

Помогни 1-симе решења

$$\begin{aligned} 1. D_h &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 1 \geq 0, \sqrt{x^2 - x - 1} \in [-1, 1]\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 1 \geq 0, x^2 - x - 1 \leq 1\} = \dots \end{aligned}$$

2. Индукцијски корак

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + (n+1)^2 &\stackrel{u}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)((2n+1) \cdot n + 6(n+1))}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \end{aligned}$$

3. Можемо згледатк решити индукцијом, али може и:

$\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n(n+1)} &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Rightarrow \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \\ &= 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \dots + \cancel{\frac{1}{n-1}} - \cancel{\frac{1}{n}} + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

$$4. \text{UX: } \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+n} > \frac{13}{24}$$

$$\begin{aligned} \text{UX: } & \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{n+1+n} \\ &= \left(\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+n} \right) - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \stackrel{\text{UX}}{>} \frac{13}{24} \\ &+ \frac{(2n+2)(n+1) + (2n+1)(n+1) - (2n+1)(2n+2)}{(n+1)(2n+1)(2n+2)} > 0 > \frac{13}{24} \end{aligned}$$

5.

$$\forall k \in \mathbb{N}: 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) = \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}},$$

$$2k \geq 2\sqrt{k} \geq \sqrt{k} + \sqrt{k-1} \Rightarrow \frac{1}{k} \leq \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} &\leq 1 + 2(\sqrt{2} - 1) + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \\ &= 2\sqrt{n} - 1 \end{aligned}$$

6. Непрерывность следы напрямую применением Коши-Уварова

Непрерывности из $a_i = \sqrt{x_i}$, $b_i = \frac{1}{\sqrt{x_i}}$. Jednakost y Коши-Ув.

$$\text{Важно если } \exists \lambda \forall i: a_i = \lambda b_i \Leftrightarrow \sqrt{x_i} = \frac{\lambda}{\sqrt{x_i}} \Leftrightarrow \lambda = x_i$$

$$\Rightarrow \text{Следовательно } x_1 = x_2 = \dots = x_n$$

Напомена. Овде су дате само скице решења које садрже
кључне кораци у решавању. Саветујем вам да ове скице,
оних задатака које нисте већ урадили, допуните до
формалних решења.