

1. Деофинишемо $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ са

$$d((x, y), (x', y')) = \begin{cases} |y| + |y'| + |x - x'|, & x \neq x' \\ |y - y'|, & x = x' \end{cases}$$

а) Доказати да је d метрика.

б) Скицирати $B((2, 2), 3)$, $B((2, 4), 3)$.

в) Одредити $\text{diam}([0, 2] \times [0, 1])$

г) Испитати комплетност простора $(\mathbb{R}^2, d)$.

а) Неједнакост троугла :

$$a = (x, y), \quad b = (x', y'), \quad c = (x'', y'')$$

$$\text{Желимо } d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$$

$$1^\circ \quad x = x''$$

$$1^\circ \quad x' = x = x''$$

$$\Rightarrow d(a, c) = |y - y''| \leq |y - y'| + |y' - y''| = d(a, b) + d(b, c)$$

$$1^\circ \quad x' \neq x$$

$$\begin{aligned} d(a, c) &= |y - y''| \leq |y| + |y''| + 2|y'| + |x - x'| + |x' - x''| \\ &= d(a, b) + d(b, c) \end{aligned}$$

$$2^{\circ} x \neq x''$$

$$2a^{\circ} x = x'$$

$$d(a, c) = |y| + |y''| + |x - x''|$$

$$d(b, c) = |y'| + |y''| + |x' - x''|$$

$$d(a, b) = |y - y'|$$

$$|y - y'| + |y'| \geq |y|$$

$$\Rightarrow d(a, b) + d(b, c) \geq d(a, c)$$

$$2^{\circ} x' \neq x, x' \neq x''$$

$$\begin{aligned} & |x - x'| + |x' - x''| \geq |x - x''| \\ + & \underbrace{|y| + 2|y'| + |y''|}_{d(a, b) + d(b, c)} \geq \underbrace{|y| + |y''|}_{d(a, c)} \end{aligned}$$

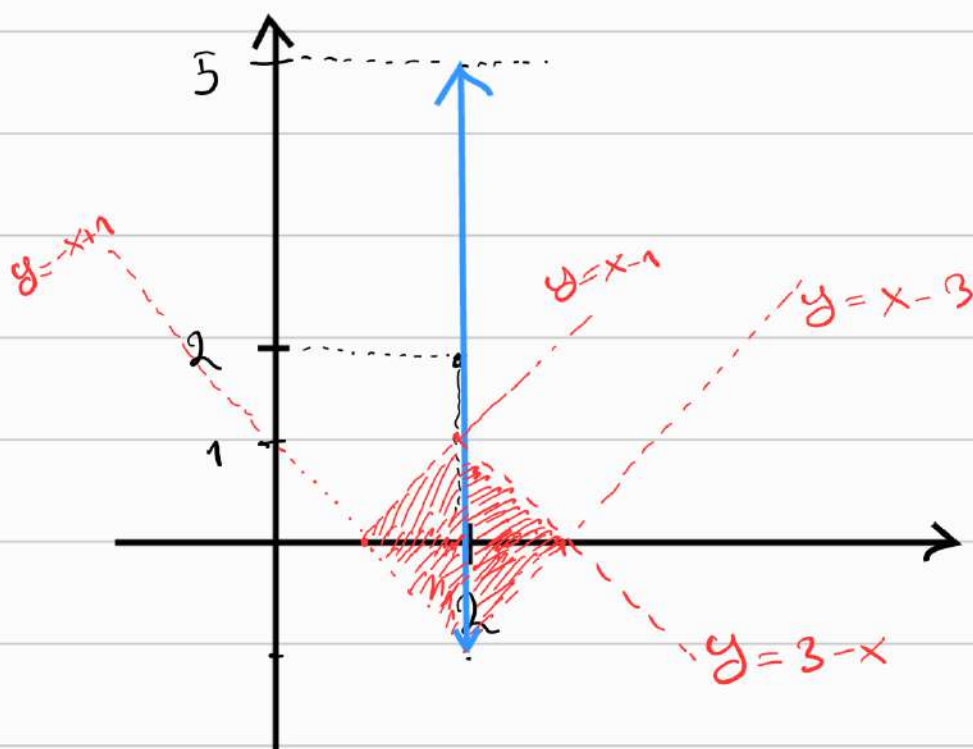
B_{11}
//

$$S) B((2, 2), 3) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2, |y - 2| < 3\} \\ \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 2, |y| + 2 + |x - 2| < 3\}$$

!! B_{12}

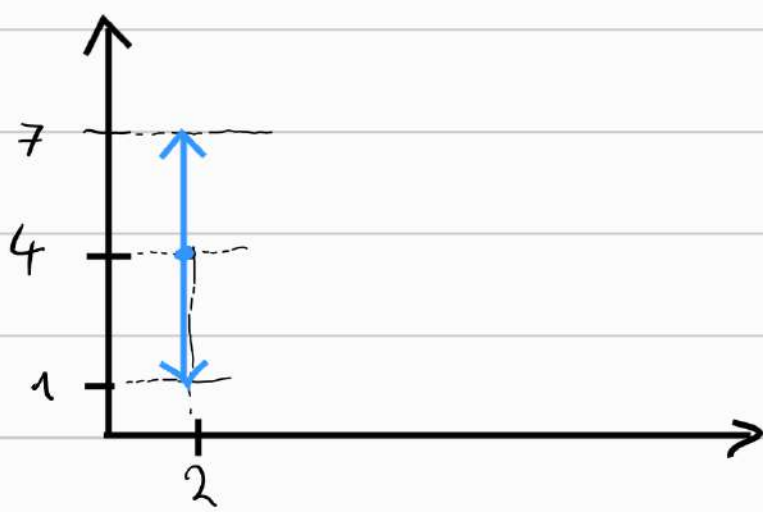
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 2, |y| + |x - 2| < 1\} \\ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y \geq 0, x > 2, y + x - 2 < 1) \vee$$

$$\{(y \geq 0, x < 2, -y - x + 2 < 1) \vee (y < 0, x > 2, -y + x - 2 < 1) \vee (y < 0, x < 2, -y - x + 2 < 1)\}$$



$$B((2, 4), 3) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x = 2, |y - 4| < 3) \vee (x \neq 2) \underbrace{|y - 4| + |x - 2| < 3}_{\emptyset}\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2, |y - 4| < 3\}$$



$$B) \text{diam}([0,2] \times [0,1])$$

$$\exists a \ (x, y), (x', y') \in [0,2] \times [0,1]$$

$$|y| + |y'| + |x - x'| \leq 1 + 1 + 2 = 4$$

$$|y - y'| \leq 1$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} d((x, y), (x', y')) \leq 4 \\ d((0, 1), (2, 1)) = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{diam}([0,2] \times [0,1]) = 4$$

г) Нераз се са d_e означена еуклидесова метрика на $\mathbb{R}^2$.

Покажијмо прво $\overset{(x_n, y_n)}{\{a_n\}}_{n \in \mathbb{N}}$ Кошиев $\text{у } (\mathbb{R}^2, d)$
 $\Rightarrow \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Кошиев $\text{у } (\mathbb{R}^2, d_e)$

$$\text{Значи } d(a_m, a_n) = \begin{cases} |y_m| + |y_n| + |x_m - x_n|, & x_m \neq x_n \\ |y_m - y_n|, & x_m = x_n \end{cases}$$

и очигледно $d(a_m, a_n) \geq d_e(a_m, a_n)$.

Зато, по комплетноста $(\mathbb{R}^2, d_e)$, постои $a \in \mathbb{R}^2$ т.д. $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_e(a_n, a) = 0$

$$a = (x, y) \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y$$

Желимо $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, a) = 0$

1°

Претпоставимо $y \neq 0$. Тодз постоји по Т.д.

за $n \geq n_0$ $|y_n| > |y|/2$

$\Rightarrow (\forall m, n \geq n_0) \ x_m \neq x_n \Rightarrow d(a_m, a_n) > |y|$

По Кошиевости (a_n) у $(\mathbb{R}^2, d)$ закључујемо

да постоји $n_1 \in \mathbb{N} : (\forall m, n \geq n_1) \ x_m = x_n$

и то је δ за x због $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

За $n \geq n_1$

$$d(a_n, a) = d((x, y_n), (x, y)) = |y_n - y| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

✓

2° $y = 0$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |y_n| = 0$, умимо $\lim_{n \rightarrow \infty} |x - x_n| = 0$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d((x_n, y_n), (x, y)) = 0$ ✓

///

2. Нека је (M, d) компактан метрички простор са

својством да за све $a, b \in M$ и $\varepsilon > 0$ постоји $n \in \mathbb{N}$ и

низ тачака $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$ т.д. за $i = \overline{0, n-1}$ $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$.

Доказати да је (M, d) повезан. Да ли тврђење важи и без

пoтпoстaвкe o кoмпaктнoсти M ?

Пoтпoстaвимo дa пoстoи дискoнeкcија U, V прoстoрa M . Уoчимo $a \in U, b \in V$ прoизвoљнe.

Зa свe $n \in \mathbb{N}$ фoрмирaмo $a = x_0^n, x_1^n, \dots, x_{m_n}^n = b$ т.д.

$d(x_i^n, x_{i+1}^n) < \frac{1}{n}$ зa $i = \overline{0, m_n-1}$. Пoстoи зa свe $n \in \mathbb{N}$ тaдa $i_n \in \{0, \dots, m_n-1\}$ т.д. $x_{i_n}^n \in U$, $x_{i_n+1}^n \in V$ ($a = x_0^n \in U, b = x_{m_n}^n \in V$).

Фoрмирaмo низ $c_n = x_{i_n}^n$. Овaј низ имa

кoнвeргeнтaн пoдниз, oднoснo пoстoиe рaстaњa $\phi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ и $c \in M$ т.д.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_{\phi(n)} = c.$$

$$(\forall n \in \mathbb{N} : c_{\phi(n)} \in U) \stackrel{U \text{ зaтвoрeн}}{\implies} c \in U.$$

Одрeдимo $d(c, V)$.

Некa је $\varepsilon > 0$ прoизвoљнo. Одрeдимo n_1

т.д. зa $n > n_1$ $d(c_{\phi(n)}, c) < \frac{\varepsilon}{2}$. Одрeдимo

n_2 т.д. зa $n > n_2$: $\frac{1}{\phi(n)} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Зa $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ и $n > n_0$ пoдoзмo:

$$\begin{aligned}
 d(c, v) &\leq d(c, x_{i_{m+1}}^{e(m)}) \quad \lceil c_{e(m)} = x_{i_m}^{e(m)} \rceil \\
 &\leq d(c, c_{e(m)}) + d(c_{e(m)}, x_{i_{m+1}}^{e(m)}) \\
 &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{e(m)} < \varepsilon
 \end{aligned}$$

$$= (\forall \varepsilon > 0) \, d(c, v) < \varepsilon \Rightarrow d(c, v) = 0$$

V згворен, $d(c, v) = 0 \Rightarrow c$ је тачка најмичавања
 скуп $V \Rightarrow c \in V$

$$\Rightarrow c \in U \cap V \Rightarrow U \cap V \neq \emptyset \quad \subseteq$$

Дакле M је повезан.

Без претпоставке о компактности
 тврђење није тачно.

Пример. $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ са изабеном метриком
 $d(x, y) = |x - y|$.

Дисконекција је на пример: $U = \mathbb{Q} \cap (-\infty, \pi]$
 $V = [\pi, +\infty) \cap \mathbb{Q}$

3. (M, d_M) метрички простор и (X, d_X) комплетан метрички простор. Дато је $f: M \times X \rightarrow X$

т.д. 1) $f_x: M \rightarrow X$, $f_x(m) = f(m, x)$ је непрекидно за свако $x \in X$.

2) Постоји $k \in (0, 1)$ т.д. је за све m из M $f_m: X \rightarrow X$, $f_m(x) = f(m, x)$ контракција са константом k .

Доказати да постоји јединствено непрекидно $g: M \rightarrow X$ т.д. за све $m \in M$ важи $g(m) = f(m, g(m))$.

Егзистенција и јединственост.

$$g(m) = f(m, g(m)) \Leftrightarrow f_m(g(m)) = g(m)$$

$\Leftrightarrow g(m)$ је фиксна тачка за $f_m: X \rightarrow X$.

Како је по 2) f_m контракција, из

Банхове теореме о фиксној тачки добијемо

да постоји јединствено $x_m \in X$ т.д. $f_m(x_m) = x_m$.

Дакле, може бити $g(m) = x_m$.

Непрерывность.

Учимо произвольно m_0 и докажем, что f непрерывно в m_0 . У нас есть учимо и из (m_n) в M за коим верно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_M(m_n, m_0) = 0$$

$$\begin{aligned} d_X(f(m_0), f(m_n)) &= d_X(f(m_0, g(m_0)), f(m_n, g(m_n))) \\ &\leq d_X(f(m_0, g(m_0)), f(m_n, g(m_0))) \\ &\quad + d_X(f(m_n, g(m_0)), f(m_n, g(m_n))) \\ &\leq d_X(f_{g(m_0)}(m_0), f_{g(m_0)}(m_n)) (*) \\ &\quad + d_X(f_{m_n}(g(m_0)), f_{m_n}(g(m_n))) (**)$$

(*) $\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ из непрерывности $f_{g(m_0)}$

$$(**) \leq k d_X(g(m_0), g(m_n))$$

$$\Rightarrow (1-k) d_X(g(m_0), g(m_n)) \leq (*)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d_X(f(m_0), f(m_n)) = 0,$$

что и требовалось доказать.

4. Дај је метрички простор (X, d) .

а) Нека је $\emptyset \neq A \subseteq X$ повезан и $a \in X$ т.д.

$d(a, A) = 0$. Доказати да је $A \cup \{a\}$ повезан.

б) Ако је додатно (X, d) и компактан,
 $A, B \subseteq X$ непрезних и повезаних, $d(A, B) = 0$.

Доказати да постоји $c \in X$ т.д. је $A \cup B \cup \{c\}$ повезан.

в) Да ли твђење у б) важи и без претпоставке
о компактности простора (X, d) ?

На вежбама смо назвали следеће теореме о
повезаности:

Те1. $\emptyset \neq A \subseteq X$ повезан и $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$
 $\Rightarrow B$ је повезан.

Те2. $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ дефиница повезаних скупова
у метричком простору и B повезан
такз да $(\forall \alpha \in I) A_\alpha \cap B \neq \emptyset$.
Тда је $B \cup (\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha)$ повезан.

$$a) d(a, A) = 0 \Rightarrow a \in \bar{A}$$

$\Rightarrow A \subseteq A \cup \{a\} \subset \bar{A} \xrightarrow{\text{Te1.}} A \cup \{a\}$ је повезан.

$$8) d(A, B) = 0 \Rightarrow \text{Постоје низ } (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ у } A \\ \text{и } (c_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ у } B \text{ т.д. је } \lim_{n \rightarrow \infty} d(b_n, c_n) = 0$$

X компактен $\Rightarrow$ Постоји релација $\epsilon: \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
и $c \in X$: $\lim_{n \rightarrow \infty} d(c, c_n) = 0$

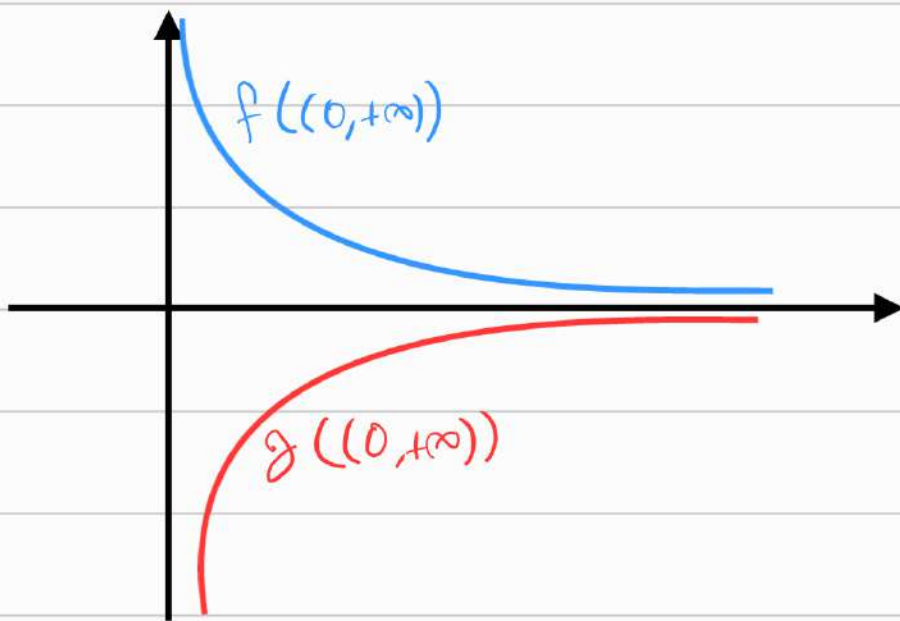
Одмах узмо $d(c, B) = 0$, те потом из
 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(b_n, c_n) = 0$ и $d(c, A) = 0$

2) $\Rightarrow A \cup \{c\}, B \cup \{c\}$ повезани, те тврђење
добивамо применом Те2. На
 $A_1 = A \cup \{c\}, A_2 = B \cup \{c\}, B = \{c\}$.

В) Уочимо $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ где са

$$f(x) = (x, \frac{1}{x}), g(x) = (x, -\frac{1}{x}).$$

$(0, +\infty)$ повезан $\Rightarrow f((0, +\infty)), g((0, +\infty))$ повезани
у $\mathbb{R}^2$.
 $\begin{matrix} \parallel \\ A \end{matrix} \quad \begin{matrix} \parallel \\ B \end{matrix}$



$$d(f(m), g(m)) = 2\left|\frac{1}{m}\right| \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$$

$$\Rightarrow d(A, B) = 0$$

Предположимо да постои $c \in \mathbb{R}^2$, $c = (x_c, y_c)$
 Т.д. је $A \cup B \cup \{c\}$ повезан.

$$1^\circ y_c \neq 0 \text{ и бидо } y_c > 0$$

$$U := \{(x, y) \mid y > 0\} \rightarrow \text{отворен}$$

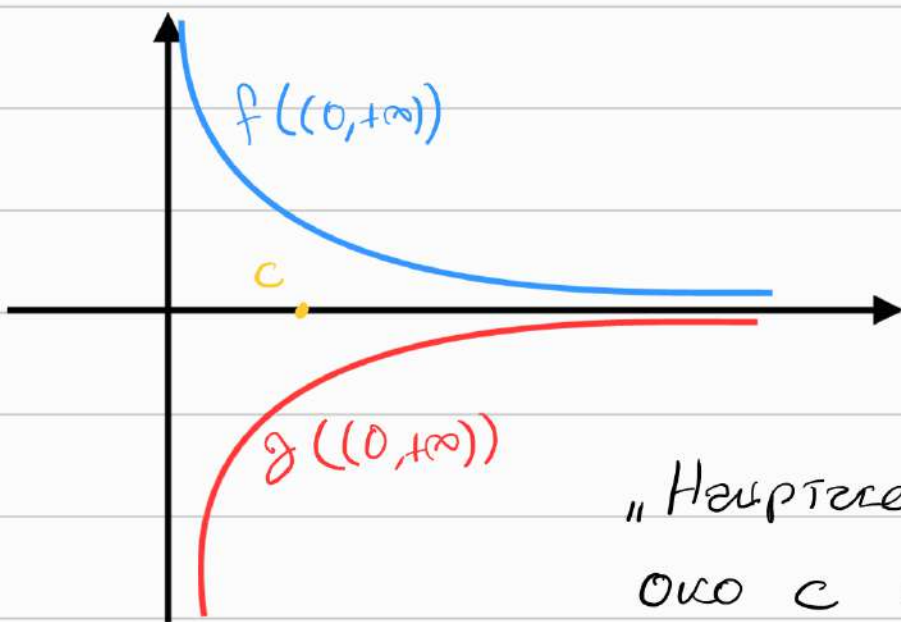
$$V := \{(x, y) \mid y < 0\} \rightarrow \text{затворен}$$

$$(\forall (x, y) \in A \cup B \cup \{c\}) \quad y \neq 0$$

$$\Rightarrow U \cap (A \cup B \cup \{c\}) \text{ и } V \cap (A \cup B \cup \{c\})$$

двоје дисјунктних због $A \cup B \cup \{c\}$.

$$2^\circ y_c = 0$$



„Накртнемо“ отворену куглу
око c и помоћу ње
изразити дисјункцију

Желимо да те кугле не сече A и B .

Уочимо $\delta < x_c$ произвољно.

$[x_c - \delta, x_c + \delta]$ је компакт из $\frac{1}{x}$ и

њему достиже минимум $m > 0$

Одговоримо $r = \frac{1}{2} \min \{ \delta, m \}$ тада $B(c, r)$

и $\overline{B(c, r)}$ не сече A и B

Уочимо $U = \{ (x, y) \mid y > 0 \} \cup B(c, r)$

$V = \{ (x, y) \mid y < 0 \} \cap \overline{B(c, r)}^c$

Тада $U \cap (A \cup B \cup \{c\}) = A \cup \{c\}$

$V \cap (A \cup B \cup \{c\}) = B$, те

имамо дисјункцију за $A \cup B \cup \{c\}$

За $x_c < 0$ не третирамо m већ само
узмемо $B(c, x_c)$.

5. Нека је дат скуп низова $(a_n)_n$ и јединица τ_0 . $X = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = a \mid (\forall n \in \mathbb{N}) a_n \in \{0, 1\}\}$ и $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ са:

$$d(a, b) = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, n = \min \{m \in \mathbb{N} \mid a_m \neq b_m\} \\ 0, a = b \end{cases}$$

а) Доказати да је (X, d) метрички простор.

б) Нека је $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ конвергентан низ низова у (X, d) . Доказати да за све $n \in \mathbb{N}$ постоји $k_0 \in \mathbb{N}$ т.д. је $x_n^k = x_n^{k_0}$ за све $k \geq k_0$.

в) Да ли је (X, d) повезан?

а) $\checkmark$

б) Постоји $x \in X$ т.д. $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x^n, x) = 0$. (*)

За $n \in \mathbb{N}$ противно имамо из (*)

$$(\exists k_0 \in \mathbb{N}) (\forall k \geq k_0) d(x^k, x) < \frac{1}{2^n}$$

$$\Rightarrow (\forall m = \overline{0, n}) x_m^k = x_m = x_m^{k_0}.$$

В) Дефиницимо $e: X \rightarrow \{0,1\}$ са

$e(x) = x_1$, где на $\{0,1\}$ подразумевамо дискретну метрику.

Твримо да је e непрекидно. Заста
 $d(x,y) < \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = y_1 \Rightarrow e(x) = e(y)$

Те имамо непрекидну и сурјективну
ф-ју из X на двојку $\{0,1\}$ из простор
 X није повезан.

6. На $\mathbb{R}$ можемо задати метрику са

$$d(x,y) = \begin{cases} \max\{|x|, |y|\}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

Описати отворене и затворене
скупове у $(\mathbb{R}, d)$.

Нека је U отворен скуп.

1° $0 \in U$, U отворен

$$(\exists \delta > 0) \quad B(0, \delta) \subseteq U$$

" $\{y \in \mathbb{R} \mid |y| < \delta\}$ јединица
околича.

2° $0 \notin U$

$$x \in U, B(x, \frac{1}{2}) = \{y \in \mathbb{R} \mid \max\{|y|, |x|\} < \frac{1}{2}\} \\ \cup \{x\} = \{x\}$$

$\Rightarrow$ Свака тачка сем нуле је
сопствена отворена околност односно
све тачке сем нуле су отворени
скупови.

Закључујемо да је сваки скуп који
не садржи 0 отворен, док су скупови
који садрже 0 отворени ако и само
ако садрже екивалентну околност нуле у $\mathbb{R}$.

Нека је F скуп који садржи 0, тада
 F^c не садржи 0 те је F^c отворен
односно F је затворен.

С друге стране, ако F не садржи 0
 F^c је садржи 0 је отворен ако
постоји $\delta > 0$ т.д. $(-\delta, \delta) \subset F^c$ тј.

F је затворен ако постоји $\delta > 0$
т.д. $(-\delta, \delta) \cap F = \emptyset$.