

1. Naći ekstremume i ispitati monotonost funkcije $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$.

DOMEN:

$$x^2 - 4 \neq 0$$

$$x^2 - 2^2 \neq 0$$

$$(x-2)(x+2) \neq 0$$

$$x \neq 2 \text{ i } x \neq -2$$

$$D = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$$

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{x^2-4}\right)' = \frac{3x^2 \cdot (x^2-4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2 \cdot (x^2-12)}{(x^2-4)^2}$$

Ekstremum: mora da važi $f'(x) = 0$.

$$\frac{x^2 \cdot (x^2-12)}{(x^2-4)^2} = 0$$

$$x^2 \cdot (x^2-12) = 0$$

$$x^2 = 0, x^2 - 12 = 0$$

$$x = 0, x = \sqrt{12}, x = -\sqrt{12}$$

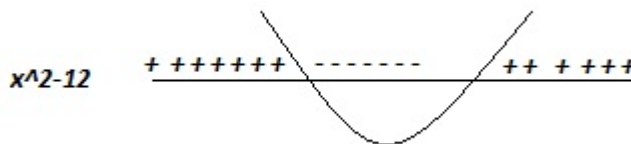
$$x = 0, x = 2\sqrt{3}, x = -2\sqrt{3}$$

Sve tri tačke pripadaju domenu f-je. Dakle, imamo 3 **kandidata** za ekstremum.

To da li su kandidati zaista ekstremumi ćemo ispitati preko pravila I, odnosno gledamo znak funkcije $f'(x)$.

Imenilac u razlomku f-je $f'(x)$ je $(x^2-4)^2 > 0$ uvek, dakle gledamo samo da li se i kada menja znak brojioca, $x^2(x^2-12)$.

$x^2 \geq 0$ za svako $x \in D$, dakle gledamo samo kako se menja znak x^2-12 .



Dakle konačno,

$f'(x) > 0$ za $x \in (-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}, +\infty)$, odnosno tada f-ja f **raste**

$f'(x) < 0$ za $x \in (-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$, odnosno tada f-ja f **opada**

$f'(x) = 0$ za $x = 0, x = -2\sqrt{3}, x = 2\sqrt{3}$

Još da vidimo koji su od navedenih kandidata zaista ekstremumi. Vidimo iz ispitivanja znaka f-je $f'(x)$ da ona menja znak oko tačke $x = -2\sqrt{3}$ (levo od nje je +++ a posle nje je —), odnosno to je **tačka maksimuma** (jer funkcija raste do te tačke pa od te tačke krene da opada). Slično, tačka $x = 2\sqrt{3}$ je takodje tačka oko koje se menja znak f-je $f'(x)$ (levo je — a desno od nje je +++), pa je to **tačka minimuma**. Odgovarajuće vrednosti minimuma i maksimuma f-je f se dobijaju kada izračunamo $f(-2\sqrt{3})$, odnosno $f(2\sqrt{3})$.

Oko tačke $x = 0$ f-ja $f'(x)$ **ne menja znak**, tako da ona **NIJE** tačka minimuma

ili maksimuma, odnosno nije ekstremum.

2. Naći asimptote f-je $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-3}}$

DOMEN:

Mora:

$$x - 3 \neq 0, \frac{x^3}{x-3} \geq 0$$

$$x \neq 3, \frac{x^3}{x-3} \geq 0$$

x^3 je levo od nule(za x-ove manje od 0) **negativno**, a desno od nule(za x-ove veće od 0) **pozitivno**.

$x - 3$ je levo od 3 **negativno**, a desno od 3 **pozitivno**.

Dakle, $\frac{x^3}{x-3} \geq 0$ za $x \in (-\infty, 0] \cup (3, +\infty)$

D: $x \in (-\infty, 0] \cup (3, +\infty)$

V.A:

$x = 3$ je tačka koja ne pripada domenu, a tačke desno od nje(veće od 3) pripadaju, i ona nam je zbog toga potencijalna vertikalna asimptota.

Gledamo samo desni limes, jer leva strana broja 3(brojevi "malo" manji od 3) ne pripadaju domenu!

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{\frac{x^3}{x-3}} = \sqrt{\frac{3^3}{0^+}} = +\infty$$

Dakle, $x = 3$ je vertikalna asimptota.

K.A:

Tražimo k,n za kosu asimptotu $y = kx + n$.

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-3}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-3}}}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\frac{x^3}{x-3}}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x^2 \cdot (x-3)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x}{x-3}} = \\ &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-3}} = \sqrt{1} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-3}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3} - x\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3} - x\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}} \cdot \frac{\sqrt{x^3} + x}{\sqrt{x^3} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^2(x-3)}{\sqrt{x-3}(\sqrt{x^3} + x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{\sqrt{x-3}(x^{\frac{3}{2}} + x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{\sqrt{x(1 - \frac{3}{x})(x^{\frac{3}{2}}(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}))}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{\sqrt{x} \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{3}{x}} \cdot (1 + \frac{1}{\sqrt{x}})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{3}{x}} \cdot (1 + \frac{1}{\sqrt{x}})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{1 - \frac{3}{x}} \cdot (1 + \frac{1}{\sqrt{x}})} = 3 \end{aligned}$$

Dakle, kosa asimptota je $y = x + 3$, i, usled toga što imamo kosu, nemamo horizontalnu asimptotu!

DOMEN: D: $x > 0$ (zbog logaritma)

$$f'(x) = \ln x + x \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$f'(x) = 0$$

$$\ln x + 1 = 0$$

$$\ln x = -1$$

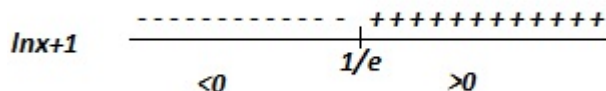
$$x = e^{-1}, \text{ odnosno:}$$

$x = \frac{1}{e}$ je jedini kandidat za ekstremum.

$$f''(x) = (f'(x))' = \frac{1}{x}$$

$f''(\frac{1}{e}) = \frac{1}{\frac{1}{e}} = e > 0$, pa iz pravila II zaključujemo da je $x = \frac{1}{e}$ tačka MINIMUMA f-je f. Minimum je: $f(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e} \cdot \ln(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$.

Što se monotonosti tiče, gledamo $f'(x) = \ln x + 1$. $f'(x) = 0$ za $x = \frac{1}{e}$, i s obzirom da je $\ln x$ rastuća funkcija (za veće x-ove će i $\ln x$ biti veće), zaključujemo:



f raste za $x \in (\frac{1}{e}, +\infty)$
f opada za $x \in (0, \frac{1}{e})$ (ZBOG DOMENA, RADIMO SAMO ZA $x > 0$).

4. Ispitati konveksnost, konkavnost i naći prevojne tačke f-je $f(x) = (x-5)\sqrt[3]{x^2}$.

Domen: $D=R$

$$f(x) = (x - 5)\sqrt[3]{x^2} = x\sqrt[3]{x^2} - 5\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{5}{3}} - 5x^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = (x^{\frac{5}{3}} - 5x^{\frac{2}{3}})' = \frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}-1} - 5\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$f''(x) = \frac{5}{3} \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} - \frac{10}{3} \left(-\frac{1}{3}\right) x^{-\frac{4}{3}}$$

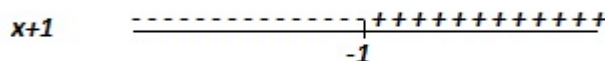
$$f''(x) = \frac{10}{9} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{10}{9} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = \frac{10}{9} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^4} \right) = \frac{10}{9} \frac{x+1}{(\sqrt[3]{x})^4}$$

Za prevojnu tačku mora da važi: $f''(x) = 0$, tj. $x + 1 = 0$, odnosno $x = -1$ je kandidat za prevojnu tačku.

Da bismo zaključili da li jeste prevojna tačka, moramo da ispitamo znak $f''(x)$, tj. da ispitamo kada je f -ja f konveksna i konkavna.

$$f''(x) = \frac{10}{9} \frac{x+1}{(\sqrt[3]{x})^4}$$

Znak f-je f'' ne zavisi od broja $\frac{10}{9}$. Takodje ne zavisi ni od imenioca $(\sqrt[3]{x})^4$ jer je on, zbog stepenovanja parnim brojem (u ovom slucaju stepen je 4), uvek > 0 . Dakle, znak f-je $f''(x)$ zavisi samo od brojioca $x+1$:



Dakle:

$f(x)$ **je konveksna za** $x \in (-1, +\infty)$
 $f(x)$ **je konkavna za** $x \in (-\infty, -1)$
 $x = -1$ jeste prevojna tačka jer se oko nje menja znak f-je $f''(x)$.

5. Skicirati grafik funkcije $f(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$.

Prvo moramo da ispitamo sve po redu, po tačkama koje smo naveli na vežbama.

a) DOMEN:

D: $x - 1 \neq 0$, tj. $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

(NE)PARNOST: $f(-x) = \frac{(-x)^2-2(-x)+2}{(-x)-1} = \frac{x^2+2x+1}{-x-1}$, tako da ne može da bude ni parna ni neparna!

b) ASIMPTOTE:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Dakle, $x = 1$ je vertikalna asimptota.

KOSA A: Tražimo k,n za kosu asimptotu $y = kx + n$.

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2-2x+2}{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-2x+2}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-2x+2}{x^2-x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-2x+2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-2x+2-x(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+2}{x-1} = -1$$

Dakle, K.A. je $y = x - 1$ i prema tome, NEMA horizontalnih asimptota!

c) NULE i ZNAK f-je:

NULE:

$$f(x) = 0$$

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = 0$$

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

Disriminanta $D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4 < 0$, sledi da kvadratna jednačina NEMA rešenja (u skupu realnih brojeva).

Dakle, nema nula, odnosno grafik f-je ne seče x-osu.

ZNAK:

Diskriminanta je negativna i $a = 1 > 0$ (broj uz x^2), pa tada znamo da je kvadratna funkcija uvek iznad x-ose, tj. pozitivna! Tako da znak f-je zavisi samo od imenioca $x - 1$.

$$f(x) < 0 \text{ za } x \in (-\infty, 1)$$

$$f(x) > 0 \text{ za } x \in (1, +\infty)$$

d) Monotonost, ekstremumi:

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} \right)' = \frac{(2x - 2)(x - 1) - (x^2 - 2x + 2) \cdot 1}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} = \frac{x(x - 2)}{(x - 1)^2}$$

Kandidati za ekstremum:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{x(x - 2)}{(x - 1)^2} = 0$$

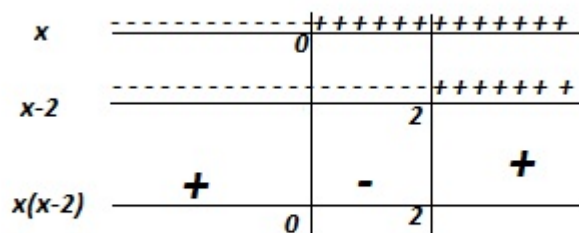
$$x(x - 2) = 0$$

$$x = 0, x = 2$$

Da li su zaista i ekstremumi?

Pravilo I: Znak f-je $f'(x)$ nam treba, odnosno monotonost:

Imenilac u razlomku f-je $f'(x)$, $(x - 1)^2$ je uvek > 0 , tako da znak zavisi samo od brojioca $x(x - 2)$.



Dakle:

$f(x)$ **raste** za $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

$f(x)$ **opada** za $x \in (0, 1) \cup (1, 2)$ (Isključili smo $x = 1$ jer ta tačka ne pripada domenu!)

S obzirom da $f'(x)$ menja znak oko kandidata za ekstremum $x = 0$ i $x = 2$, te tačke će biti ekstremumi, s tim što je $x = 0$ tačka maksimuma, a $x = 2$ tačka minimuma.

e) Konveksnost, konkavnost, prevojne tačke:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \right)' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2(x-1)(x^2-2x+1) - 2(x-1)(x^2-2x)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{2(x-1)(x^2-2x+1-x^2+2x)}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

F-ja $f''(x)$ nikad nije jednaka 0 ni za jedno $x \in D$, dakle nema prevojnih tačaka! Znak f-je $f''(x)$, tj. konveksnost i konkavnost, zavisi samo od znaka $(x-1)^3$, što je isto kao posmatrati znak f-je $x-1$.

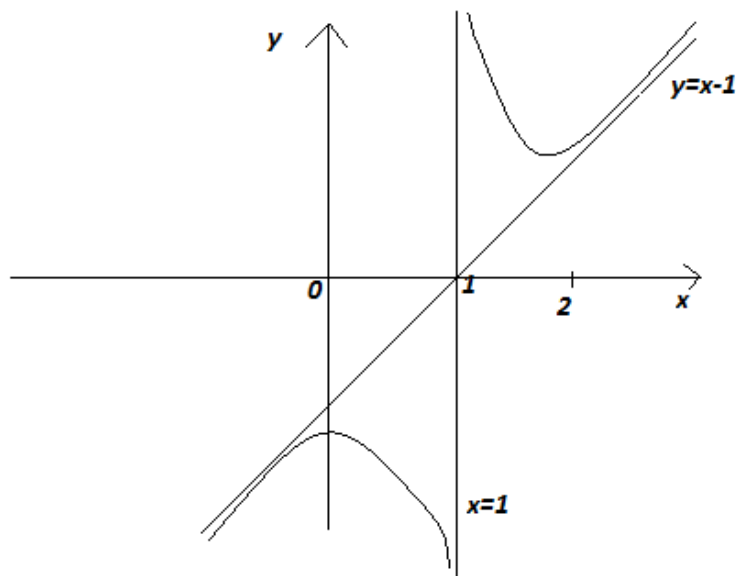
Dakle:

$f''(x) > 0$ (**f konveksna**) **za** $x \in (1, +\infty)$

$f''(x) < 0$ (**f konkavna**) **za** $x \in (-\infty, 1)$

f) Crtanje grafika funkcije:

NAPOMENA: Konveksnost f-je znaci da grafik izgleda kao "srećan smajli bez



očiju" kao što se vidi desno od prave $x = 1$, dok je odraz konkavnosti f-je "tužan

smajli bez očiju" što smo pokazali za $(-\infty, 1)$.

6. Ispitati sve tačke potrebne za crtanje grafika f-je $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x-2}}$

a) DOMEN:

D: $x \neq 2$, odnosno $D = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

Razmislite da li je funkcija parna ili neparna ili nijedno od navedenog!

b) Asimptote:

V.A.:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} x e^{\frac{1}{x-2}} = 2e^{\frac{1}{0^-}} = 2e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} x e^{\frac{1}{x-2}} = 2e^{\frac{1}{0^+}} = 2e^{+\infty} = +\infty$$

Dakle, $x = 2$ je V.A. f-je f.

K.A.:

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^{\frac{1}{x-2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x-2}} = e^0 = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x e^{\frac{1}{x-2}} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{1}{x-2}} - 1) = (\infty \cdot 0)???$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x-2}} - 1}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right), \text{ pa možemo da primenimo Lpitalovo pravilo) =}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \left(-\frac{1}{(x-2)^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 e^{\frac{1}{x-2}}}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{(x-2)^2} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x-2}} = 1 \cdot 1 = 1$$

Dakle, $y = x + 1$ je kosa asimptota, iz čega sledi da nema horizontalnih!

c) NULE i ZNAK f-je:

$$f(x) = 0$$

$$x e^{\frac{1}{x-2}} = 0$$

$$x = 0$$

Funkcija e^x je uvek > 0 , za svako x , tako da znak f-je f zavisi samo od znaka x .

Dakle:

$$f(x) > 0 \text{ za } x \in (0, +\infty)$$

$$f(x) < 0 \text{ za } x \in (-\infty, 0)$$

$$f(x) = 0 \text{ za } x = 0$$

d) Monotonost, ekstremumi:

$$f'(x) = (x e^{\frac{1}{x-2}})' = e^{\frac{1}{x-2}} + x e^{\frac{1}{x-2}} \left(-\frac{1}{(x-2)^2}\right) =$$

$$= e^{\frac{1}{x-2}} \left(1 - \frac{x}{(x-2)^2}\right) = e^{\frac{1}{x-2}} \frac{x^2 - 5x + 4}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = 0$$

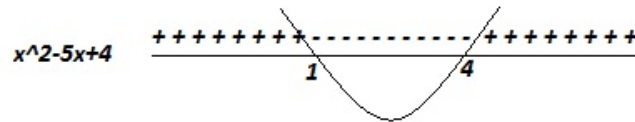
$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2}$$

$$x_1 = 4, x_2 = 1$$

S obzirom da obe tačke pripadaju domenu, ove tačke su kandidati za ekstremum.

Kako je $e^{\frac{1}{x-2}} > 0$ i $(x-2)^2 > 0$, za svako $x \in D$, na znak f-je $f'(x)$, a samim tim i na monotonost, utiče samo $x^2 - 5x + 4$.



Dakle:

$f'(x) > 0$ (f raste) za $x \in (-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$

$f'(x) < 0$ (f opada) za $x \in (1, 2) \cup (2, 4)$ (Isključili smo $x = 2$ jer ne pripada domenu!)

S obzirom da $f'(x)$ menja znak oko kandidata za ekstremum $x = 1$, odnosno $x = 4$, oni će i biti ekstremumi, i to će $x = 1$ biti tačka maksimuma, a $x = 4$ tačka minimuma f-je f.

e) Konveksnost, konkavnost, prevojne tačke:

$$f''(x) = \dots \text{DOMAĆI} = e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \frac{5x-8}{(x-2)^4}$$

$$f''(x) = 0$$

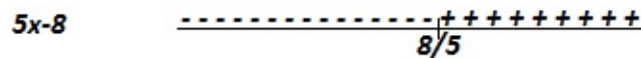
$$e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \frac{5x-8}{(x-2)^4} = 0$$

$$5x-8=0$$

$x = \frac{8}{5}$ je kandidat za prevojnu tačku.

Znak f-je $f''(x)$, što nam ukazuje kada je f konveksna a kada konkavna, zavisi samo od znaka $5x-8$.

Zaključujemo:



Funkcija f je konveksna za $x \in (\frac{8}{5}, 2) \cup (2, +\infty)$

Funkcija f je konkavna za $x \in (-\infty, \frac{8}{5})$

Kako $f''(x)$ menja znak oko kandidata za prevojnu tačku $x = \frac{8}{5}$, ona će i biti prevojna tačka.