

ZADACI:

Rešiti diferencijalne jednačine:

1. $xyy' = 1 - x^2$
2. $(x^2 + y^2)y' - xy = 0$
3. $xy' = y + xe^{\frac{-y}{x}}, y(1) = 0$
4. $(1 + x^2)y' = x(2y + 1)$
5. $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$
6. $xy'' = y'(1 + \ln \frac{y'}{x})$
7. $y'' + (y')^3y = 0$
8. $y'' - 2y' - 3y = x^3e^{5x}\cos(3x)$
9. $y'' + 4y = 5\cos(2x)$
10. $y'' - 7y' + 12y = e^{2x} + x^2$

$$1. \quad y' = \frac{dy}{dx}$$

$$xy \frac{dy}{dx} = 1 - x^2 / : x, \cdot dx$$

$$ydy = \frac{1-x^2}{x} dx \rightarrow \text{j-na koja razdvaja promenljive}$$

$$\int ydy = \int \frac{1-x^2}{x} dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = \int \frac{1}{x} dx - \int x dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = \ln|x| - \frac{1}{2}x^2 + c / \cdot 2$$

$$y^2 = \ln x^2 - x^2 + c_1 (c_1 = 2c)$$

2.

$$(x^2 + y^2)y' = xy / : x^2$$

$$(1 + (\frac{y}{x})^2)y' = \frac{y}{x} \rightarrow \text{homogena, smena } \frac{y}{x} = t, t = t(x), y' = t + xt'$$

$$(1 + t^2)(t + xt') = t$$

$$t + xt' = \frac{t}{1 + t^2}$$

$$xt' = \frac{t}{1 + t^2} - t$$

$$xt' = \frac{-t^3}{1 + t^2}$$

$$t' = \frac{dt}{dx}$$

$$x \frac{dt}{dx} = \frac{-t^3}{1 + t^2} / \cdot dx, : x$$

$$dt = \frac{1}{x} \frac{-t^3}{1 + t^2} dx / : \frac{-t^3}{1 + t^2}$$

$$-\frac{1+t^2}{t^3} dt = \frac{1}{x} dx \rightarrow \text{j-na koja razdvaja prom.}$$

$$-\int \frac{1+t^2}{t^3} dt = \int \frac{1}{x} dx$$

$$-(\int \frac{1}{t^3} dt + \int \frac{1}{t} dt) = \ln|x| + c$$

$$\frac{1}{2t^2} - \ln|t| = \ln|x| + c$$

$$\frac{x^2}{2y^2} - \ln|\frac{y}{x}| = \ln|x| + c$$

$$\ln e^{\frac{x^2}{2y^2}} - \ln|\frac{y}{x}| = \ln|x| + c$$

$$\ln \frac{e^{\frac{x^2}{2y^2}}}{\left|\frac{y}{x}\right|} = \ln |x| + c$$

$$\frac{y}{x} \geq 0$$

$$e^{\ln \frac{e^{\frac{x^2}{2y^2}}}{\left|\frac{y}{x}\right|}} = e^{\ln |x| + c}$$

$$\frac{e^{\frac{x^2}{2y^2}}}{\frac{y}{x}} = |x| \cdot e^c \cdot \frac{y}{x}$$

$$x \geq 0$$

$$e^{\frac{x^2}{2y^2}} = y \cdot c_1 (c_1 = e^c)$$

Nekad se ne može izraziti opšte rešenje kao $y = \dots$, što važi za ovaj slučaj, pa je u redu zaustaviti se ovde. (Ostavlja se čitaocu da pokaže i analizira slučajeve kad je $\frac{y}{x} < 0$ i $x < 0$.)

NAPOMENA: Uobičajenu udžbeničku frazu "ostavlja se čitaocu da pokaže" uglavnom bi trebalo čitati kao "mrzi pisca da pokaže jer nije toliko bitno", što je primenjivo i u ovom slučaju.

3.

$$y' = \frac{y}{x} + e^{-\frac{y}{x}}$$

$$\frac{y}{x} = u, u = u(x)$$

$$y' = u + xu'$$

$$u + xu' = u + e^{-u}$$

$$xu' = e^{-u}$$

$$x \frac{du}{dx} = e^{-u} / \cdot dx, : x, : e^{-u}$$

$$e^u du = \frac{1}{x} dx$$

$$\int e^u du = \int \frac{1}{x} dx$$

$$e^u = \ln |x| + c$$

$$e^{\frac{y}{x}} = \ln |x| + c / \ln$$

$$\frac{y}{x} = \ln (\ln |x| + c)$$

$$y = x \ln (\ln |x| + c)$$

$$y(1) = 0$$

$$0 = 1 \cdot \ln(0 + c)$$

$$\ln c = 0 \rightarrow c = 1$$

$$y = x \ln(\ln|x| + 1)$$

4.I način: Probajte kao j-nu koja razdvaja promenljive!

II način:

$$(1 + x^2)y' - 2xy = x$$

$$y' - \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{x}{1+x^2} \rightarrow \text{linearna dif. jn-a}$$

$$p(x) = -\frac{2x}{1+x^2}, q(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

$$e^{\int p(x)dx} = e^{-2 \int \frac{x}{1+x^2} dx} = e^{-2 \cdot \frac{1}{2} \ln(x^2+1)} = \frac{1}{x^2+1}$$

$$y = (x^2 + 1)(c + \int \frac{x}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx)$$

$$y = (x^2 + 1)(c + \int \frac{x}{(1+x^2)^2} dx)$$

...

$$y = (x^2 + 1)(c + \frac{1}{2}(-\frac{1}{1+x^2}))$$

$$y = -\frac{1}{2} + (x^2 + 1) \cdot c$$

5.

$$y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y} \rightarrow \text{Bernulijeva dif. jn-a}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\text{smena: } u = y^{1-\alpha} = y^{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{y}$$

$$y = u^2, u = u(x)$$

$$y' = 2uu'$$

$$2uu' - \frac{4}{x}u^2 = xu / : 2u$$

$$u' - \frac{2}{x}u = \frac{x}{2}$$

$$\int p(x)dx = \int (-\frac{2}{x})dx = -\ln x^2$$

$$u = e^{\ln x^2}(c + \int \frac{x}{2} \cdot e^{-\ln x^2} dx)$$

$$u = x^2(c + \frac{1}{2}\ln|x|)$$

$$\sqrt{y} = x^2(c + \frac{1}{2}\ln|x|)$$

$$y = (x^2(c + \frac{1}{2}\ln|x|))^2$$

6. Dif. j-na drugog reda gde nedostaje $y \rightarrow$ smena:

$$y' = z, z = z(x)$$

$$y'' = z'$$

$$xz' = z(1 + \ln \frac{z}{x}) / : x$$

$$z' = \frac{z}{x}(1 + \ln \frac{z}{x})$$

$$\text{smena: } \frac{z}{x} = u, u = u(x)$$

$$z' = u + xu'$$

$$u + xu' = u(1 + \ln u)$$

$$xu' = u \ln u$$

$$x \frac{du}{dx} = u \ln u / : dx, : x, : u \ln u$$

$$\frac{du}{u \ln u} = \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{du}{u \ln u} = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln |\ln u| = \ln |x| + c$$

$$\ln |\ln \frac{z}{x}| = \ln |x| + c$$

$$e^{\ln |\ln \frac{z}{x}|} = e^{\ln |x| + c}$$

$$|\ln \frac{z}{x}| = |x| \cdot c_1 (c_1 = e^c)$$

$$\ln \frac{z}{x} \geq 0$$

$$\ln \frac{z}{x} = |x| \cdot c_1$$

$$\frac{z}{x} = e^{|x|c_1}$$

$$z = xe^{|x|c_1}$$

$$(1) \ln \frac{z}{x} < 0$$

$$-\ln \frac{z}{x} = |x| \cdot c_1$$

$$\ln \frac{z}{x} = |x| \cdot (-c_1)$$

$$\frac{z}{x} = e^{|x|(-c_1)}$$

$$z = xe^{|x|(-c_1)}$$

(2) Obuhvatiši rešenja (1) i (2) možemo zapisati rešenje dif. j-ne za funkciju $z(x)$ u obliku $z = xe^{|x| \cdot a}$, gde je $a \in R$.

Sada, kada vratimo smenu, biće:

$$y' = xe^{|x|a}$$

$$y = \int xe^{a|x|} dx$$

Ako je $x \geq 0$ (prepušta se čitaocu da pokaže za slučaj kada je $x < 0$):

$$y = \int xe^{ax} dx$$

Smena:

$$ax = t$$

$$adx = dt$$

$$dx = \frac{dt}{a}$$

$$y = \int \frac{t}{a} e^t \frac{dt}{a}$$

$$y = \frac{1}{a^2} \int te^t dt$$

$$\int te^t dt = \begin{cases} U = t, V' = e^t \\ U' = 1, V = e^t \end{cases} = te^t - \int e^t dt = e^t(t - 1) + d = e^{ax}(ax - 1) + b,$$

gde su $a, b \in R$.

pa je opšte rešenje dif. j-ne:

$$y = \frac{1}{a^2}(e^{ax}(ax - 1) + b)$$

7. Diferencijalna j-na drugog reda u kojoj nedostaje $x \rightarrow$ smena:

$$y' = p, p = p(y) \quad y'' = p'p$$

$$p'p + p^3 y = 0 / : p$$

$$p' = -p^2 y$$

$$\frac{dp}{dy} = -p^2 y / \cdot dy, : p^2$$

$$\frac{dp}{p^2} = -y dy \rightarrow \text{j-na koja razdvaja promenljive}$$

$$\int \frac{dp}{p^2} = - \int y dy$$

$$-\frac{1}{p} = -\frac{1}{2}y^2 + c / \cdot (-1)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{p} &= \frac{1}{2}y^2 - c \\ p &= \frac{1}{\frac{y^2}{2} - c} \\ p &= \frac{2}{y^2 - 2c} \\ p &= \frac{2}{y^2 + c_1} \quad (c_1 = -2c)\end{aligned}$$

Vratimo smenu:

$$\begin{aligned}y' &= \frac{2}{y^2 + c_1} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{2}{y^2 + c_1} \\ (y^2 + c_1)dy &= 2dx \\ \int (y^2 + c_1)dy &= \int 2dx \\ \frac{1}{3}y^3 + c_1y &= 2x + c_2\end{aligned}$$

Može se još malo "srediti" opšte rešenje, ali dovoljno je i ovako.

8. Prvo homogena:

$$\begin{aligned}y'' - 2y' - 3y &= 0 \\ \lambda^2 - 2\lambda - 3 &= 0\end{aligned}$$

Opšte rešenje homogene:

$$y_h = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}$$

, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Partikularno rešenje je sada na redu. Posmatramo desnu stranu jednačine, tj. funkciju $f(x) = x^3 e^{5x} \cos(3x)$. Odmah vidimo da je $\alpha = 5$ i $\beta = 3$. $\alpha + i\beta = 5 + 3i$ nije rešenje karakteristične jednačine, pa je $m = 0$. Broj p je maksimalan stepen polinoma koji se pojavljuje sa desne strane dif. j-ne, s obzirom da imamo jedan jedini polinom stepena 3, $p = 3$. Dakle, partikularno rešenje naše polazne dif. j-ne tražimo u obliku:

$$\begin{aligned}y_p &= x^m e^{\alpha x} (R_p(x) \cos(\beta x) + S_p(x) \sin(\beta x)) = e^{5x} (R_3(x) \cos 3x + S_3(x) \sin 3x) \\ y_p &= e^{5x} ((Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) \cos 3x + (Ex^3 + Fx^2 + Gx + H) \sin 3x)\end{aligned}$$

Preostaje još samo naći brojeve A, B, C, D, E, F, G, H .

Naravno, prepušta se čitaocu da ih pronadje, ali se ne preporučuje, već je ovde jedini cilj pisca bio da objasni kako se traži partikularno rešenje.

9. Karakteristična jednačina:

$$\lambda^2 + 4 = 0, \text{ pa je } \lambda_1 = 2i \text{ i } \lambda_2 = -2i.$$

Rešenje homogene je:

$$y_h = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Što se partikularnog rešenja tiče, posmatrajući funkciju $f(x) = 5 \cos 2x$ vidimo da je $\alpha = 0$ i $\beta = 2$. $0 + 2i = 2i$ jeste rešenje karakteristične jednačine (jednos-truko), pa je $m = 1$. Od polinoma imamo samo broj 5 uz $\cos 2x$, dakle polinom stepena 0, pa je $p = 0$. Dakle,

$$y_p = x^1 e^{0x} (R_0(x) \cos 2x + S_0(x) \sin 2x)$$

$$y_p = x(A \cos 2x + B \sin 2x)$$

Zamenom y_p u polaznu dif. j-nu naći ćemo brojeve A i B.

$$y'_p = A \cos 2x + B \sin 2x + x(-2A \sin 2x + 2B \cos 2x)$$

$$y''_p = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x + (-2A \sin 2x + 2B \cos 2x) + x(-4A \cos 2x - 4B \sin 2x)$$

$$y''_p = (-4A - 4Bx) \sin 2x + (4B - 4Ax) \cos 2x$$

Kada zamenimo y_p i y''_p dobijamo:

$$(-4A - 4Bx) \sin 2x + (4B - 4Ax) \cos 2x + 4 \cdot x(A \cos 2x + B \sin 2x) = 5 \cos 2x$$

$$-4A \sin 2x + 4B \cos 2x = 5 \cos 2x$$

$$-4A = 0$$

$$4B = 5$$

$$\text{pa je } A = 0, B = \frac{5}{4}.$$

Opšte rešenje polazne jednačine je:

$$y = y_h + y_p = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{5}{4}x \sin 2x$$

10. Homogena:

$$\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0, \text{ pa je } \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 4. \text{ Opšte rešenje homogene je } y_h = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Naći ćemo dva partikularna rešenja y_{p_1} i y_{p_2} za jednačine $y'' - 7y' + 12 = e^{2x}$

(1), odnosno $y'' - 7y' + 12y = x^2$, i onda će konačno rešenje biti zbir

$$y = y_h + y_{p1} + y_{p2} \quad (2).$$

(1):

$f(x) = e^{2x} \rightarrow \alpha = 2, \beta = 0, p = 0$. $2 + i0 = 2$ nije rešenje karakt. j-ne, pa je $m = 0$. Dakle, $y_{p1} = Ae^{2x}$.

$$y'_{p1} = 2Ae^{2x}$$

$$y''_{p2} = 4Ae^{2x}$$

Zamenom navedenog u diferencijalnu $y'' - 7y' + 12 = e^{2x}$ i deljenjem sa e^{2x} dobija se da je $A = \frac{1}{2}$, pa je $y_{p1} = \frac{e^{2x}}{2}$.

(2):

$f(x) = x^2 \rightarrow \alpha = 0, \beta = 0, p = 2$. $0 + i0 = 0$ nije rešenje karakt. j-ne, pa je $m = 0$. Dakle, $y_{p2} = Ax^2 + Bx + C$. Koeficijente A,B,C dobijamo kada zamenimo y_{p2} kao i njegove izvode u diferencijalnu jednačinu $y'' - 7y' + 12y = x^2$.

Na kraju se, posle kraćeg računa, dobija da su koeficijenti redom:

$$A = \frac{1}{12}$$

$$B = \frac{7}{72}$$

$$C = \frac{37}{864}$$

Opšte rešenje polazne diferencijalne jednačine je:

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x} + \frac{e^{2x}}{2} + \frac{1}{12}x^2 + \frac{7}{72}x + \frac{37}{864}.$$