

2. Желмо да конструирамо низ a_n такав да за све $n \in \mathbb{N}$ важи $|a_n - x| < \frac{1}{2^n}$.

За све $n \in \mathbb{N}$ имамо: $\mathbb{R} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right]$

дакле постоји $k_n \in \mathbb{Z}$ т.д. $x \in \left[\frac{k_n}{2^n}, \frac{k_n+1}{2^n} \right]$

Поставимо $a_n = \frac{k_n}{2^n}$, тзгд $|x - a_n| \leq \frac{1}{2^n}$

$\wedge$

$$\lim_n a_n = x \Leftrightarrow \lim_n |x - a_n| = 0 \quad \checkmark$$

$$\lim_n \frac{1}{2^n} = 0$$

3.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2n+1}{n^3} \right)^{n^2+n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{2n+1}{n^3} \right)^{\frac{n^3}{2n+1}} \right)^{\frac{(n^2+n)(2n+1)}{n^3}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{2n+1}{n^3} \right)^{\frac{n^3}{2n+1}} \right)^{\frac{2n^3+3n^2+n}{n^3} \underset{2}{\rightarrow} e^2} \\ &\quad \downarrow e \end{aligned}$$

(*) : Определити због тога о овом случају
важи $\lim a_n = a, \lim b_n = b \Rightarrow \lim (a_n)^{b_n} = a^b$.

4.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{5n^3+8n^2}{n^4+3n} \right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\left(1 + \frac{5n^3+8n^2}{n^4+3n} \right)^{\frac{n^4+3n}{5n^3+8n^2}}}_{a_n} \right)^{\underbrace{2n \cdot \frac{5n^3+8n^2}{n^4+3n}}_{b_n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = e, \text{ поређења силе} \rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$$

Доказати да тзгд важи $\lim_n (a_n)^{b_n} = +\infty$.

Упутство: $(\exists n_0)(\forall n \geq n_0) a_n > 2 \Rightarrow a_n^{b_n} > 2^{b_n} \dots$

5. $y_n := n^n$ строго растући, $\lim_n y_n = +\infty$

$\Rightarrow$ Можемо применити Виталову теорему:

$$\begin{aligned} \lim_n \frac{1+2^2+\dots+n^n}{n^n} &\stackrel{(*)}{=} \lim_n \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)^{n+1} - n^n} = \lim_n \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n} \\ &= \lim_n \frac{1}{1 - \underbrace{\frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n}_{\substack{\downarrow 0 \quad \downarrow \frac{1}{e} \\ \downarrow 0}}} = 1 \end{aligned}$$

6.

$$(n!)^{\frac{1}{n^2}} > 0 \stackrel{\ln}{\sim} \ln(n!)^{\frac{1}{n^2}} = \frac{\ln(n!)}{n^2} = \frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n^2}$$

$$\text{Витал: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \ln(k)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n+1)}{2n+1} \stackrel{\text{поредбена асим}}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lim_n (n!)^{\frac{1}{n^2}} = e^{\lim_n \ln(n!)^{\frac{1}{n^2}}} = e^0 = 1.$$

Напомена. Овде су дате само неке решења које садрже кључне кораке у решавању. Саветујем вам да ове скице, оних задатака које нисте већ уредили, допуните по формалних решења.