

Ispit iz linearne algebre 18/19, septembar 1, tok 102

1. Neka je $U = \Omega((1, 3, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (-1, 12, -5, 4))$, i neka je V skup rešenja sistema linearnih jednačina

$$\begin{array}{rrrrrr} x & - & 2y & + & z & + & \alpha t & = & 0 \\ 2x & - & 3y & + & z & + & 4t & = & 0 \\ 3x & - & 4y & + & z & + & 5t & = & 0. \end{array}$$

Odrediti $\alpha \in \mathbb{R}$ za koje je $\dim V = 2$, i za takvo α naći po jednu bazu za U , V , $U + V$ i $U \cap V$.

2. Neka je $L : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ zadato sa $L(X) = AX - XB$, gde su $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

- (a) Dokazati da je L linearno.
- (b) Naći matricu L u odnosu na kanonsku bazu.
- (c) Odrediti jezgro, sliku, rang i defekt L . Da li je L "1-1" ili "na"?

3. Dato je preslikavanje $\circ : \mathbb{R}^4[X] \times \mathbb{R}^4[X] \rightarrow \mathbb{R}$ na sledeći način

$$P \circ Q = P(-2)Q(-2) + P(-1)Q(-1) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2).$$

- (a) Dokazati da je $\circ$ skalarni proizvod na $\mathbb{R}^4[X]$.
- (b) Ako je $U = \{P \in \mathbb{R}^4[X] \mid P'(1) = P'(-1), P'''(0) = 0\}$, odrediti bar jednu ortonormiranu bazu U i $U^\perp$.
- (c) Odrediti ortogonalnu projekciju vektora $R(X) = 1 + X + 2X^2$ na U , kao i rastojanje R od U i $U^\perp$.

4. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 8 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Odrediti ortogonalnu matricu P i dijagonalnu matricu D takve da je $D = P^T A P$.