

Висеструки интеграли

- Насловнак матријала за I семестар -

• Подсетак:

$D \subset \mathbb{R}^n$ мерљив, f и g Риман интеграбилне на скупу $D, \alpha \in \mathbb{R}$

Важни следеће:

1° $f \pm g, \alpha f$ Риман интеграб. на D и

$$\int_D (f \pm g)(x) dx = \int_D f(x) dx \pm \int_D g(x) dx; \quad \int_D \alpha f(x) dx = \alpha \int_D f(x) dx$$

$\underbrace{\int_D}_{\mathbb{R}^n \text{ ознака } D}$

2° A, B мерљиви њ $A \cap B = \emptyset, D = A \cup B$

f Риман интеграб. на $D \Leftrightarrow f$ Риман интеграб. на A и на B

$$\int_D f(x) dx = \int_A f(x) dx + \int_B f(x) dx$$

3° $f \cdot g, |f|$ Риман интеграб.

4° $|f(x)| \geq \alpha > 0 \quad \forall x \in D \Rightarrow \frac{1}{f}$ Риман интеграб.

5° $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in D \Rightarrow \int_D f(x) dx \leq \int_D g(x) dx$

6° запремина скупа D у $\mathbb{R}^n$ (ако је $n=1$, дужина
 $n=2$, површина
 $n \geq 3$, запремина
у одгов. дим.)

$$\text{Vol}(D) = \int_D 1 dx$$

7° $n=2, D = [a, b] \times [c, d]$

$$\Rightarrow \int_D f(x) dx = \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x,y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx$$

$\downarrow$
обо
 x је уређени пар $x = (x, y)$

$$= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) dx \right) dy$$

8° $u, v \in C[a, b]$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, u(x) \leq y \leq v(x)\}$

$$\int_D f(x) dx = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

* Фубини: $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ $a \leq x \leq b$, $y \in D(x) \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$

$$\int_D f(x) dx = \int_a^b \left(\int_{D(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

* Кавалеријево правило:

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

$$\text{Vol } T = \iiint_T dx dy dz = \iint_D f(x, y) dx dy$$

* смена переменных

$D_x \subseteq \mathbb{R}^n$, f непрерывна на D_x , $x = (x_1, \dots, x_n)$

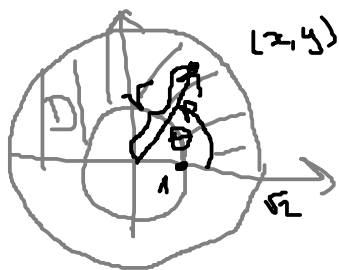
$\varphi: D_t \rightarrow D_x$ где φ, φ^{-1} класса C^1 (непр. сби. отображ.)
избави

$\downarrow$
область $y \in \mathbb{R}^n$
на которой можно
корректно ввести координаты $(t_1, \dots, t_n)$
и $\det J_\varphi \neq 0$
→ Закодировать

$$\Rightarrow \int_{D_x} f(x) dx = \int_{D_t} f(\varphi(t)) \cdot |\det J_\varphi| dt$$

одно
многообразие $y \in \mathbb{R}$

① Упростим $\int_D e^{x^2+y^2} dx dy$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, 1 \leq x^2+y^2 \leq 2\}$



смена: $x = r \cos \theta$ $0 \leq \theta \leq \pi$
 $y = r \sin \theta$ $1 \leq r \leq \sqrt{2}$

$$\varphi(r, \theta) = (\underbrace{r \cos \theta}_{x(r, \theta)}, \underbrace{r \sin \theta}_{y(r, \theta)})$$

$$D_{r,\theta} = [1, \sqrt{2}] \times [0, \pi]$$

$$J_\varphi = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\det J_\varphi = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r > 0$$

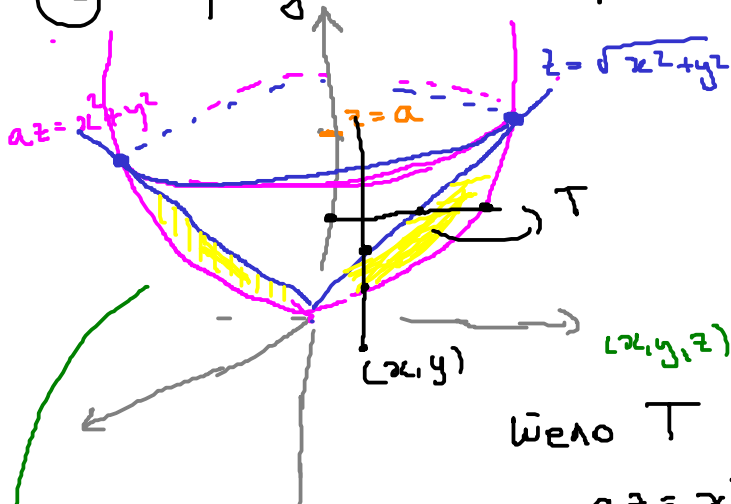
$$\int_D f(x,y) dx dy = \int_{D_{r,\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot r dr d\theta = \int_{D_{r,\theta}} e^{r^2} r dr d\theta$$

$$\text{Фудини} \int_1^{\sqrt{2}} \left(\int_0^\pi \underbrace{e^{r^2} \cdot r}_{\text{не забивай от } \theta} d\theta \right) dr = \int_1^{\sqrt{2}} e^{r^2} \cdot r dr \cdot \underbrace{\int_0^\pi d\theta}_{\pi}$$

$$= \pi \int_1^{\sqrt{2}} e^{r^2} \cdot r dr = \frac{\pi}{2} \int_1^2 e^u du = \frac{\pi}{2} (e^2 - e).$$

смена
 $u = r^2$
 $du = 2r dr$

② Изобразим заштриховану област брх: $az = x^2 + y^2$, $a > 0$
 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$



$$az = x^2 + y^2$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$az = z^2 \Rightarrow z = a \vee z = 0$$

$$(x, y, z) \in T \Rightarrow 0 < x^2 + y^2 < a^2 \text{ и } 0 < z < a$$

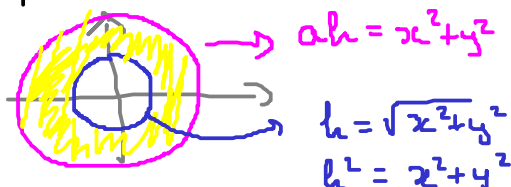
Област T се налази између обрхи

$$az = x^2 + y^2 \text{ и обрхи } z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

(на слици одвојено жутом)

фиксирјмо раван $P: z = h$, $0 < h < a$

$P \cap T$:



$$P \cap T: h^2 \leq x^2 + y^2 \leq ah$$

$\parallel$
 z^2 $a z$

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < a, \underbrace{z^2 \leq x^2 + y^2 \leq az}_{D_z}\}$$

$$\text{vol } T = \int \int \int_T dx dy dz = \int_0^a \left(\int \int_{D_z} dx dy \right) dz$$

$$\text{где } D_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : z^2 \leq x^2 + y^2 \leq az\}, 0 < z < a$$

$$\int \int_{D_z} dx dy = \begin{matrix} \text{r смена} \\ \varphi: \end{matrix} \begin{matrix} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{matrix} = \int_z^{\sqrt{az}} \left(\int_0^{2\pi} 1 \cdot r d\theta \right) dr$$

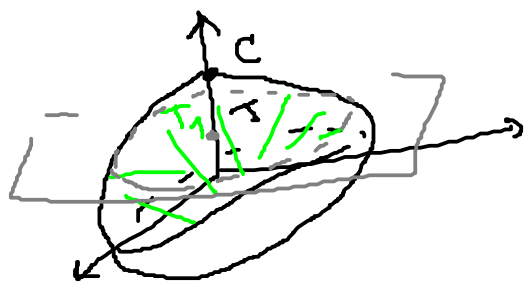
$$\begin{matrix} 0 \leq \theta < 2\pi \\ z < r < \sqrt{az} \end{matrix} = 2\pi \int_z^{\sqrt{az}} r dr = \pi (az - z^2)$$

$$\det J_\varphi = r > 0 \quad \perp \quad -\pi (az - z^2)$$

$$\Rightarrow \text{vol } T = \int_0^a \pi (az - z^2) dz = \pi \cdot \left(\frac{az^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^a = \pi \frac{a^3}{6}$$

③ Определить $\text{vol } T$ ако је T огран са

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^4}{c^4} \leq 1, \quad a, b, c > 0.$$



T је ротационо тело,

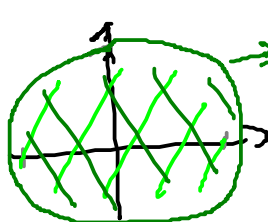
$$\text{и важи } \text{vol } T = 2 \text{vol } T_1$$

где је T_1 огранено са

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^4}{c^4} \leq 1 \quad \text{и} \quad z \geq 0$$

приметимо $0 \leq z \leq c$.

T_1 пресечено са равни $z = h$, $0 \leq h \leq c$.



$$D_2: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 - \frac{h^4}{c^4}$$

$$1 - \frac{z^4}{c^4}$$

$$\text{vol } T_1 = \iiint_{T_1} dx dy dz = \int_0^1 \left(\iint_{D_z} dx dy \right) dz$$

$$\iint_{D_z} dx dy = \begin{cases} \text{смена: } x = ar \cos \theta \\ y = br \sin \theta \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq \theta < 2\pi \\ 0 \leq r \leq \sqrt{1 - \frac{z^4}{c^4}} \end{matrix}$$

$$J_\varphi = \begin{bmatrix} a \cos \theta & -ar \sin \theta \\ b \sin \theta & br \cos \theta \end{bmatrix}$$

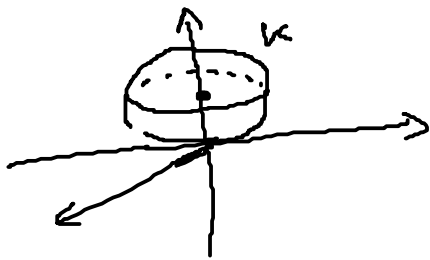
$$\det J_\varphi = ab r > 0$$

$$= ab \int_0^{\sqrt{1 - \frac{z^4}{c^4}}} r \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) dr = \pi ab \left(1 - \frac{z^4}{c^4} \right)$$

$$\Rightarrow \text{vol } T_1 = \int_0^c \pi ab \left(1 - \frac{z^4}{c^4} \right) dz = \pi abc - \frac{\pi abc}{5} = \frac{4}{5} \pi abc.$$

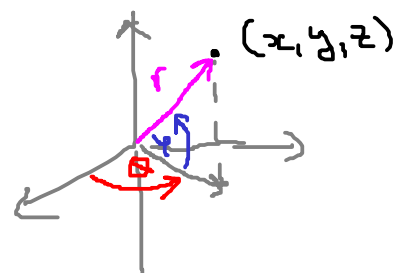
④ Изобразим $\iiint_K \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$, $K: x^2 + y^2 + z^2 \leq z$.

$$x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$$



сферические коорд:

$$\phi: \begin{cases} x = r \cos \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \cos \varphi \\ z = r \sin \varphi \end{cases}$$



Како $z \geq 0 \Rightarrow \varphi \in (0, \pi/2)$

$\theta \in (0, 2\pi)$

$r \in ?$

из уравнения $x^2 + y^2 + z^2 \leq z \Rightarrow r^2 \leq r \sin \varphi$

$$J_\phi = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \cos \varphi & -r \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \varphi & 0 & r \cos \varphi \end{bmatrix} \leq r \leq \sin \varphi$$

$$\det J_\phi = \sin \varphi \cdot r^2 \cos \varphi \sin \varphi + r \cos \varphi \cdot r \cos^2 \varphi =$$

$$= r^2 \cos \varphi > 0$$

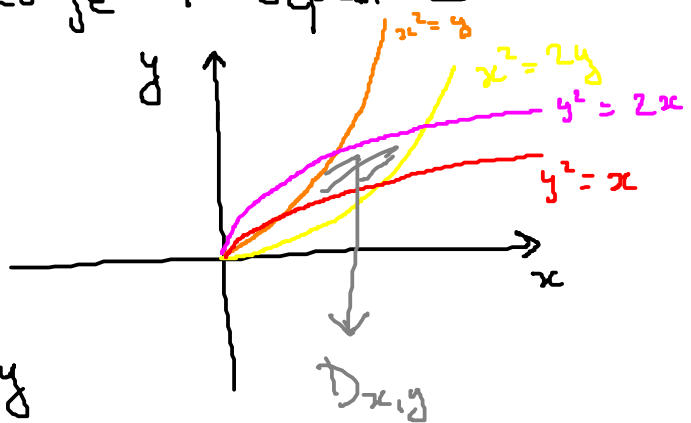
$$\Rightarrow \iiint_K \underbrace{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}_{r^2} dx dy dz = \text{смена} \iiint_{K_{r,\theta,\varphi}} \underbrace{r \cdot r^2 \cos \varphi}_{|\det J_\varphi|} dr d\theta d\varphi$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sin \varphi} r^3 \cos \varphi dr \right) d\theta \right) d\varphi \\ &\downarrow \\ &\text{Границе за } r \\ &\text{зависе од параметра } \varphi! \\ &\text{димензиона редослед} \\ &\text{интеграције, односно} \\ &\text{прво интегралимо по } r, \\ &\text{а након тога по } \varphi! \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{2\pi} d\theta \cdot \frac{\sin^4 \varphi \cos \varphi}{4} \right) d\varphi \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^4 \varphi \cos \varphi d\varphi \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 t^4 dt = \frac{\pi}{10} \end{aligned}$$

⑤ Израчунајте vol T, ако је T огран са

$$\begin{aligned} z=0 \\ z=xy \\ x^2=y \\ x^2=2y \\ y^2=2x \\ y^2=x \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} &D_{x,y} \rightarrow x,y > 0 \\ &\Downarrow \\ &0 \leq z \leq xy \end{aligned} \right\}$$



$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D_{x,y}, 0 \leq z \leq xy\}$$

$$\text{vol } T = \iiint_{D_{x,y}} xy \, dx dy$$

Кавалијерцијев принцип

$$\begin{aligned} D_{x,y}: \quad y \leq x^2 \leq 2y &\rightarrow 1 \leq \frac{x^2}{y} \leq 2 \Rightarrow \varphi: \quad u = \frac{x^2}{y}, \quad 1 \leq u \leq 2 \\ x \leq y^2 \leq 2x &\rightarrow 1 \leq \frac{y^2}{x} \leq 2 \quad v = \frac{y^2}{x}, \quad 1 \leq v \leq 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi: \quad y &= \sqrt[3]{u^2 v}, \quad x = \sqrt[3]{u v^2} \\ J_\varphi &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} u^{-2/3} v^{2/3} & \frac{2}{3} v^{-1/3} u^{1/3} \\ \frac{2}{3} u^{-1/3} v^{1/3} & \frac{1}{3} u^{2/3} v^{-2/3} \end{bmatrix} \quad \det J_\varphi = \frac{1}{9} - \frac{4}{9} = -\frac{1}{3} < 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \iint_{D_{xy}} xy \, dx \, dy = \int_1^2 \left(\int_1^2 uv \cdot \frac{1}{3} \, du \right) dv = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \right) = \frac{3}{4} \cdot |\det J_\varphi|$$

Несвојствени интеграл

$\int_E f(x) dx$ је несвојствен ако f није деф на рубу скупа E или ако је E неограничен.

Примери: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$, $E = [0, 1]$ огран, али $\frac{1}{\sqrt{x}}$ није деф за $x=0$.
 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$, $E = (1, +\infty)$ није ограничен.

• $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$. $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ је разлајање скупа E њг
 $E_n \subset E_{n+1} \subset E$ за $\forall n \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = E$,

$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} f(x) dx$ у $\mathbb{R}$ и овај лимес не зависи ог
 разлајања $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$, онда $\int_E f(x) dx$ конвертира
 и $\int_E f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} f(x) dx$.

• Ако постоји бар једно разлајање $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ скупа E
 њг $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} f(x) dx$ не постоји или је ∞ , онда $\int_E f(x) dx$ дивер.

Ако постоје разлајања $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ скупа E њг
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} f(x) dx \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{D_n} f(x) dx$, онда $\int_E f(x) dx$ дивертира.

① $f: E \rightarrow [0, +\infty)$ (или $(-\infty, 0]$) и $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} f(x) dx$ конв

за бар једно разлајање $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$\Rightarrow \int_E f(x) dx$ конвертира и $\int_E f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} f(x) dx$.

① Да ли $\iint_{\mathbb{R}^2} \sin(x^2 + y^2) dx dy$ конвертира?

—
 узмемо разлајање $A_n = B(0, r_n)$ њг је $0 < r_n < r_{n+1}$

и $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = +\infty$.

Тада $A_n \subset A_{n+1} \subset \mathbb{R}^2$ и $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}^2$.

$$\iint_{A_n} \sin(x^2+y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_n} \sin(r^2) r dr d\theta$$

$$\det J_\tau = r > 0 \quad \downarrow$$

$$= \int_0^{r_n} \left(\int_0^{2\pi} \sin r^2 \cdot r \, d\theta \right) dr = 2\pi \int_0^{r_n} \sin r^2 \cdot r \, dr$$
$$= \pi \cdot \left(1 - \cos r_n^2 \right)$$

Примећимо да за $r_n = \sqrt{2n\pi}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{A_n} \sinh(x^2 y^2) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi \left(1 - \cos \frac{2n\pi}{1} \right) = 0$$

$$a \quad 3a \quad r_n = \sqrt{2n\pi + \pi/2} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{A_n} \sin(x^2 + y^2) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi \left(1 - \cos \left(2n\pi + \frac{\pi}{2} \right) \right) = \pi$$

$\Rightarrow$ интеграл сублимация!

(2) Удѣлилъ конв и одр. кад конв. инѡефра

$$I = \int \int \int_{(0,1)^3} \frac{dx dy dz}{x^p y^q z^r}$$

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 y^2 z^2} \geq 0 \quad \text{ha } [0, 1]^3$$

$\Rightarrow$ глобално поимање једног разлагања области $E = \{0, 1\}^3$.

$E_n = (\frac{1}{n}, 1)^3$ je jedno razlozajne od E .

$$P_{x,y,z} \neq 1: \iiint_{E_n} \frac{dx dy dz}{x^p y^q z^r} = \int_{1/n}^1 \frac{dx}{x^p} \cdot \int_{1/n}^1 \frac{dy}{y^q} \cdot \int_{1/n}^1 \frac{dz}{z^r} =$$

$$= \underbrace{(1-p)(1-q)(1-r) \cdot \left(1 - \frac{1}{n^{1-p}}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{n^{1-q}}\right) \left(1 - \frac{1}{n^{1-r}}\right)}_{g_{p,q,r}(n)}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} g_{p,q,r}(n)$ постоји у $\mathbb{R}$ ако и
 $p, q, r < 1$.

и тада $\lim_{n \rightarrow \infty} g_{p,q,r}(n) = (1-p)(1-q)(1-r)$.

ако један од p, q, r једнак 1 слично се проверава
 да ли конвертира.

③ $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = ?$

Нека је $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = A$.

онда је $A^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy$

$$\text{фигурира} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

$$= \begin{matrix} \text{Гмена} & x = r \cos \theta & 0 \leq \theta < 2\pi \\ \varphi: & y = r \sin \theta & 0 < r < +\infty \end{matrix}$$

$$\det J_{\varphi} = r > 0$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{2\pi} e^{-r^2} \cdot r d\theta \right) dr = \pi \int_0^{+\infty} e^{-r^2} \cdot r dr = \pi \cdot \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \pi$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{\pi}.$$

④ Определить ρ за koje

$$I_n = \int_{B(0,1)^c} \frac{dx}{\|x\|^\rho} \text{ конвертира, ако је}$$

$$B(0,1)^c = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \geq 1\}$$

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

• ако је $n=2 \rightarrow$ полярне коорд. $\varphi: \begin{matrix} x_1 = r \cos \theta \\ x_2 = r \sin \theta \end{matrix}$

$n=3$ сферне $\begin{matrix} x_1 = r \cos \theta \cos \varphi \\ x_2 = r \sin \theta \cos \varphi \\ x_3 = r \sin \varphi \end{matrix}$

за $n \in \mathbb{N}$ одговарајуће сферне у $\mathbb{R}^n$:

$$\varphi: \begin{matrix} x_1 = r \cos \theta_1 \cos \theta_2 \dots \cos \theta_{n-1} \\ x_2 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2 \dots \cos \theta_{n-1} \\ x_3 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \cos \theta_{n-1} \\ \vdots \\ x_n = r \sin \theta_{n-1} \end{matrix}$$

$$\det J_\varphi = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial r} & \frac{\partial x_n}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \theta_{n-1}} \end{vmatrix} = \underbrace{r^{n-1}}_{\substack{\text{из ових} \\ \text{колона} \\ \text{може} \\ \text{од групе} \\ \text{изгубити} \\ \text{само } r}} \cdot \underbrace{\det A}_{\substack{\text{само } \theta_j \\ \text{се од} \\ \cos \text{ и } \sin.}}$$

↓
појављују се само $\cos$ и $\sin$

↓
појављује се једно r и $\cos$ и $\sin$

$$\Rightarrow \int_{B(0,1)^c} \frac{dx}{\|x\|^\rho} = \text{смена} = \int_1^{+\infty} \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{r^\rho} \cdot r^{n-1} |\det A| d\theta_1 \dots d\theta_{n-1} \right) dr$$

$\det A$ је ограничено.

$$= \underbrace{\int_0^{2\pi} |\det A| d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{n-1}}_{\text{о́гран}}$$

$$\cdot \underbrace{\int_1^{+\infty} r^{n-1-p} dr}_{\text{конб.}}$$

ако $n-1-p < -1$

$$\boxed{n < p}.$$