1 - p, & j = i - 1 \\ 0, & j \neq i + 1, i - 1 \end{cases}$$

3. вероватноће преласка у n корака: Ако је направљено x корака у позитивном и y корака у негативном смеру, онда је

$$x + y = n, \quad x - y = j - i,$$

одакле се добија

$$x = \frac{n + j - i}{2}, \quad y = \frac{n - j + i}{2}$$

Кад искористимо чињеницу да број корака мора бити цео, добијамо:

$$p_{ij}(n) = \begin{cases} 0, & n + j - i \text{ непаран број} \\ \binom{n}{\frac{n+j-i}{2}} p^{\frac{n+j-i}{2}} (1-p)^{\frac{n-j+i}{2}}, & n + j - i \text{ паран број} \end{cases}$$

4. класификација стања: Овде ћемо искористити Стирлингову апроксимацију факторијела.

$$\begin{aligned} p_{ii}(2n) &= \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n \\ &= \frac{(2n)!}{(n!)^2} p^n (1-p)^n \\ &\sim \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n}}{n^{2n} e^{-2n} 2\pi n} p^n (1-p)^n \\ &= \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}}, \quad n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

За свако $n \in \mathbb{N}_0$ важи $p_{ii}(2n+1) = 0$. Имамо два случаја.

- (а) $p = \frac{1}{2}$: $p_{ii}(2n) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$, па одговарајући ред дивергира, што значи да је i повратно стање; пошто то важи за произвољно стање i , сва стања су повратна;
- (б) $p \neq \frac{1}{2}$: $4p(1-p) < 1$, па одговарајући ред конвергира, што значи да је i пролазно стање; пошто то важи за произвољно стање i , сва стања су пролазна.

5. одређивање v_{ij} : Опет имамо два случаја.

- (а) $i < j$: Због независности корака у лутању важи

$$v_{ij} = v_{01}^{j-i}.$$

Корак у позитивном смеру се може направити директно или као корак у негативном, па два корака у позитивном смеру. Одатле се добија једначина

$$v_{01} = p + (1-p)v_{01}^2,$$

чија су решења $p/(1-p)$ и 1. Дакле,

$$v_{01} = \begin{cases} \frac{p}{1-p}, & 0 \leq p \leq \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \leq p \leq 1 \end{cases}$$

$$v_{ij} = \begin{cases} \left(\frac{p}{1-p}\right)^{j-i}, & 0 \leq p \leq \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \leq p \leq 1 \end{cases}$$

(б) $i > j$: p и $1-p$ размењују места, па се добија

$$v_{ij} = \begin{cases} \left(\frac{p}{1-p}\right)^{j-i}, & \frac{1}{2} \leq p \leq 1 \\ 1, & 0 \leq p \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Честица може да остане у истом стању i тако што направи корак у позитивном смеру па се враћа из стања $i+1$ у стање i , или тако што прво направи корак у негативном смеру, па се онда враћа из стања $i-1$ у стање i . Због тога се добија низ једнакости:

$$\begin{aligned} v_{ii} &= pv_{i+1,i} + (1-p)v_{i-1,i} \\ &= \begin{cases} p \cdot 1 + (1-p)\frac{p}{1-p}, & 0 \leq \frac{1}{2} \leq 1 \\ p \cdot \frac{1-p}{p} + (1-p) \cdot 1, & \frac{1}{2} \leq p \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2p, & 0 \leq \frac{1}{2} \leq 1 \\ 2(1-p), & \frac{1}{2} \leq p \leq 1 \end{cases} \\ &= 1 - |2p - 1|. \end{aligned}$$

Одатле се на други начин добија класификација стања.

6.5 Процеси гранања

Процеси гранања су врста ланаца Маркова, која има занимљиве примене у разним областима живота. Рад са овим процесима је мало другачији од техника које смо до сада упознали.

6.5.1 Прости процес гранања

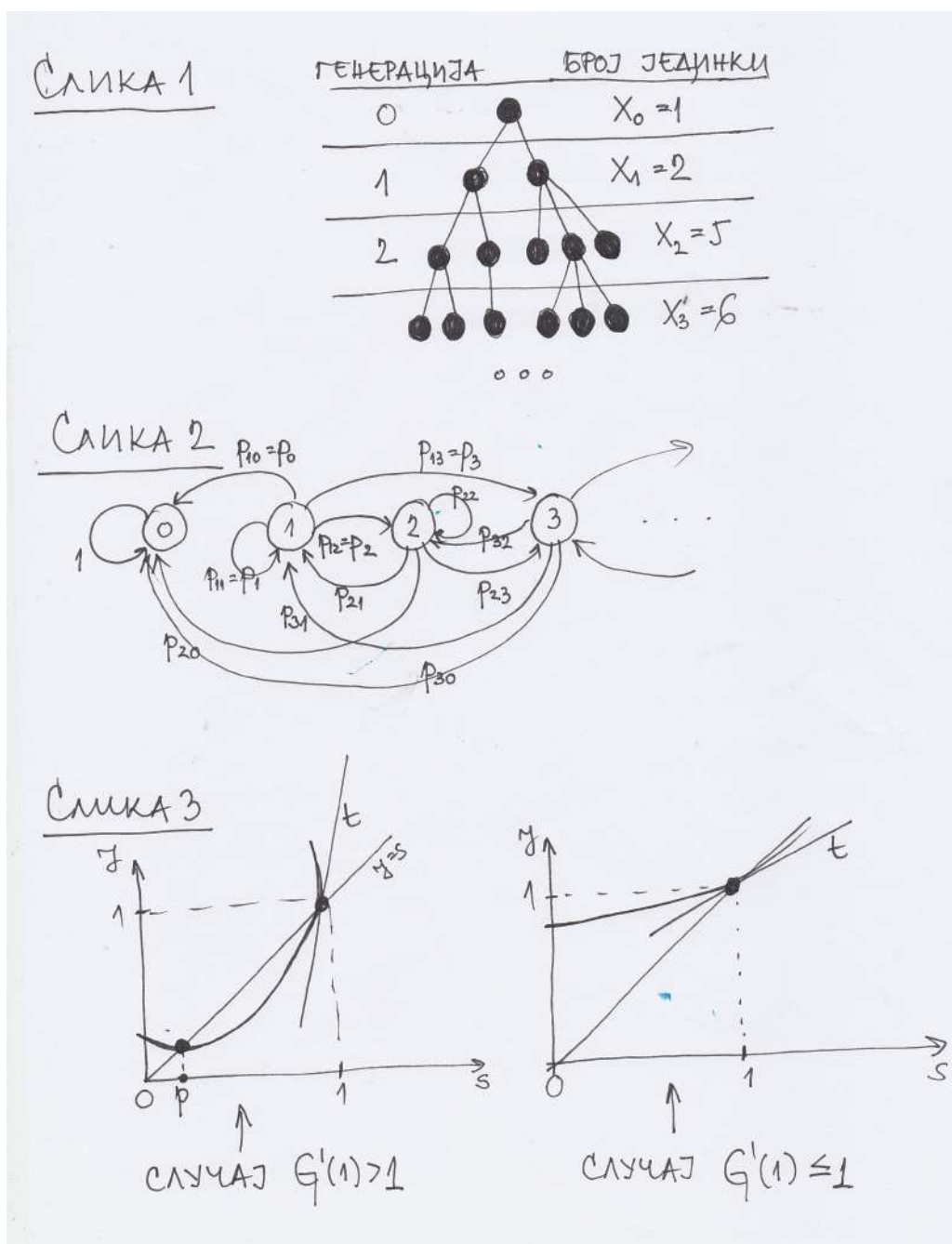
Прости процес гранања се може неформално описати на следећи начин:

Популација почиње од једне јединке, која се у неком тренутку распада на (раћа) фамилију јединки исте врсте. То се даље наставља кроз генерације. Вредност процеса у тренутку (генерацији) n се дефинише као број јединки рођених у n -тој генерацији.

Један пример еволуције процеса је нацртан на Слици 1. Претпоставке су:

1. величине фамилија (број потомака у фамилији) су независне случајне величине;
2. величине фамилија су једнако расподељене случајне величине са вредностима у скупу $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ и та расподела је позната.

Формални опис процеса дат је следећом дефиницијом.



Дефиниција 6.11. Нека је $\{Y_{nj}, n, j \in \mathbb{N}\}$ фамилија независних случајних величина са вредностима у скупу $\mathbb{N}_0$ и истом расподелом

$$p_k = P\{Y_{n,j} = k\}, k \in \mathbb{N}_0.$$

Случајни процес $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$, дефинисан са:

$$\begin{aligned} X_0 &= 1, \\ X_1 &= Y_{1,1}, \\ X_2 &= Y_{2,1} + Y_{2,2} + \cdots + Y_{2,X_1}, \\ &\dots \\ X_n &= Y_{n,1} + Y_{n,2} + \cdots + Y_{n,X_{n-1}}, \\ &\dots \end{aligned}$$

зове се **прост процес гранања**.

Случајна величина $Y_{n,j}$ представља број јединки у n -тој генерацији које су потомци j -те јединке у $n - 1$ -вој генерацији.

Неке карактеристичне примене овог процеса су:

- Историјски прва примена овог процеса односи се на одржавање породичног презимена кроз генерације (броје се мушки потомци у породици). Тај проблем је описан у раду Галтона (Francis Galton (1822.-1911.)) и Вотсона (Henry William Watson (1827.-1903.)). Из преписке Галтона и Вотсона о проблему наслеђивања аристократских презимена 1873. настаје рад “On the probability of extinction of families” из 1874. Треће име које се помиње је Iréné-Jules Bienaymé (1796.-1878.). Процес гранања има и разне друге (компликованије) примене у генетици.
- Примена у физици односи се на нуклеарне реакције (рани модел за распад неутрона). Прецизније, неутрон се распада на m других са вероватноћом p , а апсорбује се са вероватноћом $1 - p$, па се у том контексту појављује процес гранања.
- Процес гранања се примењује у теорији масовног опслуживања. Овде је нулта генерација корисник услуге који долази пред празан шалтер, прва генерација су корисници који пристигну док се он не послужи, итд.

Интересантна питања везана за процес гранања су:

1. одређивање вероватноће догађаја да посматрана популација опстане до n -те генерације:

$$P\{X_n \neq 0\}$$

2. одређивање вероватноће догађаја да посматрана популација опстане кроз бесконачно много генерација:

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \{X_n \neq 0\}\right)$$

3. одређивање вероватноће догађаја да посматрана популација изумре најкасније до n -те генерације:

$$P\{X_n = 0\}$$

4. одређивање вероватноће догађаја да посматрана популација изумре некад у будућности:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \{X_n = 0\}\right)$$

6.5.2 Генераторне функције (подсетник)

Овде су наведене најважније особине генераторних функција, које се користе при извођењу особина простог процеса гранања.

Теорема 6.7. Нека су $X_1, X_2, \dots, X_n$, $n \in \mathbb{N}$ независне случајне величине са истом расподелом и нека је G_{X_1} генераторна функција сваке од њих. Нека је N случајна величина са вредностима у $\mathbb{N}_0$, независна од $X_1, X_2, \dots, X_n$, са генераторном функцијом G_N , и

$$S_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N, \quad S_0 = 0.$$

Тада важи:

$$G_{S_N}(s) = G_N(G_{X_1}(s)).$$

Напомена 6.11. Ако је број сабирака 0, онда је случајна сума једнака 0.

Доказ.

$$\begin{aligned} G_{S_N}(s) &= E(s^{S_N}) \\ &= E(E(s^{S_N}|N)) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} E(s^{S_n}) P\{N = n\} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} E(s^{X_1+X_2+\dots+X_n}) P\{N = n\} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (E(s^{X_1})^n) P\{N = n\} \text{ (независност)} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (G_{X_1}(s)^n) P\{N = n\} \\ &= G_N(G_{X_1}(s)) \end{aligned}$$

□

Последица 6.2.

$$E(S_N) = E(N)E(X_1).$$

Доказ.

$$E(S_N) = G'_{S_N}(1)$$

$$\begin{aligned} G'_{S_N}(s) &= (G_N(G_{X_1}(s)))' \\ &= G'_N(G_{X_1}(s)) G'_{X_1}(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(S_N) &= G'_N(G_{X_1}(1)) G'_{X_1}(1) \\ &= G'_N(1) G'_{X_1}(1) \\ &= E(N) E(X_1) \end{aligned}$$

□

Пример 6.19. Патка снесе N јаја, где је $N \in \mathcal{P}(\lambda)$. Из сваког јајета се, независно од осталих, излезне паче са вероватноћом $p \in (0, 1)$. Одредити расподелу и математичко очекивање броја пачића. (решење: λp)

6.5.3 Процес гранања као ланац Маркова

Прости процес гранања $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ је ланац Маркова са скупом стања $\mathbb{N}_0$. Преласци из једног стања у друго нацртани су на Слици 2.

Вероватноћа преласка из стања i у стање j , $i, j \in \mathbb{N}_0$ се могу добити на следећи начин:

$$\begin{aligned} p_{ij} &= P\{X_n = j | X_{n-1} = i\} \\ &= P\{Y_{n,1} + Y_{n,2} + \cdots + Y_{n,i} = j\} \\ &= \frac{1}{j!} \frac{\partial^j ((G_{Y_{1,1}}(s))^i)}{(\partial^s)^j} \Big|_{s=0} \end{aligned}$$

6.5.4 Вероватноћа изумирања популације

Одређујемо вероватноћу догађаја да посматрана популација изумре некад у будућности,

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \{X_n = 0\}\right).$$

Прво доказујемо једно помоћно тврђење.

Лема 6.1. Нека су $G(s)$ и $G_{X_n}(s)$ генераторне функције случајних величина $Y_{1,1}$ и X_n , редом,

$$A_n = \{X_n = 0\}, \quad A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{X_n = 0\}.$$

Тада важи:

$$1. G_{X_n}(s) = G(G_{X_{n-1}}(s))$$

$$2. E(X_n) = (G'(1))^n$$

3.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) = \begin{cases} 0, & G'(1) < 1 \\ 1, & G'(1) = 1 \\ +\infty, & G'(1) > 1 \end{cases}$$

$$4. P(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$$

Доказ. 1. Из $X_n = Y_{n,1} + Y_{n,2} + \cdots + Y_{n,X_{n-1}}$ и једне од претходних теорема следи $G_{X_n}(s) = G_{X_{n-1}}(G(s))$, а важи и $G_{X_0}(s) = s$. Даље се доказује математичком индукцијом:

- $n = 1$: $G_{X_1}(s) = G(s)$, по дефиницији процеса;
- $n = 2$: $G_{X_2}(s) = G_{X_1}(G(s)) = G(G(s)) = G(G_{X_1}(s))$;
- $n - 1 \Rightarrow n$: $G_{X_n}(s) = G_{X_{n-1}}(G(s)) = G(G_{X_{n-2}}(G(s))) = G(G_{X_{n-1}}(s))$;

$$2. E(X_n) = E(X_{n-1})E(Y_{1,1}), \text{ даље индукцијом;}$$

$$3. \text{ директно из (2);}$$

4. из $\{X_n = 0\} \subset \{X_{n+1} = 0\} \subset \dots$ следи да је (A_n) растући низ догађаја, одакле се добија

$$P(A) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n).$$

□

Теорема 6.8. Вероватноћа изумирања популације код простог процеса гранања је:

$$P(A) = \begin{cases} 1, & G'(1) \leq 1, \\ p, & G(p) = p, p \in [0, 1), G'(1) > 1. \end{cases}$$

Доказ. Лако се проверава да је на интервалу $[0, 1]$ функција G непрекидна, неопадајућа и конвексна.

1. Доказујемо да је $a = P(A)$ решење једначине $G(s) = s$. Нека је $a_n = P(A_n)$. Тада важи:

$$A_n \subset A_{n+1} \Rightarrow a_n \leq a_{n+1}.$$

Низ (a_n) је неопадајући, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$. По претходној лемии је

$$G_{X_{n+1}}(s) = G(G_{X_n}(s)),$$

па се за $s = 0$ добија $G_{X_{n+1}}(0) = G(G_{X_n}(0))$, тј. $a_{n+1} = G(a_n)$. На основу претходног и непрекидности функције G добија се

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} G(a_n) = G\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) = G(a),$$

одакле следи $a = G(a)$.

2. Доказујемо да је a најмање од решења ове једначине. Ако је $q, q \in [0, 1]$ произвољно решење, онда је

$$\begin{aligned} a_1 &= G(a_0) = G(0) \leq G(q) = q, \text{ (јер је } a_0 = P\{X_0 = 0\} = 0) \\ a_2 &= G(a_1) \leq G(q) = q, \\ &\dots \\ a_n &= G(a_{n-1}) \leq G(q) = q \end{aligned}$$

Значи, $a_n \leq q$ за свако $n \in \mathbb{N}$, па је $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq q$.

3. G је конвексна функција на $[0, 1]$, непрекидна, па криве $y = G(s)$ и $y = s$ могу имати највише две заједничке тачке, од којих је једна $s = 1$ (јер је $G(1) = 1$) (Слика 3), одакле следи тврђење теореме.

□

Пример 6.20. Нека је $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ прости процес гранања, такав да је

$$p_k = P\{Y_{1,1} = k\} = p(1-p)^k, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad p \in (0, 1), \quad p \neq \frac{1}{2}.$$

Одредити вероватноћу изумирања популације. (Решење: 1 за $p > 1/2$ и $p/(1-p)$ за $p < \frac{1}{2}$)

6.6 Ланци Маркова са непрекидним временом

Сад дефинишемо ланце Маркова у непрекидном времену и наводимо основне особине.

6.6.1 Дефиниција и основна својства

Дефиниција 6.12. Случајни процес $\{X(t), t \geq 0\}$ са скупом стања $\mathbb{Z}$ за који важи својство Маркова:

$$P\{X(t_n) = j | X(t_1) = i_1, X(t_2) = i_2, \dots, X(t_{n-1}) = i\} = P\{X(t_n) = j | X(t_{n-1}) = i\},$$

за све $n \in \mathbb{N}$, $i, j, i_1, i_2, \dots \in \mathbb{Z}$ и сваку поделу $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ је ланац Маркова у непрекидном времену са пребројивим скупом стања.

Вероватноће преласка $p_{ij}(s, t)$ дефинисане су за $0 \leq s \leq t$ и $i, j \in \mathbb{Z}$:

$$p_{ij}(s, t) = P\{X(t) = j | X(s) = i\}.$$

Ланац је **хомоген** ако је $p_{ij}(s, t) = p_{ij}(0, t - s) = p_{ij}(t - s)$.

Расподеле произвољних засека ланца Маркова са непрекидним временом се рачунају исто као и у дискретном случају.

Такође, на исти начин као у дискретном случају, показује се да важе **једначине Колмогоров-Чепмена**:

$$p_{ij}(s + t) = \sum_k p_{ik}(s) p_{kj}(t), \text{ за све } s, t > 0, i, j \in \mathbb{Z}.$$

Неки карактеристични примери ових процеса:

Пример 6.21. (хомогени Пуасонов процес са интензитетом λ) Кад $t \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} p_{i,i+1}(t) &= \lambda t + o(t), \\ p_{i,i}(t) &= 1 - \lambda t + o(t), \\ p_{i,i+k}(t) &= o(t), k \geq 2, \\ p_{i,j}(t) &= 0, i > j \end{aligned}$$

Пример 6.22. (процес гранања код кога се промене броја јединки дешавају у произвољним временским тренуцима) Популација почиње од једне јединке, а k -та јединка које припадају популацији у тренутку t у интервалу $[t, t + s)$ рађа Y_k јединки са вероватноћом $\mu s + o(s)$ где је $\{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$ низ независних случајних величина са истом расподелом и скупом вредности $\mathbb{N}_0$.

Пример 6.23. (процеси рађања и умирања) Ово је слично претходном примеру, само што се додатно претпостави да свака од јединки које припадају популацији у тренутку t у интервалу $[t, t + s)$ умире са вероватноћом $\lambda s + o(s)$.

Пример 6.24. (предатори и плен) Претходни пример се може још више закомпликовати тако што се претпостави да постоје две различите популације: предатори (који се размножавају у складу са једном расподелом) и плен (који се размножава у складу са другом расподелом). Нови услов је да предатори убијају плен (у складу са трећом расподелом, која зависи од величине популације предатора). Тако се цела ствар још више компликује.

Пример 6.25. (радиоактивни распад честица) О овом примеру се може детаљније прочитати у књизи [5].

6.6.2 Диференцијалне једначине Колмогорова

Кад радимо са непрекидним процесима, добијамо могућност да користимо резултате добијене диференцијално - интегралним рачуном. Овде ћемо размотрити један резултат тог типа, који има значајну примену у различитим областима (између осталог, у осигурању и финансијској математици).

Ако су вероватноће преласка $p_{ij}(t), t \geq 0$ диференцијабилне по t , тада важи:

$$\begin{aligned}\lambda_{ii} = p'_{ii}(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{ii}(h) - p_{ii}(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{ii}(h) - 1}{h} = -\lambda_i \leq 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_{ij} = p'_{ij}(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(h) - p_{ij}(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(h)}{h} \geq 0, \quad i \neq j.\end{aligned}$$

Теорема 6.9. Нека је $\{X(t), t \geq 0\}$ ланац Маркова са непрекидним временом и коначним скупом стања S , вероватноће преласка $p_{ij}(t), t \geq 0$ диференцијабилне по t , $\lambda_{ij} = p'_{ij}(0)$ за $i, j \in S$. Тада важи:

1. обрнути систем диференцијалних једначина Колмогорова:

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k \in S} \lambda_{ik} p_{kj}(t), \quad i, j \in S,$$

2. директни систем диференцијалних једначина Колмогорова:

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k \in S} p_{ik}(t) \lambda_{kj}, \quad i, j \in S,$$

Доказ. Нека је $S = \{1, 2, \dots, m\}$. Тада важи, на основу једначина Колмогоров-Чепмена:

$$p_{ij}(t+h) = \sum_{k=1}^m p_{ik}(h) p_{kj}(t) = \sum_{k=1}^m p_{ik}(t) p_{kj}(h).$$

Одатле следи:

$$\begin{aligned}\frac{p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)}{h} &= \sum_{k=1}^m \frac{p_{ik}(h) - p_{ik}(0)}{h} p_{kj}(t) \\ &= \sum_{k=1}^m p_{ik}(t) \frac{p_{kj}(h) - p_{kj}(0)}{h}.\end{aligned}$$

Постојање граничне вредности десне стране повлачи постојање граничне вредности леве стране, па следи:

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)}{h} = p'_{ij}(t).$$

□

Напомена 6.12. Уз неке додатне услове тврђење важи и за ланац са пребројиво много стања. Комплетан доказ за општи случај се може наћи у књизи [7].

7 Случајни процеси са ортогоналним прираштајима

У овој лекцији ћемо детаљније размотрити случајне процесе са ортогоналним прираштајима, које смо већ дефинисали на почетку курса.

7.1 Дефиниција и основна својства

Дефиниција 7.1. *Комплексни случајни процес $\{X(t), t \in T\}$ је процес са ортогоналним прираштајима ако је важе услови:*

1.

$$E|X(t) - X(s)|^2 < +\infty, \text{ за } t, s \in T,$$

2.

$$E(X(t_4) - X(t_3))(\overline{X(t_2) - X(t_1)}) = 0, \quad \text{за } t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4.$$

Дефиниција 7.2. *Комплексни случајни процес $\{X(t), t \in T\}$ је процес са некорелисаним прираштајима ако је важе услови:*

1.

$$E|X(t) - X(s)|^2 < +\infty, \text{ за } t, s \in T,$$

2.

$$E(X(t_4) - X(t_3))(\overline{X(t_2) - X(t_1)}) = E(X(t_4) - X(t_3))E(\overline{X(t_2) - X(t_1)}),$$

$$\text{за } t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4.$$

Пример 7.1. *Винеров процес има ортогоналне и некорелисане прираштаје, а Пуасонов процес има некорелисане прираштаје. Проверити!*

Особине:

- Ако је $\{X(t)\}$ случајни процес са некорелисаним прираштајима, онда је

$$\{X^*(t)\}, \quad X^*(t) = X(t) - EX(t)$$

сл. процес са ортогоналним и некорелисаним прираштајима. Надаље ће се често претпостављати $EX(t) = 0$.

- Ако је $\{X(t)\}$ L^2 -процес са независним прираштајима, онда он има и некорелисане прираштаје.

7.2 Структурна функција

Сваком случајном процесу са ортогоналним прираштајима можемо да доделимо једну (неслучајну) функцију, коју зовемо **структурна функција**. Сад ћемо видети како се функција дефинише и које су њене основне особине. Значај и улога ове функције ће се разјаснити у наставку курса.

Дефиниција 7.3. *Нека је $\{X(t), t \in T\}$ случајни процес са ортогоналним прираштајима и $t_0 \in T$, фиксирано. Структурна функција процеса $\{X(t)\}$ (у односу на почетну тачку t_0) је*

$$F_{t_0}(t) = \begin{cases} E|X(t) - X(t_0)|^2, & t \geq t_0; \\ -E|X(t) - X(t_0)|^2, & t < t_0. \end{cases}$$

Особине структурне функције:

•

$$F_{t_0}(t) - F_{t_0}(s) = F_s(t).$$

Доказ. Нека је $s \leq t$. Тада је

$$F_{t_0}(t) - F_{t_0}(s) = \begin{cases} E|X(t) - X(t_0)|^2 - E|X(s) - X(t_0)|^2, & t_0 \leq s; \\ E|X(t) - X(t_0)|^2 + E|X(s) - X(t_0)|^2, & s < t_0 \leq t; \\ -E|X(t) - X(t_0)|^2 + E|X(s) - X(t_0)|^2, & t_0 > t. \end{cases}$$

У првом случају се добија (а слично и у преостала два):

$$\begin{aligned} & E|X(t) - X(t_0)|^2 - E|X(s) - X(t_0)|^2 \\ = & E|X(t)|^2 - EX(t)\overline{X(t_0)} - \overline{EX(t)}X(t_0) - E|X(s)|^2 + EX(s)\overline{X(t_0)} + \overline{EX(s)}X(t_0) \\ = & E(X(t) - X(s))(X(s) - X(t_0)) + E(X(t) - X(s))(X(s) - X(t_0)) \\ & + E|X(s)|^2 + E|X(t)|^2 - EX(t)\overline{X(s)} - \overline{EX(t)}X(s) \\ = & E|X(t) - X(s)|^2 = F_s(t). \end{aligned}$$

□

Пошто резултат не зависи од почетне тачке, користи се и мало другачија дефиниција:

$$F(t) - F(s) = \begin{cases} E|X(t) - X(s)|^2, & t \geq s; \\ -E|X(t) - X(s)|^2, & t < s, \end{cases} \quad (20)$$

што се краће означава $dF(t) = E|dX(t)|^2$.

- Структурна функција је неслучајна, ограничена, неоппадајућа функција (следи из (20)), из чега следи да има леву и десну граничну вредност у свакој тачки.

- L^2 -процес је L^2 -непрекидан у тачки t_0 са десне (леве) стране ако је структурна функција F непрекидна у t_0 са десне (леве) стране.

За L^2 -диференцијабилност то не важи - примери су Пуасонов и Винеров процес.

7.3 Хилбертови простори неких случајних процеса

У вези са L^2 - процесима и процесима са ортогоналним прираштајима може да се дефинише неколико Хилбертових простора, који ће нам бити потребни за даљи рад.

1. H : Хилбертов простор случајних величина за које важи

$$E|X|^2 < +\infty, EX = 0.$$

2. $H(X)$: подпростор простора H линеарно генерисан случајним величинама $X(t), t \in T$, где је $\{X(t), t \in T\}$ L^2 -процес. Овај простор се састоји од свих линеарних комбинација

$$\alpha_1 X(t_1) + \alpha_2 X(t_2) + \dots + \alpha_n X(t_n), \quad t_1, t_2, \dots, t_n \in T$$

и њихових средње квадратних граничних вредности. Ако се случајни процес $\{X(t)\}$ схвати као крива у простору H , онда је $H(X)$ најмањи подпростор од H који садржи ту криву. У простору H (па и у његовим подпросторима) важи

•

$$P\{X = Y\} = 1 \Rightarrow X \text{ и } Y \text{ су идентичне}$$

(представљају исти елемент простора).

- Скаларни производ је

$$(X, Y) = E(X\bar{Y}),$$

норма је

$$\|X\| = \sqrt{E|X|^2},$$

а одговарајуће растојање

$$d(X, Y) = \|X - Y\|.$$

- Сваки Кошијев низ конвергира у L^2 -смислу (конвергенција по норми).

- Својства L^2 - процеса се могу изразити преко норме:

L^2 -непрекидност:

$$\|X(t) - X(t_0)\| \rightarrow 0, t \rightarrow t_0,$$

L^2 -диференцијабилност:

$$\left\| \frac{X(t) - X(t_0)}{h} - X'(t_0) \right\| \rightarrow 0, h \rightarrow 0,$$

L^2 -интеграбилност:

$$\|S_n - S\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

- Ако је процес $\{X(t), t \in T\}$ L^2 -непрекидан, онда је простор $H(X)$ сепарабилан. Ово важи због тога што случајне величине $X(t), t \in \mathbb{Q} \cap T$ чине густ скуп у $H(X)$, а због L^2 -непрекидности можемо, уз произвољну тачност, њима да апроксимирамо сваки елемент из $H(X)$.

3. $L^2(X)$: Хилбертов простор који се састоји од случајних величина облика

$$X(b_k) - X(a_k), \quad 1 \leq k \leq n, \quad -\infty < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < b_n < +\infty$$

при чему важи $E(X(b_k) - X(a_k)) = 0$ и $\{X(t)\}$ је случајни процес са ортогоналним прираштајима, њихових линеарних комбинација и средње квадратних граничних вредности тих линеарних комбинација. $L^2(X)$ је подпростор простора H , па су скаларни производ, норма и растојање исти као у том простору.

4. $L^2(F)$: Нека је $\{X(t), t \in T\}$ процес са ортогоналним прираштајима, непрекидан са леве (десне) стране, $(a, b) \in T$ коначни или бесконачни интервал. Тада се структурној функцији F процеса $\{X(t)\}$ може придружити Хилбертов простор $L^2(F)$, који се састоји од комплексних функција ϕ за које важи

$$\int_a^b |\phi(t)|^2 dF(t) < +\infty.$$

У овом простору је:

- скаларни производ:

$$(\phi, \psi)_F = \int_a^b \phi(t) \overline{\psi(t)} dF(t),$$

- норма:

$$\|\phi\|_F = \sqrt{\int_a^b |\phi(t)|^2 dF(t)},$$

- растојање:

$$d_F(\phi, \psi) = \sqrt{\int_a^b |\phi(t) - \psi(t)|^2 dF(t)}$$

- Свака функција $\phi \in L^2(F)$ може се добро апроксимирати низом степенастих функција (део по део константним на коначном интервалу), $\phi_n \in L^2(F)$:

$$\|\phi_n - \phi\|_F \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

7.4 Стохастички интеграл неслучајне функције

Нека је $\{X(t), t \in T\}$ случајни процес са ортогоналним прираштајима, за који важи $EX(t) = 0, t \in T, [a, b] \subset T$. Дефинишемо интеграл

$$J = \int_a^b \phi(t) dX(t),$$

где је ϕ неслучајна функција из $L^2(F)$, дефинисана на $[a, b]$.

Напомена 7.1. Посебно нас интересује случај кад процес није средње квадратно диференцијабилан (јер се то иначе своди на већ дефинисани интеграл $\int_a^b \phi(t) X'(t) dt$). Пример одговарајућег процеса је Винеров процес.

Стохастички интеграл неслучајне функције ϕ (у односу на дати процес $\{X(t)\}$) се дефинише на следећи начин:

1. Ако је ϕ степенаста функција:

$$\phi(t) = \begin{cases} C_1, & a = t_0 \leq t \leq t_1; \\ C_2, & t_1 < t \leq t_2; \\ \dots & \\ C_n, & t_{n-1} < t \leq t_n = b, \end{cases}$$

за неке $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{C}$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. Интеграл J се дефинише:

$$J(\phi) = \sum_{k=1}^n C_k (X(t_k) - X(t_{k-1})).$$

Особине овако дефинисаног интеграла:

$$(a) \quad EJ(\phi) = \sum_{k=1}^n C_k E(X(t_k) - X(t_{k-1})) = 0;$$

(б)

$$\begin{aligned} E|J(\phi)|^2 &= E \left| \sum_{k=1}^n C_k (X(t_k) - X(t_{k-1})) \right|^2 \\ &= E \left(\sum_{k=1}^n C_k (X(t_k) - X(t_{k-1})) \overline{\sum_{j=1}^n C_j (X(t_j) - X(t_{j-1}))} \right) \\ &= E \left(\sum_{k=1}^n C_k \overline{C_k} (X(t_k) - X(t_{k-1})) \overline{(X(t_k) - X(t_{k-1}))} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n |C_k|^2 E|X(t_k) - X(t_{k-1})|^2 \\ &= \sum_{k=1}^n |C_k|^2 (F(t_k) - F(t_{k-1})) \\ &= \int_a^b |\phi(t)|^2 dF(t) < +\infty; \end{aligned}$$

(ц) Ако су ϕ и ψ степенасте функције дефинисане на истим интервалима и подинтервалима:

$$\phi(t) = \begin{cases} C_1, & a = t_0 \leq t \leq t_1 \\ C_2, & t_1 < t \leq t_2 \\ \dots & \\ C_n, & t_{n-1} < t \leq t_n = b, \end{cases} \quad \psi(t) = \begin{cases} D_1, & a = t_0 \leq t \leq t_1 \\ D_2, & t_1 < t \leq t_2 \\ \dots & \\ D_n, & t_{n-1} < t \leq t_n = b, \end{cases}$$

онда се директно проверава да важи

$$J(\alpha\phi + \beta\psi) = \alpha J(\phi) + \beta J(\psi), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

(д)

$$\begin{aligned} cov(J(\phi), J(\psi)) &= E \left(J(\phi) \overline{J(\psi)} \right) \\ &= E \left(\sum_{k=1}^n C_k (X(t_k) - X(t_{k-1})) \overline{\sum_{j=1}^n D_j (X(t_j) - X(t_{j-1}))} \right) \\ &= E \left(\sum_{k=1}^n C_k \overline{D_k} (X(t_k) - X(t_{k-1})) \overline{(X(t_k) - X(t_{k-1}))} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n C_k \overline{D_k} E|X(t_k) - X(t_{k-1})|^2 \\ &= \sum_{k=1}^n C_k \overline{D_k} (F(t_k) - F(t_{k-1})) \\ &= \int_a^b \phi(t) \overline{\psi(t)} dF(t). \end{aligned}$$

2. Ако је ϕ произвољна функција из $L^2(F)$: Свака функција из $L^2(F)$ се може апроксимирати низом степенстих функција, тј.

$$(\forall \phi \in L^2(F)) (\exists (\phi_n), n \in \mathbb{N}, \phi_n \text{ проста функција}) \|\phi_n - \phi\|_F \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Интеграл $J(\phi)$ се дефинише као гранична вредност у средње квадратном смислу низа (ϕ_n) , односно кроз једнакост

$$E|J(\phi_n) - J(\phi)|^2 = \int_a^b |\phi_n(t) - \phi(t)|^2 dF(t) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Гранична вредност $J(\phi)$ постоји јер је $(J(\phi_n))$ Кошијев низ:

$$\begin{aligned} E|J(\phi_n) - J(\phi_m)|^2 &= E \left| \int_a^b \phi_n(t) dX(t) - \int_a^b \phi_m(t) dX(t) \right|^2 \\ &= E \left| \int_a^b (\phi_n(t) - \phi_m(t)) dX(t) \right|^2 \\ &= \int_a^b |\phi_n(t) - \phi_m(t)|^2 dF(t) \\ &= \|\phi_n - \phi_m\|_F^2. \end{aligned}$$

Може се показати да овако дефинисани интеграл не зависи од избора низа (ϕ_n) већ само од граничне функције. За интеграл важе исте особине као у случају степенстих функција.

Лема 7.1. Пресликавање $J : L^2(F) \rightarrow L^2(X)$ је изометрија ових простора.

Доказ. Довољно је показати да овакво пресликавање чува скаларни производ.

$$(J(\phi), J(\psi)) = E \left(J(\phi) \overline{J(\psi)} \right) = \int_a^b \phi(t) \overline{\psi(t)} dF(t) = (\phi, \psi)_F.$$

□

Напомена 7.2. Ако је процес $\{X(t)\}$, за који дефинишемо стохастички интеграл, баш Винеров процес, онда се одговарајући интеграл још назива и **Винеров интеграл**.

7.5 Значај стохастичких интеграла

Кад смо дефинисали Винеров процес (Брауново кретање), помињали смо и његову примену у финансијама, за моделовање кретања цена акција на финансијском тржишту. Рад француског научника Луја Башељеа који се односи на ову тему наведен је као прва озбиљна примена математике у области финансија. У међувремену се финансијска математика, као област, веома развила и захтева примену све компликованијих модела и све компликованијег рачунског апарата. Тако се појавила потреба да се рачунају стохастички интегрални овог типа. Ови интегрални често немају „уобичајене” особине интеграла на које смо навикли у реалној анализи. Област математике која се детаљније бави особинама овако добијеног диференцијално - интегралног рачуна зове се **стохастичка анализа**.

8 Стационарни случајни процеси

Стационарне процесе смо дефинисали на почетку курса, а сада ћемо детаљније размотрити њихове особине и значај.

8.1 Дефиниција и основна својства

Дефиниција 8.1. Случајни процес $\{X(t), t \in T\}$ је **строго стационаран** ако за свако $n \in \mathbb{N}$ и за све $t_1, \dots, t_n, t_1 + h, \dots, t_n + h \in T$ важи да случајни вектори

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \text{ и } (X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})$$

имају исту расподелу.

Дефиниција 8.2. Случајни процес $\{X(t), t \in T\}$ је **слабо стационаран** ако је важе услови:

1. $E|X(t)|^2 < +\infty$ за $t \in T$;
2. $m_X(t) = m = \text{const.}$;
3. $\text{cov}(X(t), X(s)) = B(t - s), t, s \in T$.

Из строге стационарности не следи слаба (јер не мора да важи први услов), а ни из слабе стационарности не следи строга, што се види из следећег примера.

Пример 8.1. (пример процеса који јесте слабо стационаран, а није строго стационаран) Нека је

$$X_n = A \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) + B \sin\left(\frac{\pi}{3}n\right), n \in \mathbb{N},$$

где су A и B независне случајне величине са $\mathcal{U}[-1, 1]$ расподелом. Овде је:

$$\begin{aligned} E(X_n) &= 0, \\ D(X_n) &= \cos^2 \frac{\pi}{3}n \cdot E(A^2) + \sin^2 \frac{\pi}{3}n \cdot E(B^2) < +\infty, \\ K_X(m, n) &= \cos^2 \frac{\pi}{3}(n - m) \cdot E(A^2), \end{aligned}$$

па је низ слабо стационаран.

Низ није строго стационаран, на пример, због следећих разматрања:

$$\begin{aligned} X_0 &= A, \\ X_1 &= \frac{1}{2}A + \frac{\sqrt{3}}{2}B, \\ P\{|X_0| > 1\} &= 0, \\ P\{|X_1| > 1\} &\neq 0. \end{aligned}$$

8.1.1 Коваријациона функција слабо стационарног случајног процеса

За коваријациону функцију слабо стационарног случајног процеса $\{X(t), t \in T\}$ важи:

$$K_X(t, s) = K_X(t - s, 0) = K_X(t - s).$$

Она има следеће особине (које знамо од раније, само их сад мало другачије запишемо):

1. $K_X(0) \geq 0$;
2. $K_X(-h) = \overline{K_X(h)}$; (хермитска симетрија)
3. $|K_X(h)| \leq K_X(0)$;
4. ненегативна дефинитност:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall t_1, t_2, \dots, t_n \in T)(\forall z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n z_i \overline{z_j} K_X(t_i - t_j) \geq 0$$

5. Ако је коваријациона функција непрекидна у нули, онда је она непрекидна у свакој тачки.

(Ово тврђење је доказано раније, у оквиру лекције о L^2 - процесима.)

8.1.2 Примери стационарних процеса

Пример 8.2. (низ независних случајних величина са истом расподелом) Нека је $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ низ независних случајних величина, $E(X_i) = m = \text{const.}$, $D(X_i) = \sigma^2 < +\infty$. Тада је

$$K_X(i, j) = E(X_i X_j) - m^2 = E(X_i)E(X_j) - m^2 = 0, \quad i, j \in \mathbb{N}.$$

Пример 8.3. (копије исте случајне величине) Нека је $\{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$ низ случајних величина, дефинисан са $Y_n = Y$, где је Y случајна величина таква да $E(Y) = m = \text{const.}$, $D(Y) = \sigma^2 < +\infty$. Тада је

$$K_Y(i, j) = E(Y_i Y_j) - m^2 = E(Y^2) - m^2 = D(Y), \quad i, j \in \mathbb{N}.$$

Напомена 8.1. Између ова два примера постоји суштинска разлика: низ $\{Y_n\}$ може тачно да се предвиди, а $\{X_n\}$ не може.

Пример 8.4. (тригонометријски полиноми) Нека је

$$X_n = A \cos(\omega n) + B \sin(\omega n), \quad n \in \mathbb{N},$$

где су A и B независне случајне величине са $E(A) = E(B) = 0$, $D(A) = D(B) = \sigma^2 < +\infty$. Тада је $E(X_n) = 0$, $D(X_n) = \sigma^2$, $K_X(m, n) = \sigma^2 \cos(\omega(m - n))$, па је у питању слабо стационаран процес.

Пример 8.5. (случајни процес дефинисан на кругу) Нека су U и V случајне величине са стандардном нормалном расподелом, независне, $T = [0, 2\pi]$. Нека је

$$Y(t) = U \sin t + V \cos t, \quad Z(t) = -U \cos t + V \sin t, \quad X(t) = (Y(t), Z(t)).$$

Тада је $\{X(t), t \in T\}$ строго стационаран случајан процес.

Решење: $X(t)$ је случајни вектор са очекивањем $(0, 0)$ и коваријационом матрицом

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Случајни вектори $Y(t)$ и $Z(t)$ имају нормалну расподелу, па и $X(t)$ има нормалну расподелу која је јединствено одређена вектором очекивања и коваријационом матрицом.

Пример 8.6. (случајни процес телеграфских сигнала) Нека је $\{X(t), t \geq 0\}$ случајни процес за који важи $P\{X(0) = 0\} = P\{X(0) = 1\} = \frac{1}{2}$. Процес осцилира између стања 0 и 1, а промене стања дешавају се у складу са хомогеним Пуасоновим процесом $\{N(t), t \geq 0\}$ са интензитетом λ , независним од $X(0)$. Тада се процес $\{X(t)\}$ може приказати као:

$$X(t) = \frac{1}{2} \left(1 - (-1)^{X(0)+N(t)} \right), t \geq 0.$$

$$\begin{aligned} E(X(t)) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} E \left((-1)^{X(0)+N(t)} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} E \left((-1)^{X(0)} \right) E \left((-1)^{N(t)} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (-1)^0 + \frac{1}{2} (-1)^1 \right) \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

За $t > s > 0$ важи:

$$\begin{aligned} K_X(t, s) &= E(X(t)X(s)) - \frac{1}{4} \\ &= 1 \cdot P\{X(t) = X(s) = 1\} - \frac{1}{4} \\ &= P\{X(s) = 1, X(t) - X(s) = 0\} - \frac{1}{4} \\ &= P\{X(s) = 1\} P\{N(t) - N(s) \text{ је парно} \} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda(t-s)} (\lambda(t-s))^{2k}}{(2k)!} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2} e^{-\lambda(t-s)} \frac{e^{-\lambda(t-s)} + e^{\lambda(t-s)}}{2} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} e^{-2\lambda(t-s)} \end{aligned}$$

За $s > t > 0$ се $t - s$ замењује са $s - t$, па је:

$$K_X(t, s) = \frac{1}{4} e^{-2\lambda|t-s|}.$$

Пример 8.7. Нека је случајни процес $\{X(t), t \geq 0\}$ дефинисан са:

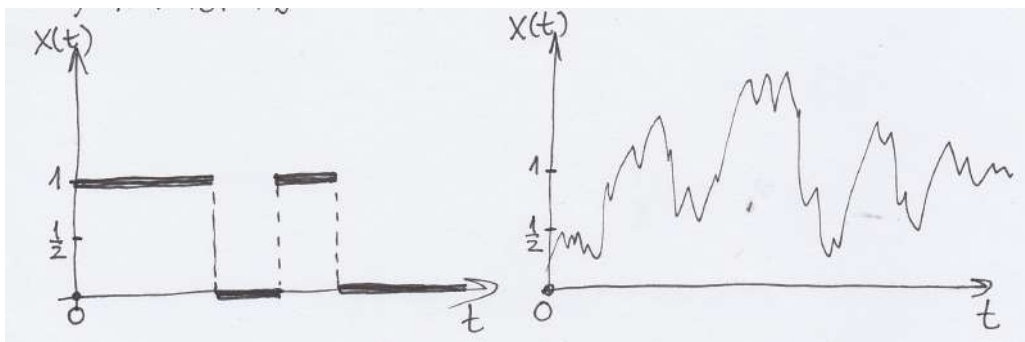
$$X(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-t} W(e^{2t}),$$

где је $\{W(t), t \geq 0\}$ Винеров процес. Тада важи:

$$\begin{aligned} E(X(t)) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-t} E(W(e^{2t})) = \frac{1}{2}, \\ K_X(t, s) &= \frac{1}{4} e^{-t-s} K_W(e^{2t}, e^{2s}) = \frac{1}{4} e^{-t-s} \min\{e^{2t}, e^{2s}\} = \begin{cases} \frac{1}{4} e^{-(t-s)}, & 0 < s < t \\ \frac{1}{4} e^{-(s-t)}, & 0 < t < s \end{cases}, \end{aligned}$$

одакле се добија $K_X(t, s) = \frac{1}{4} e^{-|t-s|}$.

Напомена 8.2. За $\lambda = \frac{1}{2}$ процеси из претходна два примера имају исте средње вредности и коваријационе функције, а потпуно различите трајекторије, што је приказано на Слици 1.



Слика 12:

8.2 Ергодичност слабо стационарног случајног процеса

У применама случајних процеса често је потребно оценити средњу вредност (или дисперзију, коваријациону функцију или неку другу величину) на основу једне реализације процеса. На пример, ако се врши неки експеримент, често га није могуће на исти начин поновити много пута, или су та понављања скупа и непрактична...

Нека су реализоване вредности $x(t), t \in [-T, T]$. Код стационарних случајних процеса средња вредност је константна, па је за њену оцену природно узети

$$\hat{m}_T = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt.$$

(У дискретном случају ово се своди на суму $\hat{m}_T = \frac{1}{2T} \sum_{t=-T}^T x_t$.)

У многим случајевима предложена оцена конвергира у средње квадратном смислу ка $m = EX_t$, кад $T \rightarrow +\infty$. Ова појава се зове **ергодичност** случајног процеса у односу на средњу вредност (израз потиче из статистичке механике).

Ергодичност се може дефинисати и у односу на неку другу величину (на пример, коваријациону функцију) или у смислу на неке друге врсте конвергенције.

Разлика између трајекторија ергодичног и неергодичног процеса може се запазити на Сlici 2.

Даља разматрања се односе на процесе са непрекидним параметром (а сличан поступак се може извести и за случајне низове).

Дефиниција 8.3. Слабо стационарни случајни процес $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ је **ергодичан у односу на средњу вредност** ако

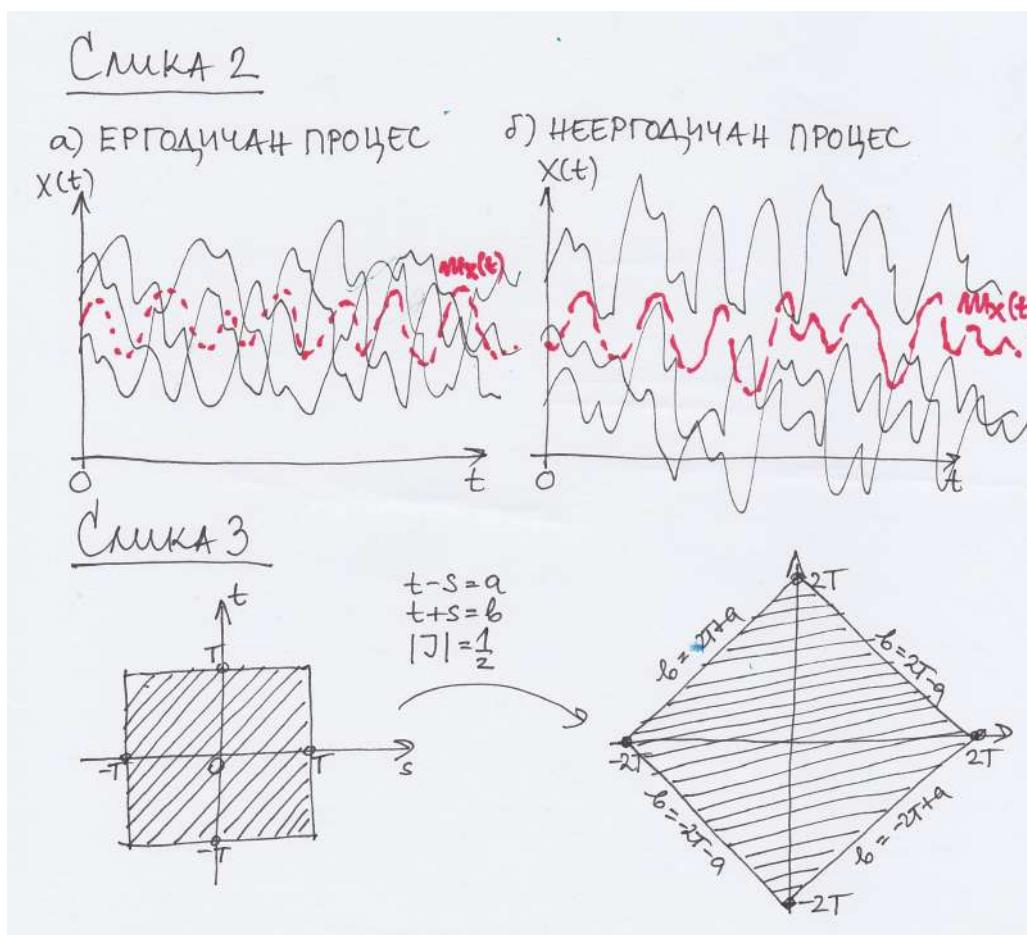
$$\lim_{T \rightarrow +\infty} E \left| \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt - m \right|^2 = 0.$$

Напомена 8.3. $m_t = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt$ је случајна величина.

Потребан и довољан услов за ергодичност дат је у следећој теорему.

Теорема 8.1. Слабо стационарни случајни процес $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ је ергодичан у односу на средњу вредност акко за његову коваријациону функцију важи

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} \left(1 - \frac{|t|}{2T}\right) K_X(t) dt = 0.$$



Доказ. Из особина L^2 -интеграла следи

$$E(m_T) = E\left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt\right) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E(X(t)) dt = m.$$

Даљим сређивањем интеграла (области по којима се интеграл приказане су на Сlici 3) добија се:

$$\begin{aligned}
 E|m_T - m|^2 &= E\left|\frac{1}{2T} \int_{-T}^T (X(t) - m) dt\right|^2 \\
 &= \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T K_X(s, t) dt ds \\
 &= \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T K_X(t - s) dt ds \\
 &= \frac{1}{4T^2} \left(\int_0^{2T} \int_{-2T+a}^{2T-a} K_X(a) \frac{1}{2} db da + \int_{-2T}^0 \int_{-2T-a}^{2T+a} K_X(a) \frac{1}{2} db da \right) \\
 &= \frac{1}{8T^2} \int_{-2T}^{2T} \int_{-2T+|a|}^{2T-|a|} K_X(a) db da \\
 &= \frac{1}{8T^2} \int_{-2T}^{2T} (2T - |a| + 2T - |a|) K_X(a) da \\
 &= \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} \left(1 - \frac{|a|}{2T}\right) K_X(a) da.
 \end{aligned}$$

□

Напомена 8.4. Ако је параметарски скуп $[0, +\infty)$, онда је $\hat{m}_T = \frac{1}{2T} \int_0^{2T} x(t)dt$, а добија се исти услов.

Из услова

$$\left| \left(1 - \frac{|t|}{2T} \right) K_X(t) \right| \leq |K_X(t)|$$

добија се довољан услов за ергодичност.

Теорема 8.2. Слабо стационарни случајни процес $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ за чију коваријациону функцију важи

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} |K_X(t)| dt = 0$$

је ергодичан у односу на средњу вредност.

Даље су дати аналогни резултати који се односе на ергодичност у односу на коваријациону функцију.

Дефиниција 8.4. Слабо стационарни случајни процес $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ је **ергодичан у односу на коваријациону функцију** ако

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} E \left| \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X^*(t+s)X^*(s)ds - K_X(t) \right|^2 = 0.$$

Теорема 8.3. Слабо стационарни случајни процес $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ је ергодичан у односу на коваријациону функцију ако за његову коваријациону функцију важи

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} \left(1 - \frac{|t|}{2T} \right) K^*(t) dt = 0,$$

где је $K^*(\cdot)$ коваријациона функција процеса $Y_s(t) = X^*(t+s)X^*(s), t \in \mathbb{R}$.

8.2.1 Примери ергодичних и неергодичних процеса

Пример 8.8. (низ независних случајних величина са истом расподелом) Овде је:

$$K_X(h) = \begin{cases} 0, & h \neq 0 \\ \sigma^2, & h = 0, \end{cases}$$

па је

$$E|m_T - m|^2 = \frac{1}{2T+1} \sum_{a=-2T}^{2T} \left(1 - \frac{|a|}{2T} \right) \cdot K_X(a) = \frac{1}{2T+1} \sigma^2 \rightarrow 0, \quad T \rightarrow +\infty.$$

Дакле, овај случајни низ је ергодичан.

Пример 8.9. (бацање случајно одабране коцкице) Имамо коцкицу за јамб (6 страна на којима су бројеви од 1 до 6) и „коцкицу тетраедар” (4 стране на којима су бројеви од 1 до 4). Експеримент се састоји од поновљених бацања коцкице, при чему се у

сваком покушају на случајан начин (са једнаком вероватноћом) бира коцкица која ће се бацати. $X_n, n \in \mathbb{N}$ је број добијен у n -том бацању. Дефинишемо догађаје:

- A : изабран је број x
- B : користи се обична коцкица
- C : користи се коцкица тетраедар
- $E(X_n)^{(6)}$: очекивање броја добијеног при једном бацању обичне коцкице
- $E(X_n)^{(4)}$: очекивање броја добијеног при једном бацању тетраедра

Тада важи

$$P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|C) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \left(P(A|B) + P(A|C) \right)$$

$$E(X_n) = \frac{1}{2} (E(X_n)^{(6)} + E(X_n)^{(4)}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} \cdot 21 + \frac{1}{4} \cdot 10 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{7}{2} + \frac{5}{2} \right) = 3$$

Слично се може одредити и $D(X_n)$.

$$K_X(m, n) = E(X_n X_m) - E(X_n)E(X_m) = \dots = 0$$

Дакле, у питању је слабо стационаран низ. Низ није ергодичан, јер се средња вредност разликује у зависности од реализације (од тога која коцкица се баца).

Пример 8.10. (случајни процес телеграфских сигнала) Директно се проверава да важи

$$\frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} \left(1 - \frac{|a|}{2T} \right) \cdot K_X(a) da = \frac{1}{8T} \int_{-2T}^{2T} \left(1 - \frac{|a|}{2T} \right) \cdot e^{-2\lambda|a|} da \rightarrow 0, T \rightarrow \infty,$$

одакле следи да је овај процес ергодичан.

Пример 8.11. Смислити пример неергодичног процеса са непрекидним параметром!

8.3 Спектрална репрезентација слабо стационарног процеса и његове коваријационе функције

Спектрална репрезентација (спектално разлагање) случајног процеса (у најопштијем смислу) је представљање тог процеса као линеарне комбинације синуса и косинуса различитих углова.

На пример, једна спектрална репрезентација је:

$$X(t) = A \cos(\lambda t) + B \sin(\lambda t) = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\lambda t + \phi), \quad \phi = \arctg(A/B),$$

где су A и B неке случајне величине. У том случају је $\sqrt{A^2 + B^2}$ **случајна амплитуда** а $\lambda t + \phi$ **случајна фаза**.

Погодно је изабрати случајне величине A и B тако да буду некорелисане, јер је у том случају једноставно израчунати коваријациону функцију тог случајног процеса:

$$\begin{aligned} EX(t) &= \cos(\lambda t)EA + \sin(\lambda t)EB = m_X(t), \\ K_X(t, s) &= E(X(t)X(s)) - m_X(t)m_X(s) \\ &= \cos(\lambda t)\cos(\lambda s)E(A^2) + \sin(\lambda t)\sin(\lambda s)E(B^2) - m_X(t)m_X(s). \end{aligned}$$

Дакле, ако је у питању општа сума таквих чланова, за коефицијенте је погодно одабрати скуп ортогоналних случајних величина.

Слично разматрање важи и за коваријациону функцију таквог процеса.

Ако се ради о комплексним случајним процесима, односно њиховим коваријационим функцијама, онда ће се у тој суми појављивати чланови облика

$$Ce^{i\lambda t} = C \cos \lambda t + iC \sin \lambda t.$$

Тако се за случај слабо стационарних случајних процеса и низова добијају наредни резултати.

Теорема 8.4. (Херглоц) Функција $K : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ је коваријациона функција неког слабо стационарног случајног низа $\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$, $EX_n = 0$, ако постоји коначна мера F на $\mathcal{B}([-\pi, \pi])$, таква да важи:

$$K(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} dF(\lambda), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Доказ. Смер $\Rightarrow$: Претпоставимо је је K коваријациона функција. Тада је она ненегативно дефинитна, па важи:

$$(\forall N \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R}) G_N(x) = \frac{1}{2\pi N} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N e^{-ijx} \overline{e^{-ikx}} K(j-k) \geq 0.$$

У последњој суми разлика $m = j - k$ се појављује $N - |m|$ пута, па се добија:

$$G_N(x) = \frac{1}{2\pi N} \sum_{|m| < N} (N - |m|) e^{-imx} K(m) \geq 0.$$

Нека је F_N мера на $\mathcal{B}([-\pi, \pi])$ одређена са:

$$F_N((\alpha, \beta]) = \int_{\alpha}^{\beta} G_N(x) dx, \quad -\pi \leq \alpha \leq \beta \leq \pi.$$

Мера F_N је коначна јер важи:

$$\begin{aligned} F_N([-\pi, \pi]) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi N} \sum_{|m| < N} (N - |m|) e^{-imx} K(m) dx \\ &= \frac{1}{2\pi N} \sum_{|m| < N} (N - |m|) K(m) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx} dx \\ &= K(0) < +\infty, \end{aligned}$$

што следи из чињенице

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx} dx = \begin{cases} 2\pi, & m = 0; \\ 0, & m \neq 0 \end{cases}.$$

За F_N важи и:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} dF_N(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} G_N(x) dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \frac{1}{2\pi N} \sum_{|m| < N} (N - |m|) e^{-imx} K(m) dx \\
&= \frac{1}{2\pi N} \sum_{|m| < N} (N - |m|) K(m) \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx \\
&= \begin{cases} \frac{1}{N} (N - |n|) K(n), & |n| < N \\ 0, & |n| > N \end{cases} \\
&= \begin{cases} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) K(n), & |n| < N \\ 0, & |n| > N \end{cases} \rightarrow K(n), N \rightarrow +\infty
\end{aligned}$$

Одатле се добија

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} dF(x) = K(n),$$

где је F гранична функција.

Смер $\Leftarrow$: Претпоставимо да је $K(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} dF(\lambda)$. Тада важи:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N z_j \overline{z_k} K(j-k) &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N z_j \overline{z_k} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)\lambda} dF(\lambda) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{j=1}^N z_j e^{ij\lambda} \right|^2 dF(\lambda) \geq 0.
\end{aligned}$$

Дакле, K је ненегативно дефинитна, па је K коваријациона функција. $\square$

Пример 8.12. Нека је $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ низ независних случајних величина за које важи $EX_n = 0$, $DX_n = 1$. Тада је коваријациона функција овог случајног низа:

$$K_X(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

Ова коваријациона функција се може приказати и на следећи начин:

$$K_X(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} \cdot \frac{1}{2\pi} d\lambda.$$

То важи због тога што је

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} \cdot \frac{1}{2\pi} d\lambda = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin n\lambda}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{-\cos n\lambda}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) = 0, & n \neq 0; \\ 1, & n = 0. \end{cases}$$

Одговарајуће тврђење које се односи на непрекидне случајне процесе формулисано је у следећој теорему.

Теорема 8.5. (Бохнер-Хинчин) Функција $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, непрекидна у нули, је коваријациона функција неког слабо стационарног случајног процеса $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$, $EX(t) = 0$, ако постоји коначна мера F на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, таква да важи:

$$K(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda} dF(\lambda), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Напомена 8.5. У питању су: Aleksandr Yakovlevich Khinchin (1894. - 1959.), руски математичар, Gustav Herglotz (1881. - 1953.), немачки физичар и Salomon Bochner (1899. - 1982.), амерички математичар.

Дефиниција 8.5. Функција F из претходне две теореме се зове **спектрална функција (спектрална расподела)** одговарајућег слабо стационарног процеса. Ако постоји $f(\lambda) = F'(\lambda)$ онда је функција f **спектрална густина**.

Напомена 8.6. Спектрална функција F не мора да буде расподела вероватноћа у класичном смислу, јер, на пример, за процесе са непрекидним параметром важи:

$$F(-\infty) = 0 \Rightarrow F(+\infty) = K(0).$$

За спектралну гуштину, ако постоји, важе следеће особине:

1.

$$F(\lambda) = \int_{-\pi(-\infty)}^{\lambda} f(t) dt$$

2. Коваријациона функција је инверзна Фуријеова трансформација спектралне густине.

$$K(t) = \int_{-\pi(-\infty)}^{+\pi(+\infty)} f(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda$$

(И обрнуто, спектрална густина је Фуријеова трансформација коваријационе функције.)

3. Спектрална густина је, за реалне процесе, симетрична.

$$f(-\lambda) = f(\lambda).$$

Даље ћемо навести резултате који се односе на спектралну репрезентацију одговарајућих случајних процеса.

Теорема 8.6. Слабо стационарни случајни низ $\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$, $EX_n = 0$, са спектралном функцијом F има спектралну репрезентацију

$$X_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} dZ(\lambda), \quad n \in \mathbb{Z},$$

где је $\{Z(\lambda), \lambda \in [-\pi, \pi]\}$ неки случајни процес са ортогоналним прираштајима, за који важи $E|dZ(\lambda)|^2 = dF(\lambda)$.

Напомена 8.7. $\{Z(\lambda)\}$ је **спектрални процес** који одговара низу $\{X_n\}$. Он је одређен до на адитивну случајну величину. Функција F је, осим што је спектрална функција низа $\{X_n\}$, још и структурна функција процеса $\{Z\}$.

Теорема 8.7. Ако је коваријациона функција слабо стационарног случајног процеса $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$, $EX(t) = 0$, са спектралном функцијом F , непрекидна у нули, онда тај процес има спектралну репрезентацију

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda} dZ(\lambda), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (21)$$

где је $\{Z(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$ неки случајни процес са ортогоналним прираштајима, за који важи $E|dZ(\lambda)|^2 = dF(\lambda)$.

Напомена 8.8. Непрекидност коваријационе функције у нули заправо значи да је случајни процес $\{X(t)\}$ средње квадратно непрекидан.

У овом случају, за коваријациону функцију случајног низа се добија

$$\begin{aligned} K_X(n, m) &= E \left(\int_{-\pi}^{+\pi} e^{in\lambda} dZ(\lambda) \overline{\int_{-\pi}^{+\pi} e^{im\mu} dZ(\mu)} \right) \\ &= \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{in\lambda} \overline{e^{im\mu}} E(dZ(\lambda) \overline{dZ(\mu)}) \\ &= \int_{-\pi}^{+\pi} e^{in\lambda} \overline{e^{im\lambda}} E|dZ(\lambda)|^2 \\ &= \int_{-\pi}^{+\pi} e^{in\lambda} \overline{e^{im\lambda}} dF(\lambda), \end{aligned}$$

тј.

$$K_X(n - m) = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(n-m)\lambda} dF(\lambda).$$

На исти начин, за непрекидни случајни процес се добија

$$K_X(t - s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(t-s)\lambda} dF(\lambda).$$

Спектралној густини можемо дати и мало другачију интерпретацију.

За почетак, замислимо да случајни процес $\{X(t)\}$ има спектралну репрезентацију у облику коначне суме:

$$X(t) = \sum_{j=1}^n e^{i\lambda_j t} X_j,$$

где су чланови $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ неслучајни (**неслучајне учестаности (фреквенције)**), а чланови $X_1, \dots, X_n$ су случајне величине (**амплитуде**), за које претпостављамо $EX_j = 0$ и $DX_j = \sigma_j^2$ и да су међусобно ортогоналне. Тада важи

$$DX(t) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n e^{i\lambda_j t} \overline{e^{i\lambda_k t}} E(X_j \overline{X_k}) = \sum_{j=1}^n |e^{i\lambda_j t}|^2 \sigma_j^2 = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2.$$

Можемо да закључимо да фреквенцији λ_j одговара дисперзија $D(e^{i\lambda_j t} X_j) = \sigma_j^2$.

Ако уведемо координатни систем такав да на апсцисној оси λ обележавамо вредности фреквенција, а на ординатној оси σ^2 обележавамо вредности одговарајућих дисперзија, добијамо **спектар** случајног процеса (који се, у овом случају, састоји од n „штапића”). Слично добијамо и спектар за $n = +\infty$.

Да видимо шта се дешава ако се процес $\{X(t)\}$ представља интегралом облика (21). Тада промени фреквенције од λ_s до λ_t одговара прираштај дисперзије од $F(\lambda_t) - F(\lambda_s)$.

Ако у истом координатном систему интервалу (λ_s, λ_t) доделимо вредност

$$\frac{F(\lambda_t) - F(\lambda_s)}{\lambda_t - \lambda_s} = \frac{\Delta F(\lambda)}{\Delta \lambda},$$

онда ћемо за $\Delta \lambda \rightarrow 0$ добити управо график спектралне густине.

8.4 Додатни материјал - спектрална репрезентација слабо стационарног случајног низа

Ово је доказ спектралне репрезентације слабо стационарног случајног низа, који је пожељно прочитати, али није потребно учити за испит.

Теорема 8.8. Слабо стационарни случајни низ $\{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$, $EX_n = 0$, са спектралном функцијом F има спектралну репрезентацију

$$X_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} dZ(\lambda), \quad n \in \mathbb{Z},$$

где је $\{Z(\lambda), \lambda \in [-\pi, \pi]\}$ неки случајни процес са ортогоналним прираштајима, за који важи $E|dZ(\lambda)|^2 = dF(\lambda)$.

Доказ. Претпостављамо да је $DX_n = 1$ (у супротном се резултат множи константом).

Нека је H_X Хилбертов простор који се састоји од свих линеарних комбинација чланова низа $\{X_n\}$:

$$a_1 X_{m_1} + a_2 X_{m_2} + \cdots + a_n X_{m_n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}, \quad m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}.$$

Знамо да је овај простор подпростор простора H који се састоји од случајних величина са коначним другим моментима, и да се у њему скаларни производ дефинише са:

$$(X, Y) = E(X\bar{Y}).$$

Даље, нека је H_F Хилбертов простор који се састоји од функција

$$\phi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \phi_n(x) = e^{inx} = \cos nx + i \sin nx, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Важи

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\phi_n(\lambda)|^2 dF(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} dF(\lambda) = F(\pi) - F(-\pi) < +\infty,$$

па је

$$H_F \subset L^2(F),$$

где је $L^2(F)$ Хилбертов простор свих комплексних функција квадратно интегралних у односу на F на интервалу $[-\pi, \pi]$. Скаларни производ у простору $L^2(F)$ (који смо дефинисали раније у току курса) је:

$$(\phi, \psi)_F = \int_{-\pi}^{\pi} \phi(\lambda) \overline{\psi(\lambda)} dF(\lambda).$$

Са $\overline{H_F}$ означавамо простор H_F који смо допунили свим граничним вредностима линеарних комбинација.

Сад дефинишемо пресликавање

$$\mu : H_F \rightarrow H(X), \quad \mu(\phi_j) = X_j,$$

тако да буде линеарно, тј.

$$\mu \left(\sum_{j=1}^n a_j \phi_j \right) = \sum_{j=1}^n a_j X_j.$$

Пресликавање μ је „1-1” и чува растојање, јер важи:

$$(\mu(\phi_n), \mu(\phi_m)) = (X_n, X_m) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)\lambda} dF(\lambda) = (\phi_n, \phi_m)_F,$$

а због линеарности важи и

$$(\mu(\phi), \mu(\psi)) = (\phi, \psi)_F, \quad \phi, \psi \in H_F.$$

Сад ћемо да проширимо домен пресликавања μ . За

$$u \in \overline{H_F}, \quad u = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n, \quad u_n \in H_F$$

дефинишемо

$$\mu(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(u_n),$$

где се граничне вредности односе на конвергенцију у одговарајућем простору. Може се показати да је овако додефинисано пресликавање μ такође линеарно и чува растојање.

Сада дефинишемо случајни процес $\{Z(\lambda), -\pi < \lambda \leq \pi\}$ на следећи начин:

$$Z(\lambda) = \mu(I_\lambda), \quad -\pi < \lambda \leq \pi,$$

где је $I_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ индикатор интервала $(-\pi, \lambda]$ (узима вредност 1 на том интервалу, а иначе 0).

Може се показати (резултат из области Фуријеове анализе) да је $I_\lambda \in \overline{H_F}$, па је $Z(\lambda)$ добро дефинисано.

Нека је $J_{\alpha, \beta} = I_\alpha - I_\beta$ индикатор интервала $(\alpha, \beta]$.

За случајни процес $\{Z(\lambda), -\pi < \lambda \leq \pi\}$ важи:

- $E|Z(\lambda)|^2 < +\infty$ (јер $Z(\lambda) \in H(X)$);

- процес је L^2 -непрекидан:

$$E|Z(\lambda+h) - Z(\lambda)|^2 = (Z(\lambda+h) - Z(\lambda), Z(\lambda+h) - Z(\lambda)) = (J_{\lambda, \lambda+h}, J_{\lambda, \lambda+h})_F \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0;$$

- процес има ортогоналне прираштаје:

$$E(Z(a) - Z(b))(\overline{Z(c) - Z(d)}) = (Z(a) - Z(b), Z(c) - Z(d)) = (J_{b,a}, J_{d,c})_F = 0, \quad d \leq c \leq b \leq a;$$

-

$$E|Z(a) - Z(b)|^2 = (J_{b,a}, J_{b,a})_F = \int_b^a dF(\lambda) = F(a) - F(b).$$

Сад још треба да докажемо саму спектралну репрезентацију. Стохастички интеграл

$$I(\phi) = \int_{-\pi}^{\pi} \phi(\lambda) dZ(\lambda)$$

је дефинисан за све функције $\phi : (-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ које припадају $L^2(F)$. Треба да покажемо да је

$$I(\phi) = \mu(\phi), \quad \text{скоро сигурно, за } \phi \in \overline{H_F}.$$

Прво претпостављамо да је ϕ степенаста функција:

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & x < x_0 \text{ или } x \geq x_n; \\ c_j, & x_{j-1} \leq x < x_j \end{cases}, \quad -\pi < x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq \pi, \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}.$$

$$\begin{aligned} I(\phi) &= \sum_{j=1}^n c_j (Z(x_j) - Z(x_{j-1})) \\ &= \sum_{j=1}^n c_j (\mu(I_{x_j}) - \mu(I_{x_{j-1}})) \\ &= \sum_{j=1}^n c_j \mu(J_{x_{j-1}, x_j}) \\ &= \mu \left(\sum_{j=1}^n c_j J_{x_{j-1}, x_j} \right) \\ &= \mu(\phi). \end{aligned}$$

За произвољно $\phi \in L^2(F)$ знамо да постоји низ степенастих функција $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, таквих да

$$\psi_n \rightarrow \phi, \quad n \rightarrow \infty.$$

За њих важи $\mu(\psi_n) \rightarrow \mu(\phi)$, па се добија $I(\psi_n) \rightarrow I(\phi)$, одакле следи

$$I(\phi) = \mu(\phi), \text{ скоро сигурно, } n \rightarrow \infty.$$

Коначно, кад одаберемо $\phi = \phi_n = e^{in\lambda}$, добијамо

$$I(\phi_n) = \mu(\phi_n) = X_n,$$

одакле следи наша тражена репрезентација:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} dZ(\lambda) = X_n.$$

□

9 Мартингали

На почетку курса навели смо најједноставније дефиниције мартингала, субмартингала и супермартингала. Сада ћемо мало општије дефинисати и мало прецизније размотрити ове појмове.

9.1 Дефиниција и основне особине мартингала

Претпостављамо да је $\{X(t), t \in T\}$ случајни процес са дискретним параметром, где је $T = \mathbb{N}$ или $T = \mathbb{N}_0$ (или неки њихов подскуп), или процес са непрекидним параметром, где је $T = [0, a]$ или $T = [0, +\infty)$. Нека је овај процес дефинисан на простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Дефиниција 9.1. Филтрација на простору $(\Omega, \mathcal{F})$ је фамилија σ -алгебри $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ за коју важи:

1.

$$(\forall t_1, t_2 \in T, 0 \leq t_1 \leq t_2) \mathcal{F}_{t_1} \subseteq \mathcal{F}_{t_2}$$

2.

$$\sigma\left(\bigcup_{t \in T} \mathcal{F}_t\right) \subseteq \mathcal{F}$$

Дефиниција 9.2. Природна филтрација $\{\mathcal{G}_t, t \in T\}$ случајног процеса $\{X(t), t \in T\}$ је фамилија σ -алгебри дефинисана са

$$\mathcal{G}_t = \sigma\{X(s), 0 \leq s \leq t, s, t \in T\}.$$

Напомена 9.1. За фиксирано t , $\mathcal{G}_t$ је минимална σ -алгебра на Ω која садржи све скупове облика

$$\{\omega | X(s) \leq x\}, 0 \leq s \leq t, \quad s, t \in T, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Издајају се специјални случајеви:

- тривијална σ -алгебра:

$$\mathcal{G}_0 = \{\emptyset, \Omega\};$$

- за $T = [0, a]$:

$$\mathcal{G}_a = \mathcal{F}.$$

Дефиниција 9.3. Случајни процес $\{X(t), t \in T\}$ је адаптиран у односу на филтрацију $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ ако је за свако фиксирано $t \in T$ случајна величина $X(t)$ мерљива у односу на σ -алгебру $\mathcal{F}_t$.

Адаптираност се на исти начин дефинише и за случајне низове.

Напомена 9.2. Дефиниција адаптираности заправо значи

$$\mathcal{G}_t \subseteq \mathcal{F}_t.$$

Може се приметити да је сваки процес адаптиран у односу на своју природну филтрацију.

Дефиниција 9.4. Случајни процес $\{X(t), t \in T\}$ је **мартингал** у односу на филтрацију $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ ако важе услови:

1. Процес $\{X(t), t \in T\}$ је адаптиран у односу на филтрацију $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$.
2. $E|X(t)| < +\infty$ за $t \in T$.
3. $E(X(t)|\mathcal{F}_s) = X(s)$, скоро сигурно, за све $0 \leq s \leq t, s, t \in T$.

Ако се трећи услов замени условом

$$E(X(t)|\mathcal{F}_s) \leq X(s), \text{ скоро сигурно, за све } 0 \leq s \leq t, s, t \in T$$

добива се **супермартингал**. Ако се трећи услов замени условом

$$E(X(t)|\mathcal{F}_s) \geq X(s), \text{ скоро сигурно, за све } 0 \leq s \leq t, s, t \in T$$

добива се **субмартингал**.

За случајне низове дефиниција добија мало једноставнији облик.

Дефиниција 9.5. Случајни низ $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ је **мартингал** у односу на филтрацију $\{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ ако важе услови:

1. Низ $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ је адаптиран у односу на филтрацију $\{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}_0\}$.
2. $E|X_n| < +\infty$ за $n \in \mathbb{N}_0$.
3. $E(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1}$, скоро сигурно, за све $n \in \mathbb{N}$.

Ако се трећи услов замени условом

$$E(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) \leq X_{n-1}, \text{ скоро сигурно, за све } n \in \mathbb{N}$$

добива се **супермартингал**. Ако се трећи услов замени условом

$$E(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) \geq X_{n-1}, \text{ скоро сигурно, за све } n \in \mathbb{N}$$

добива се **субмартингал**.

Напомена 9.3. Кад се проверава да ли је неки процес мартингал (супермартингал, субмартингал) често се користе следеће особине условног математичког очекивања:

1. $E(E(X|\mathcal{F})) = E(X)$, за произвољну случајну величину X и произвољну σ -алгебру $\mathcal{F}$;
2. ако је X независно од $\mathcal{F}$, онда је $E(X|\mathcal{F}) = E(X)$;
3. ако је X мерљиво у односу на $\mathcal{F}$, онда је $E(X|\mathcal{F}) = X$.

Из трећег услова из дефиниције мартингала и особине

$$E(E(X|\mathcal{F})) = E(X)$$

добива се да важи следеће тврђење:

Последица 9.1. 1. Ако је $\{X(t), t \in T\}$ мартингал, онда је $E(X(t)) = \text{const.}$ за $t \in T$,
2. Ако је $\{X(t), t \in T\}$ супермартингал, онда је $E(X(t))$ опадајућа функција од $t \in T$,
3. Ако је $\{X(t), t \in T\}$ субмартингал, онда је $E(X(t))$ растућа функција од $t \in T$.

Напомена 9.4. Ако је $\{X(t), t \in T\}$ субмартингал, онда је $\{-X(t), t \in T\}$ супермартингал, и обрнуто.

9.1.1 Примери мартингала

Пример 9.1. (низ независних случајних величина) Нека је случајни низ $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ такав да је $E|X_n| < +\infty$, $E(X_n) = 0$ за $n \in \mathbb{N}$. Нека је

$$S_0 = 0, \quad S_n = X_1 + \cdots + X_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тада је низ $\{S_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ мартингал у односу на филтрацију $\{\mathcal{F}_n\}$, задату са

$$\mathcal{F}_n = \sigma\{X_1, \dots, X_n\},$$

што следи из:

$$E(S_n | \mathcal{F}_{n-1}) = E(S_{n-1} + X_n | \mathcal{F}_{n-1}) = S_{n-1} + E(X_n) = S_{n-1}.$$

Пример 9.2. (случајно лутање по правој) Посматрамо једнодимензионо случајно лутање, код кога су вероватноће корака у позитивном и негативном смеру

$$P\{X_n = 1\} = p, \quad P\{X_n = -1\} = 1 - p, \quad p \in [0, 1],$$

а положај честице у тренутку n :

$$S_0 = 0, \quad S_n = X_1 + \cdots + X_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Нека је

$$\mathcal{F}_n = \sigma\{S_1, \dots, S_n\}.$$

(Важи $\mathcal{F}_n = \mathcal{G}_n$, тј. у питању је природна филтрација низа $\{S_n\}$.)

Треба испитати да ли је и када низ $\{S_n\}$ мартингал у односу на филтрацију $\{\mathcal{F}_n\}$.

Из својства Маркова следи:

$$\begin{aligned} E(S_n | \mathcal{F}_{n-1}) &= E(S_n | S_1, \dots, S_{n-1}) \\ &= E(S_n | S_{n-1}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(S_n | S_{n-1} = s_{n-1}) &= E(s_{n-1} + X_n | S_{n-1} = s_{n-1}) \\ &= (s_{n-1} - 1)P\{X_n = -1\} + (s_{n-1} + 1)P\{X_n = 1\} \\ &= (s_{n-1} - 1)(1 - p) + (s_{n-1} + 1)p \\ &= s_{n-1} - 1 + 2p. \end{aligned}$$

Дакле,

$$E(S_n | S_{n-1}) = S_{n-1} + 2p - 1.$$

Из овога следи:

1. за $p = \frac{1}{2}$ низ $\{S_n\}$ је мартингал;
2. за $p < \frac{1}{2}$ низ $\{S_n\}$ је супермартингал;
3. за $p > \frac{1}{2}$ низ $\{S_n\}$ је субмартингал.

Напомена 9.5. За све наведене примере, лако се проверава да важе услови 1 и 2 из дефиниције мартингала, па је тај део изостављен.

Пример 9.3. (Винеров процес) Винеров процес $\{W(t), t \in [0, +\infty)\}$ је мартингал у односу на своју природну филтрацију:

$$\{\mathcal{G}_t, t \in [0, +\infty)\}, \quad \mathcal{G}_t = \sigma\{W(s), 0 \leq s \leq t\}.$$

Показујемо да је испуњен услов 3 из дефиниције мартингала. За $0 \leq s \leq t$ важи:

$$\begin{aligned} E(W(t)|\mathcal{G}_s) &= E((W(t) - W(s)) + W(s)|\mathcal{G}_s) \\ &= E(W(t) - W(s)|\mathcal{G}_s) + E(W(s)|\mathcal{G}_s) \\ &= E(W(t) - W(s)) + W(s) \\ &= W(s). \end{aligned}$$

Пример 9.4. (проблем кутије) У кутији (урни) се у почетном тренутку налазе једна црна и једна бела куглица. У следећем тренутку се случајно бира једна куглица, врати у кутију, па се у кутију убаци још једна куглица исте боје као што је била одабрана куглица. Даље се, на исти начин, понавља овај експеримент. Нека је X_n пропорција белих куглица у кутији у тренутку n (после n извлачења и враћања). Тада је случајни низ $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ мартингал у односу на своју природну филтрацију.

Показујемо да важи услов 3 из дефиниције мартингала. У питању је ланац Маркова, па из својства Маркова следи:

$$E(X_n|\mathcal{G}_{n-1}) = E(X_n|X_0, \dots, X_{n-1}) = E(X_n|X_{n-1}).$$

Даље се добија:

$$\begin{aligned} E(X_n|X_{n-1} = x_{n-1}) &= \frac{(n-1+2)x_{n-1} + 1}{n-1+2+1} \cdot P\{\text{извучена бела куглица}\} \\ &\quad + \frac{(n-1+2)x_{n-1}}{n-1+2+1} \cdot P\{\text{извучена црна куглица}\} \\ &= \frac{(n+1)x_{n-1} + 1}{n+2} \cdot x_{n-1} + \frac{(n+1)x_{n-1}}{n+2} (1 - x_{n-1}) \\ &= \frac{(n+1)x_{n-1}^2 + x_{n-1} + (n+1)x_{n-1} - (n+1)x_{n-1}^2}{n+2} \\ &= x_{n-1}. \end{aligned}$$

Дакле, важи $E(X_n|X_{n-1}) = X_{n-1}$, па случајни низ јесте мартингал.

Овај проблем је у литератури познат и као „Пољина урна”, у част мађарског математичара Поље (George Polya (1887. - 1985.)), који се бавио разноврсним комбинаторним проблемима. О томе се може више прочитати у књизи [4].

Пример 9.5. (коцкање) Претпоставимо да коцкар улаже једну новчану јединицу у свакој партији. Ако је

$$Y_j = \begin{cases} 1, & \text{ако је победио у } j\text{-тој партији} \\ -1, & \text{ако је изгубио у } j\text{-тој партији,} \end{cases}$$

онда је добитак коцкара после n партија:

$$X_n = Y_1 + \dots + Y_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ако је $E(Y_j) = 0$, онда је низ $\{X_n\}$ мартингал (у овом случају **фер игра**), ако је $E(Y_j) \geq 0$, онда је низ $\{X_n\}$ субмартингал, а ако је $E(Y_j) \leq 0$, онда је низ $\{X_n\}$ супермартингал. То следи из:

$$E(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) = E(X_{n-1} + Y_n | \mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1} + E(Y_n),$$

где је $\mathcal{F}_n = \sigma\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$.

У овом случају, σ -алгебра $\mathcal{F}_{n-1}$ може да се замисли као: сви могући исходи претходних партија (који су, наравно, познати).

Сада ћемо мало да уопштимо проблем. Претпоставимо да коцкар у j -тој партији улаже износ k_j . Онда је његов добитак после n партија једнак

$$Z_n = k_1 Y_1 + \dots + k_n Y_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тада важи

$$E(Z_n | \mathcal{F}_{n-1}) = E(Z_{n-1} + k_n Y_n | \mathcal{F}_{n-1}) = Z_{n-1} + k_n E(Y_n).$$

Последња једнакост важи зато што је k_n мерљиво у односу на $\mathcal{F}_{n-1}$ (тј. улог за наредну партију је познат чим се претходна партија заврши).

Одатле следи да је случајни низ $\{Z_n\}$ мартингал (субмартингал, супермартингал) у истим случајевима кад и $\{X_n\}$.

Закључак је да величина улога не мења природу игре (фер или нефер)!

9.1.2 Порекло назива и значај мартингала

За почетак, одакле потиче назив „мартингал”? Постоје (бар) два објашњења.

Прва верзија тврди да име потиче од дела коњске опреме, који спречава да коњ, при прескакању препона, сувише бацаује главу. Ово објашњење нам је некако интуитивно јасно, јер низ који је мартингал „нема где да побегне” од своје вредности у претходном регистрованом тренутку.

Према другој верзији, реч потиче од назива коцкарске стратегије у којој се после сваког губитка дуплира улог (на француском „le grand martingale”).

Мартингали (сумбартингали, супермартингали) имају велику примену у различитим гранама математике, као што су, на пример, стохастичка анализа и финансијска математика. Ми ћемо показати само најосновније особине, а могу се извести и много компликованији резултати, као што су различите неједнакости и закони великих бројева.

9.2 Још неке особине мартингала са дискретним параметром

Следеће тврђење се једноставно изводи из дефиниције мартингала.

Последица 9.2. Нека је случајни низ $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ мартингал у односу на филтрацију $\{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}_0\}$. Тада важе следеће особине:

1. $E(X_n(X_m - X_n)) = 0$ за $m \geq n$,
2. $E(X_n^2)$ је растућа функција од n .

Доказ. 1.

$$\begin{aligned} E(X_n(X_m - X_n)) &= E(E(X_n(X_m - X_n) | \mathcal{F}_n)) \\ &= E(X_n E(X_m - X_n | \mathcal{F}_n)) \\ &= E(X_n (E(X_m | \mathcal{F}_n) - X_n)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. За $m \geq n$ важи:

$$\begin{aligned} E(X_m^2) &= E((X_m - X_n) + X_n)^2 \\ &= E(X_m - X_n)^2 + 2E((X_m - X_n)X_n) + E(X_n^2). \end{aligned}$$

С обзиром да је $E(X_m - X_n)^2 \geq 0$ и $E((X_m - X_n)X_n) = 0$ (на основу првог дела тврђења), добијамо:

$$E(X_m^2) \geq E(X_n^2).$$

□

9.3 Дубова декомпозиција субмартингала

Сада ћемо мало проширити причу о филтрацијама, односно, дефинисати још један однос у ком могу да се нађу филтрација и случајни процес - **предвидивост**.

Дефиниција 9.6. *Случајни процес $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ је предвидив у односу на филтрацију $\{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ ако је за свако фиксирано $n \in \mathbb{N}$ случајна величина X_n мерљива у односу на σ -алгебру $\mathcal{F}_{n-1}$.*

Пример 9.6. *Пример предвидивог низа се може једноставно конструисати на следећи начин. Дефинишемо*

$$S_n = X_1 + \dots + X_{n-1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2,$$

$$\mathcal{F}_n = \sigma\{X_1, X_2, \dots, X_n\},$$

где је $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ произвољни случајни низ. Тада је низ $\{S_n, n \geq 2\}$ предвидив у односу на филтрацију $\{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Пример 9.7. *Још један пример предвидивог низа је $k_n, n \in \mathbb{N}$ из примера 9.5 (зато што је улог за n -ту партију познат пре почетка n -те партије).*

Следећи резултат ће нам бити интересантан, јер повезује појам мартингала, субмартингала и предвидивих случајних низова. Овде ће бити формулисан и доказан за дискретни случај, а слично тврђење постоји и за непрекидне субмартингале. Аналогно тврђење се може формулисати и за супермартингале. Ово и слична тврђења имају примену у стохастичкој анализи и финансијској математици.

Теорема 9.1. *(Дубова декомпозиција субмартингала)*

Нека је случајни низ $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ субмартингал у односу на филтрацију $\{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}_0\}$. Тада постоје случајни низ $\{M_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ и случајни низ $\{A_n, n \in \mathbb{N}_0\}$, такви да важе услови:

1. $\{M_n\}$ је мартингал у односу на филтрацију $\{\mathcal{F}_n\}$;
2. низ $\{A_n\}$ је скоро сигурно растући;
3. низ $\{A_n\}$ је предвидив;
4. $X_n = M_n + A_n$, за $n \in \mathbb{N}_0$.

Доказ. Нека је случајни низ $\{D_n\}$ дефинисан са

$$D_n = E(X_n - X_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

За свако фиксирано n , случајна величина D_n је $\mathcal{F}_{n-1}$ -мерљива.

Случајни низ $\{X_n\}$ је субмартингал, па је

$$E(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) \geq X_{n-1}, \quad \text{скоро сигурно,}$$

а случајна величина X_{n-1} је $\mathcal{F}_{n-1}$ -мерљива (због особине адаптираности у односу на филтрацију), па је

$$E(X_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1}.$$

Одатле следи да је, за свако фиксирано n , $D_n \geq 0$.

Нека је случајни низ $\{A_n\}$ дефинисан са

$$A_0 = 0, \quad A_n = \sum_{j=1}^n D_j, \quad n \in \mathbb{N}.$$

На основу претходних закључака, добијамо да важе услови 2 и 3 теореме.

Нека је

$$M_n = X_n - A_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тада важи

$$\begin{aligned} E(M_n | \mathcal{F}_{n-1}) &= E(X_n - A_n | \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= E(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) - A_n \\ &= E(X_{n-1} + D_n | \mathcal{F}_{n-1}) - A_n \\ &= X_{n-1} + D_n - \sum_{j=1}^n D_j \\ &= X_{n-1} - \sum_{j=1}^{n-1} D_j \\ &= M_{n-1} \end{aligned}$$

Дакле, важе и услови 1 и 4 теореме. □

Пример 9.8. (наставак примера са низом независних случајних величина) Нека је случајни низ $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ такав да је $E|X_n| < +\infty$, $E(X_n) = 0$ за $n \in \mathbb{N}$. Нека је

$$S_0 = 0, S_1 = X_1, S_n = X_1 + X_2 + Y_2 + \cdots + X_n + Y_n, n \geq 2,$$

где је низ $\{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$ задат са:

$$Y_n = E(|X_n| | \mathcal{F}_{n-1}), \mathcal{F}_n = \sigma\{X_1, \dots, X_n\}.$$

Тада је низ $\{S_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ субмартингал у односу на филтрацију $\{\mathcal{F}_n\}$.

Нека је:

$$A_1 = 0, A_n = Y_2 + \cdots + Y_n, n \geq 2.$$

Одговарајући мартингал из Дубове теореме је низ $\{S_n - A_n\}$, а предвидив, растући низ је $\{A_n\}$.

9.4 Максималне неједнакости за мартингале

Теорема 9.2. *Ако је $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$, $X_n \geq 0$, $E(X_n) = m$, мартингал, онда важи следећа неједнакост:*

$$(\forall \epsilon > 0) P\{\max_{n \geq 0} X_n \geq \epsilon\} \leq \frac{m}{\epsilon}.$$

Доказ. Нека је $\epsilon > 0$ фиксирано,

$$V_n = \max_{0 \leq k \leq n} X_k.$$

Дефинишемо

$$T = \min\{k : X_k \geq \epsilon\}, n_\epsilon = \min\{T, n\}.$$

Из особина мартингала следи:

$$m = E(X_n) = E(X_{n_\epsilon}),$$

а важи и

$$\begin{aligned} E(X_{n_\epsilon}) &= E(X_{n_\epsilon} I_{T \leq n}) + E(X_{n_\epsilon} I_{T > n}) \\ &\geq \epsilon E(I_{T \leq n}) + E(X_{n_\epsilon} I_{T > n}) \\ &= \epsilon P\{T \leq n\} + E(X_{n_\epsilon} I_{T > n}) \\ &\geq \epsilon P\{T \leq n\}. \end{aligned}$$

Одатле следи:

$$P\{V_n \geq \epsilon\} \leq \frac{m}{\epsilon},$$

па је

$$P\{\max_{n \geq 0} X_n \geq \epsilon\} = \lim_{n \rightarrow \infty} P\{V_n \geq \epsilon\} \leq \frac{m}{\epsilon}.$$

□

Пример 9.9. (коцкање, наставак) Претпоставимо да је коцкар у почетном тренутку има k новчаних јединица ($X_0 = k$) и да је у питању фер игра. Претпоставимо да „коцкару добро иде”, тј. да је за свако n , $X_n \geq 0$. Из претходно доказане неједнакости директно следи да је вероватноћа да максимална количина новца којом располаже коцкар премашу неку велику суму (ϵ је много веће од k , на пример) мања од $\frac{k}{\epsilon}$. Специјално, вероватноћа да коцкар удвостручи суму је мања од $\frac{1}{2}$.

Следеће тврђење је познато као **Дубова максимална неједнакост**.

Теорема 9.3. *Нека је случајни низ $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ мартингал у односу на филтрацију $\{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}_0\}$. Тада важи:*

$$(\forall \epsilon > 0) (\forall n \in \mathbb{N}_0) P\{\max_{0 \leq k \leq n} |X_k| \geq \epsilon\} \leq \frac{E(X_n^2)}{\epsilon^2}.$$

Доказ. Дефинишемо догађај A_j на следећи начин:

$$A_j = \{\omega : |X_j| \geq \epsilon, |X_k| < \epsilon \text{ за } k < j\}.$$

Тада је

$$\{\max_{0 \leq k \leq n} |X_k| \geq \epsilon\} = \bigcup_{j=0}^n A_j.$$

$$\begin{aligned}
E(X_n^2) &\geq E(X_n^2 \sum_{j=0}^n I_{A_j}) \\
&= E(\sum_{j=0}^n X_n^2 I_{A_j}) \\
&= E(\sum_{j=0}^n (X_n - X_j + X_j)^2 I_{A_j}) \\
&= E(\sum_{j=0}^n (X_n - X_j)^2 I_{A_j} + \sum_{j=0}^n X_j^2 I_{A_j} + 2 \sum_{j=0}^n X_j (X_n - X_j) I_{A_j}) \\
&= E(\sum_{j=0}^n (X_n - X_j)^2 I_{A_j}) + E(\sum_{j=0}^n X_j^2 I_{A_j}) + 2E(\sum_{j=0}^n X_j (X_n - X_j) I_{A_j}).
\end{aligned}$$

Из чињенице да је у претходном реду прва сума ненегативна, користећи особине условног математичког очекивања, добијамо:

$$\begin{aligned}
E(X_n^2) &\geq E(\sum_{j=0}^n X_j^2 I_{A_j}) + 2E(E(\sum_{j=0}^n X_j (X_n - X_j) I_{A_j} | \mathcal{F}_j)) \\
&= E(\sum_{j=0}^n X_j^2 I_{A_j}) + 2E(\sum_{j=0}^n X_j I_{A_j} E(X_n - X_j | \mathcal{F}_j)) \\
&= E(\sum_{j=0}^n X_j^2 I_{A_j}),
\end{aligned}$$

односно:

$$E(X_n^2) \geq \sum_{j=0}^n E(X_j^2 I_{A_j}).$$

С друге стране, важи:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^n E(X_j^2 I_{A_j}) &\geq \sum_{j=0}^n \epsilon^2 E(I_{A_j}) \\
&= \sum_{j=0}^n \epsilon^2 P(A_j) \\
&= \epsilon^2 P\left(\bigcup_{j=0}^n A_j\right) \\
&= \epsilon^2 P\{\max_{0 \leq k \leq n} |X_k| \geq \epsilon\},
\end{aligned}$$

одакле следи

$$P\{\max_{0 \leq k \leq n} |X_k| \geq \epsilon\} \leq \frac{E(X_n^2)}{\epsilon^2}.$$

□

Из претходне теореме следе још неки важни резултати, од којих овде наводимо један, без доказа.

Теорема 9.4. Нека је случајни низ $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ мартингал за који важи $E(X_n^2) \leq C < +\infty$, за свако n . Тада низ $\{X_n\}$ конвергира у средње квадратном смислу ка случајној величини X са коначном дисперзијом.

Литература

- [1] Ј. Вукмировић. *Случајни процеси*. Завод за уџбенике, Београд, 2015.
- [2] В. Hayes. *First links in the Markov chain*. American Scientist, 101(2), 92–97, 2013.
- [3] S. Karlin, H. Taylor. *An introduction to stochastic modeling (third edition)*, Academic Press, San Diego, 1994.
- [4] H. Mahmoud. *Polya urn models*. Chapman and Hall/CRC, New York, 2008.
- [5] Ј. Малишић. *Случајни процеси - теорија и примене*. Грађевинска књига, Београд, 1989.
- [6] Ј. Малишић, В. Јевремовић. *Случајни процеси и временске серије*. Математички факултет, Београд, 2008.
- [7] П. Младеновић. *Вероватноћа и статистика*. Математички факултет, Београд, 2008.
- [8] D. Stirzaker. *Stochastic processes and models*. Oxford University Press, Oxford, 2005.