

1. За $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ кажемо да је конвексно
ако за све $x, y \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda \in [0, 1]$ важи
 $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$.

а) Нека је $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ конвексно. Докажи да
за све $k \in \mathbb{N}$ и $x, h \in \mathbb{R}^n$ важи
 $f(x+h) - f(x) \geq 2^k \left(f\left(x + \frac{h}{2^k}\right) - f(x) \right)$.

б) Нека је $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилно. Докажи
да је f конвексно ако за све $x, y \in \mathbb{R}^n$
важи $f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y-x \rangle$.

в) Нека је f диференцијабилно и конвексно.
Докажи да је x_0 тачка глобалног
минимума ако је $\nabla f(x_0) = 0$.

а) Применимо конвексност на тачке
 $x+h, x$ за $\lambda = 2^{-k}$.

$$\lambda(x+h) + (1-\lambda)x = x + \lambda h = x + \frac{h}{2^k}$$

$$f\left(x + \frac{h}{2^k}\right) \leq \lambda f(x+h) + (1-\lambda)f(x)$$

$$\Rightarrow f\left(x + \frac{h}{2^k}\right) - f(x) \leq 2^{-k} (f(x+h) - f(x)) \quad / \cdot 2^k$$

$$\leadsto f(x+h) \geq f(x) + 2^k (f\left(x + \frac{h}{2^k}\right) - f(x))$$

8) Када радимо са конвексним $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ и посматрамо неједнакости где се као аргументи појављују две тачке $x, y \in \mathbb{R}^n$ има смисла посматрати рестрикцију на линију која спаја x и y и тако добити конвексну функцију једне реалне променљиве.

Помоћна ф-ја: $g: (-1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(t) = f(x + t(y-x)), \quad g(0) = x, \quad g(1) = y$$

Конвексност за g :

$$t, s \in (-1, 2)$$

$$\begin{aligned} g(\lambda t + (1-\lambda)s) &= f(x + (\lambda t + (1-\lambda)s)(y-x)) \\ &= f(x + \lambda(ty - tx - sy + sx) + sy - sx) \\ &= f(\lambda(x + t(y-x)) + (1-\lambda)(x + s(y-x))) \\ &\leq \lambda f(x + t(y-x)) + (1-\lambda)f(x + s(y-x)) \\ &= \lambda g(t) + (1-\lambda)g(s) \end{aligned}$$

$\leadsto g: (-1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ је конвексна ф-ја.

Под условом да је f диференцијабилна функција и g је диференцијабилна

као композиција диференцијабилних ф-ја.

Имамо сада за све $t \in (0,1)$

$$\frac{g(t) - g(0)}{t} \leq \frac{g(1) - g(t)}{1-t} \quad / \lim_{t \rightarrow 0}$$

$$\leadsto g'(0) \leq g(1) - g(0) \quad \text{односно}$$

$$g(1) \geq g(0) + g'(0) \quad (*)$$

$$\hookrightarrow e(t) = x + t(y-x)$$

$$g'(t) = (f \circ e)'(t) = \langle \nabla f(x + t(y-x)), y-x \rangle$$

$$\leadsto g'(0) = \langle \nabla f(x), (y-x) \rangle, \text{ те } (*) \text{ даје}$$

$$g(1) = f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y-x \rangle.$$

Дакле, ако је f конвексно доказана је тражена неједнакост.

Алтернативно, могли смо искористити део под 2)

$$(f(x + \frac{h}{2^k}) - f(x))2^k = \frac{f(x + \frac{h}{2^k}) - f(x)}{\frac{1}{2^k}}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x + \frac{h}{2^k}) - f(x)}{\frac{1}{2^k}} = \langle \nabla f(x), h \rangle \quad \text{по } f \text{ в } x.$$

Твърдение доведено за $h = y - x$.

У другом смеру претпоставимо да важи

неједнакост из дела 8): За произвољне $x, y \in \mathbb{R}^n$
и $\lambda \in [0, 1]$ уз $z := \lambda x + (1 - \lambda)y$ доведено

$$\begin{aligned} f(y) &\geq f(z) + \langle \nabla f(z), y - z \rangle / (1 - \lambda) \\ + \quad &\underline{f(x) \geq f(z) + \langle \nabla f(z), x - z \rangle / \lambda} \end{aligned}$$

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) \geq f(z) + \langle \nabla f(z), (1 - \lambda)(y - z) + \lambda(x - z) \rangle \quad (**)$$

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)(y - z) + \lambda(x - z) &= y - z - \lambda y + \lambda z + \lambda x - \lambda z \\ &= (1 - \lambda)y + \lambda x - z = 0 \end{aligned}$$

Па (**) је управо

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) \geq f(\lambda x + (1 - \lambda)y)$$

3) Ако претпоставимо да је x_0 тачка глобалног
минимума од-је f знамо да је x_0 и
стационарна тачка, односно $\nabla f(x_0) = 0$.

Обратно, из конвексности ϕ -је f , по
 делу 8) имамо $f(y) \geq f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), y - x_0 \rangle$
 за све $y \in \mathbb{R}^n$, те под условом $\nabla f(x_0) = 0$
 добијемо управо $(\forall y \in \mathbb{R}^n) f(x_0) \leq f(y)$.

2. Дата је ϕ -ја $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ са

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)^3 + 2(y-2)^4}{(x-1)^2 + (y-2)^2}, & (x, y) \neq (1, 2) \\ 0, & (x, y) = (1, 2) \end{cases}$$

- Испитати непрекидност функције f .
- Испитати диференцијабилност функције f .
- Испитати равномерну непрекидност функције f .

Приметимо за почетак $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 2)\})$ као
 композиција диференцијабилних ϕ -ја на
 датом скупу.

а) Непрекидност у $(1, 2)$.

Уведемо померене померне координате

$$x = 1 + \rho \cos \varphi, y = 2 + \rho \sin \varphi, \rho \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi]$$

$$\frac{\rho^3 \cos^3 \varphi + 2\rho^4 \sin^4 \varphi}{\rho^2}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \varphi \in [0, 2\pi]}}$$

$$= \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \varphi \in [0, 2\pi]}} \rho (\cos^3 \varphi + 2\rho \sin^4 \varphi) = 0 = f(1, 2) \\ \Rightarrow f \in C(\mathbb{R}^2)$$

8) Дифференцируемость у (1, 2).

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h, 2) - f(1, 2)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3}{h^2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1, h+2) - f(1, 2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^4}{h^2} = 0$$

$$\text{Также } fD(1, 2) \Leftrightarrow \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \frac{f(1+h, 2+k) - f(1, 2)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \frac{h^3 + 2k^4}{\sqrt{h^2 + k^2} (h^2 + k^2)} ; \text{ Пусть же } k=0, h \rightarrow 0^+$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^3}{h h^2} = 1 \neq 0 \Rightarrow f \notin C(1,2)$$

B)

Рассмотрим последовательность точек $a_n = (1, 2+n)$
 $b_n = (1, 2+n+\frac{1}{n})$. $d(a_n, b_n) = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$$|f(b_n) - f(a_n)| = \left| \frac{2(n+\frac{1}{n})^4}{(n+\frac{1}{n})^2} - \frac{2n^4}{n^2} \right|$$

$$= \left| 2\left(n^2 + 2 + \frac{1}{n^2} - n^2\right) \right|$$

$$= 4 + \frac{2}{n^2} > 4$$

$$\Rightarrow f \notin UC(\mathbb{R}^2).$$

3. Пусть $e: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема и-я

также да-е за $x \in (1,2)$ $e(x) > 0$ и $e(x) = 0$
за $x \notin (1,2)$.

Определим $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ с-

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} e\left(\frac{y}{x^2}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

а) Показать $f \in C(\mathbb{R}^2)$.

8) Испитати да ли f има извод у правцу вектора јединичног вектора у $(0,0)$ и у потврдом случају их одредити.

В) Одредити све $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ т.д. $f \in \mathcal{D}(x,y)$.

Имамо одмах $f \in \mathcal{D}(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\})$.

а) Непрестанутост на $\{(0,y_0) \mid y_0 \in \mathbb{R}\}$.

$$y_0 \neq 0 \Rightarrow \lim_{\substack{y \rightarrow y_0 \\ x \rightarrow 0}} \left| \frac{y}{x^2} \right| = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{y \rightarrow y_0 \\ x \rightarrow 0}} e\left(\frac{y}{x^2}\right) = 0$$

$$\lim_{\substack{y \rightarrow y_0 \\ x \rightarrow 0}} f(x,y) = f(0,y_0)$$

$$2^\circ y_0 = 0$$

$$e \in C(\mathbb{R}), e|_{[1,2]^c} \equiv 0$$

$$\Rightarrow (\exists M > 0)(\forall t \in \mathbb{R}) |e(t)| \leq M$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left| \sqrt{x^2 + y^2} e\left(\frac{y}{x^2}\right) \right| \leq M \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \sqrt{x^2 + y^2} = 0 = f(0,0)$$

$$\Rightarrow f \in C(\mathbb{R}^2).$$

8) Посмотрим на векторе длины (a, b) , $a^2 + b^2 = 1$
 $\downarrow$
 v

$$1^\circ a=0 \Rightarrow b \in \{-1, 1\}$$

$$\begin{aligned} f(ha, hb) &= f(0, hb) = 0 \\ \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(ha, hb) - f(0,0)}{h} &= 0 = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) \end{aligned}$$

$$2^{\circ} \quad a \neq 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| \sqrt{a^2 + b^2} e^{\left(\frac{hb}{h^2 a^2}\right)}}{h}$$

$$h \rightarrow 0$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \operatorname{sgn} h \mathcal{L}\left(\frac{b}{ha^2}\right) = \left[\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{b}{ha^2} \right| = +\infty \right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0.$$

В) дифференцируемость у точки M_0 облика $(0, y_0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h^2 + y_0^2} e\left(\frac{y_0}{h^2}\right)}{h}$$

$$\text{За } y_0 = 0 \quad e\left(\frac{y_0}{h^2}\right) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$$

$$\text{За } y_0 \neq 0 \quad \text{и} \quad |h| < \left(\frac{|y_0|}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{или} \quad \left|\frac{y_0}{h^2}\right| > 2$$

$$\Rightarrow e\left(\frac{y_0}{h^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0, y_0) = 0$$

$$\text{Закре } fD(0, y_0) \Leftrightarrow \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \frac{f(h, y_0 + k) - f(0, y_0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

$$1^\circ y_0 \neq 0 \Rightarrow (\exists \delta > 0) (h, k) \in B((0, 0), \delta)$$

$$\Rightarrow \left|\frac{y_0 + k}{h^2}\right| > 2$$

$$\Rightarrow f|_{B((0, 0), \delta)} \equiv 0$$

$$\Rightarrow fD(0, y_0)$$

$$2^\circ y_0 = 0, \text{ предположим, что устроим } k \text{ из } (0, 0) \text{ по кривой } k = \frac{3}{2} h^2$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f\left(h, \frac{3}{2} h^2\right) = \lim_{h \rightarrow 0} e\left(\frac{\frac{3}{2} h^2}{h^2}\right) = e\left(\frac{3}{2}\right) > 0$$

$$\Rightarrow fD(0, 0).$$

4. Нека је $k \in \mathbb{R}$ и

$$f(x, y) = \begin{cases} x^k \arctan \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Испитати непрекидност и диференцијабилност f је у зависности од параметра $k \geq 0$.

Испитати равномерну непрекидност у случају $k = 3$.

$$f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left| x^k \arctan \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \frac{\pi}{2} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} |x^k|$$

$$\text{За сва } k \geq 0 \Rightarrow f \in C(\mathbb{R}^2)$$

$$k = 0 : \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \arctan \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\pi}{2} \neq 0$$

$$\Rightarrow f \notin C(0, 0)$$

Диференцијабилност у $(0, 0)$ испитујемо само за $k > 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^k \operatorname{arctg} \frac{1}{|h|}}{h}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \text{ не существует за } k < 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\pi}{2} \text{ за } k=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \text{ за } k > 1$$

$$\Rightarrow k < 1 : f \nexists (0,0)$$

$$k=1 :$$

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \left| \frac{h \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} - \frac{\pi}{2} h}{\sqrt{h^2+k^2}} \right|$$

$$= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \left| \frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| \left| \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} - \frac{\pi}{2} \right|$$

$$\leq \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \left| \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} - \frac{\pi}{2} \right| = 0$$

$$\Rightarrow f \exists (0,0)$$

$$k > 1 \quad \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \left| \frac{h h^{k-1}}{\sqrt{h^2+k^2}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| \leq \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} |h^{k-1}| \left| \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| = 0$$

$$\Rightarrow fD(0,0)$$

Равномерная непрерывность за $k=3$:

Учимо низове тачака $a_n = (n + \frac{1}{n}, 0)$

$$b_n = (n, 0); \quad d(a_n, b_n) = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$f(a_n) - f(b_n) = \left(n + \frac{1}{n}\right)^3 \operatorname{arctg} \frac{1}{n + \frac{1}{n}} - n^3 \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$$

Телоров развој у околини 0 за arctg

$$\operatorname{arctg} x = x + O(x^2), \quad x \rightarrow 0$$

$$\leadsto f(a_n) - f(b_n) = n^3 \operatorname{arctg} \frac{1}{n + \frac{1}{n}} + 3n \operatorname{arctg} \frac{1}{n + \frac{1}{n}}$$

$$+ \frac{3}{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{n + \frac{1}{n}} + \frac{1}{n^3} \operatorname{arctg} \frac{1}{n + \frac{1}{n}} - n^3 \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$$

$$= n^3 \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{n + \frac{1}{n}} - \operatorname{arctg} \frac{1}{n} \right) + 3n \operatorname{arctg} \frac{1}{n + \frac{1}{n}}$$

$$+ \frac{3}{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{n + \frac{1}{n}} + \frac{1}{n^3} \operatorname{arctg} \frac{1}{n + \frac{1}{n}} \quad \text{остатак у Телоровом развоју}$$

$$= n^3 \left(\frac{1}{n + \frac{1}{n}} - \frac{1}{n} + R_1(n) \right) + 3n \left(\frac{1}{n + \frac{1}{n}} + R_2(n) \right)$$

$$+ \frac{3}{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{n + \frac{1}{n}} + \frac{1}{n^2} \operatorname{arctg} \frac{1}{n + \frac{1}{n}}$$

$$= n^3 \left(\frac{n^2 - n^2 - 1}{n^3 + n} + \frac{1}{3n^3} \frac{1}{3(n + \frac{1}{n})^3} + R_{11}(n) \right)$$

2. член у Телоровом развоју

$$+ 3n \left(\frac{1}{n + \frac{1}{n}} + R_2(n) \right) + \frac{3}{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{n + \frac{1}{n}} + \frac{1}{n^2} \operatorname{arctg} \frac{1}{n + \frac{1}{n}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-n^3 \overset{\rightarrow 1}{1}}{n^3+n} + \frac{1}{3} - \frac{n^3 \overset{\rightarrow 1}{1/3}}{3(n+\frac{1}{n})^3} + n^3 \overset{\rightarrow 0}{R_1(n)} \\
&+ 3 \frac{n \overset{\rightarrow 3}{1}}{n+\frac{1}{n}} + 3n \overset{\rightarrow 0}{R_2(n)} + \frac{3}{n} \arctg \frac{1 \overset{\rightarrow 0}{1}}{n+\frac{1}{n}} \\
&+ \frac{1}{n^2} \arctg \frac{1 \overset{\rightarrow 0}{1}}{n+\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow f \notin \mathcal{UC}(\mathbb{R}^2)$$

5. Нека је dato $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ са $F(x, y) = y + e^y - x$.

Доказати да постоји $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ класе C^∞

тако да за све $x \in \mathbb{R}$ важи $F(x, y(x)) = 0$.

Одредити $y'(5 + \ln 5)$.

Посматрајмо $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(y) = y + e^y$

$g'(y) = 1 + e^y > 0 \Rightarrow g$ је строго растућа функција ..

$$\left. \begin{aligned} \lim_{y \rightarrow -\infty} g(y) &= -\infty \\ \lim_{y \rightarrow +\infty} g(y) &= +\infty \end{aligned} \right\} g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

$g(\mathbb{R})$ је повезан скуп

Како је g и строго растуће то је оно

Бијекција, те за све x постоји јединствено y_x т.д. $g(y_x) = x$ што је еквивалентно са $F(x, y_x) = g(y_x) - x = 0$. Стога је једина могућност управо $g(x) := y_x, x \in \mathbb{R}$. Остаје да се докаже да је ова функција класе C^∞ . Уочимо $x \in \mathbb{R}$ произвољно и $(x, y_x) \in \mathbb{R}^2$.

$$1) F(x, y_x) = 0$$

$$2) F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$$

$$3) \frac{\partial F}{\partial y}(x, y_x) = 1 + e^{y_x} > 0$$

$\xRightarrow{\text{тоуиФ}}$ Постоје отворени $U \ni x$ и $V \ni y(x)$ и јединствено $f: U \rightarrow V, f(x) = y_x$, $F(x, f(x)) = 0$ за све $x \in U$. Додатно из $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ имamo и $f \in C^\infty(U)$.

Међутим, управо је наше $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ једине која т.д. за све $x \in U$ $F(x, y(x)) = 0$. Закључимо $y|_U \equiv f$ те посебно добијемо да y има непрекидне изводе произвољног реда на U . Како је $x \in \mathbb{R}$ сасвим произвољно имamo $y \in C^\infty(\mathbb{R})$.

За $x = \ln 5 + 5$ очигледно је $y(x) = \ln 5$

$$e^{y(x)} + y(x) - x = 0 \quad /'$$

$$e^{y(x)} y'(x) + y'(x) - 1 = 0. \text{ Уврстимо } y(x) = \ln 5$$

$$\leadsto 5 y'(\ln 5 + 5) + y'(\ln 5 + 5) = 1$$

$$\Rightarrow y'(\ln 5 + 5) = \frac{1}{6}.$$

6. Нека је dato $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$. За стацхонерну тачку $x_0 \in \mathbb{R}^n$ кажемо да је недегенерисана ако је матрица $\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{i,j=1,n}$ инвертибилна. Доказати да је свака недегенерисана стацх.

Тачка изолована - постоји њена околна

у којој нема других стацхонерних тачака.

Нека је x_0 недегенерисана стацхонерна

тачка, односно

$$(\forall i \in \{1, \dots, n\}) \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0.$$

Посматрајмо $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dato са

$$F(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

Имамо $F(x_0) = (0, \dots, 0)$. Уочимо

$$dF(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right]_{i,j=1,n}$$

Тада услов недегенерисности гарантује инвертибилност матрице $dF(x_0)$.

Применом теореме о инверзној функцији добијемо да постоје отворени $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ $x_0 \in U$, $(0, \dots, 0) \in V$ такви да је $F|_U: U \rightarrow V$ бијекција, уз $F(x_0) = (0, \dots, 0)$.

Закључујемо да за свако $x \in U$ важи $F(x) \neq (0, \dots, 0)$, односно $(\exists k \in \{1, \dots, n\}) \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \neq 0$

$\Rightarrow x$ није стационарна тачка функције f ,
што је и требало доказати.