БРОЈНИ РЕД је израз облика $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ где је a_n бесконачни бројни низ.

Низ $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ називамо парцијална сума.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + \ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ (хармонијски ред)} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

- **Ред** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **конвергира (дивергира) ако низ парцијалних сума** $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ **конвергира (дивергира)**
- **Ако ред** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **конвергира онда** $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$
- **Ако** $\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$ **онда ред** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **дивергира**

- **Ако ред** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **конвергира онда** $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
- **Ако** $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ **онда ред** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **дивергира**
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overset{1+n-n}{1}}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}\right) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}\right) = \lim_{k\to\infty} \Big(\overbrace{1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}}^{n=1} + \overbrace{\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}}^{n=2} + \overbrace{\cancel{\tfrac{1}{3}} - \cancel{\tfrac{1}{4}}}^{n=3} + \cdots + \overbrace{\cancel{\tfrac{1}{k-1}} - \cancel{\tfrac{1}{k}}}^{n=k-1} + \overbrace{\cancel{\tfrac{1}{k}} - \tfrac{1}{k+1}}^{n=k}\Big) = 1 - \lim_{k\to\infty} \cancelto{0}{\frac{1}{k+1}} = 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} n \Rightarrow \quad a_n = n \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad$ (D)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \begin{cases} \frac{1}{1-a}, & |a| < 1 \\ \text{дивергира}, & |a| \geq 1 \end{cases}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} - \frac{1}{4^0} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1 = \frac{1}{3}$ $\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n-1}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{n} > \ln(1 + \frac{1}{n}) = \ln\frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n$ $\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} > \sum_{n=1}^{\infty} (\ln(n+1) - \ln n) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} (\ln(n+1) - \ln n) =$

(хармонијски ред)
користимо неједнакост $(\forall x > 0)(x > \ln(1+x))$

$= \lim_{k\to\infty} (\cancel{\ln 2} - \ln 1 + \cancel{\ln 3} - \cancel{\ln 2} + \cancel{\ln 4} - \cancel{\ln 3} + \cancel{\ldots} + \cancel{\ln k} - \cancel{\ln(k-1)} + \ln(k+1) - \cancel{\ln k}) = \lim_{k\to\infty} \ln(k+1) = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (D)

- **Критеријум упоређивања 1.**

Ако $(\forall n > n_0)(0 \leq a_n \leq b_n)$ тада

1°ако $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (C) онда и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (C)

2°ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (D) онда и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (D)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

користимо неједнакост $n! \geq 2^{n-1}$ $\quad \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \text{ (C)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$$

користимо неједнакост $(n+1)^2 \geq n(n+1)$ $\Rightarrow \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \text{ (C)}$$

- **Критеријум упоређивања 2.**
  Ако $(\forall n > n_0)(0 \le a_n, b_n)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \neq 0$ тада редови $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ истовремено (C) или (D).
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} (C) & , \quad \alpha > 1 \\ (D) & , \quad \alpha \le 1 \end{cases}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n})$ $\qquad a_n = \ln(1+\frac{1}{n})$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (D) $\alpha = 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n})$ (D)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^2}$ $\qquad a_n = \sin\frac{1}{n^2}$ $\qquad \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (C) $\alpha = 2 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^2}$ (C)

- **Даламберов критеријум.**

Нека је за $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n>0$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$ онда за $l<1$ ред (C), а за $l>1$ ред (D).

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n+1}\qquad a_n=\frac{3^n}{n+1}\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}}{n+2}}{\frac{3^n}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\cancel{3^n}\cdot(n+1)}{\cancel{3^n}\,(n+2)}=3\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}(1+\frac{1}{n})}{\cancel{n}(1+\frac{2}{n})}=3=\ell>1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n+1}\ \text{(D)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n!}\qquad a_n=\frac{n+2}{n!}\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+3}{(n+1)!}}{\frac{n+2}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}(1+\frac{3}{n})}{\cancel{n}(1+\frac{1}{n})n(1+\frac{2}{n})}=0=\ell<1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n!}\ \text{(C)}$$

$$a\in R\ ,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\qquad a_n=\frac{a^n}{n!}\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a\cdot\cancel{a^n}\cdot\cancel{n!}}{\cancel{a^n}(n+1)\cancel{n!}}=a\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(1+\frac{1}{n})}=0<\ell\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\ \text{(C)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}\qquad a_n=\frac{2^n n!}{n^n}\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\cancel{2^n}\cancel{(n+1)}\cancel{n!}\cdot n^n}{\cancel{2^n}\cdot\cancel{n!}\cdot\cancel{(n+1)}(n+1)^n}=\frac{2}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}=\frac{2}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{2}{e}=\ell<1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}\ \text{(C)}$$

- **Кошијев критеријум.**

Нека је за $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n>0\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$ онда за $l<1$ ред (C), а за $l>1$ ред (D).

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n+1}\qquad a_n=\frac{3^n}{n+1}\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt[n]{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}\ \underbrace{\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}}_{\to 1}}=3>1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n+1}\ \text{(D)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{4n-1}\right)^n\quad a_n=\left(\frac{3n+2}{4n-1}\right)^n\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n+2}{4n-1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{4n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(3+\frac{2}{n}\to 0)}{n(4-\frac{1}{n}\to 0)}=\frac{3}{4}<1\Rightarrow\quad\text{(C)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)^{4-n^2}\quad a_n=\left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)^{4-n^2}\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)^{4-n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2\overset{-1+1}{}}{3n-1}\right)^{\frac{4-n^2}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{3n-1}\right)^{\frac{4-n^2}{n}}=$$

$$=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{3n-1}\right)^{\frac{3n-1}{3}}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{3n-1}\cdot\frac{4-n^2}{n}\right)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2\left(\frac{4}{n^2}-1\right)}{n^2\left(3-\frac{1}{n}\right)}}=e^{-1}<1\Rightarrow\text{(C)}$$

• **Кошијев интегрални критеријум.**

Нека је $f(n)=a_n$ ненегативана монотоно опадајућа функција за $n \geq n_0$.

Тада ред $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ и $\int\limits_{n_0}^{\infty} f(x)dx$ имају исто понашање.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in R$ $\quad a_n = f(n) = \frac{1}{n^\alpha} > 0 \quad f(x)=x^{-\alpha} \quad f'(x) = -\alpha x^{-\alpha-1} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha>0 \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow f(x)\searrow \\ \alpha<0 \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow f(x)\nearrow \text{ (D)} \end{array}$

за $\alpha>0$ $\quad \int\limits_1^{\infty} x^{-\alpha}dx = \lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_1^t x^{-\alpha}dx \quad \begin{cases} \alpha=1 \Rightarrow \lim\limits_{t\to\infty} \ln|x| \Big|_1^t = \lim\limits_{t\to\infty} \ln t = \infty \text{ (D)} \\ \alpha\neq 1 \Rightarrow \lim\limits_{t\to\infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_1^t = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha>1 \text{ (C)} \\ \infty, & \alpha\in(0,1) \text{ (D)} \end{cases} \end{cases}$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{(C)}, & \alpha > 1 \\ \text{(D)}, & \alpha \leq 1 \end{cases}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}$ $\quad a_n = \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \quad f(x) = e^{-x}x^{-\frac{1}{2}} \quad f'(x) = -e^{-x}x^{-\frac{1}{2}} + e^{-x}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2}e^{-x}x^{-3/2}(2x+1) < 0$ за $x \geq 1 \Rightarrow f(x)\searrow \Rightarrow a_n \searrow$

$\int\limits_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx \leq \int\limits_1^{\infty} e^{-x}dx = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{e^{-x}}{-1}\Big|_1^t = \lim\limits_{t\to\infty} \underbrace{-e^{-t}}_{\to 0} + \frac{1}{e} = \frac{1}{e} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n} \text{ (C)} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}} \text{ (C)}$

- **Наизменични бројни редови** су облика $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ или $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} a_n$.
- **Лајбницов критеријум.**

Наизменични ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ је конвергентан уколико је a_n позитиван монотоно опадајући низ за $n > n_0 \in N$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n} \qquad a_n = \frac{1}{n} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad a_n \searrow \;\Rightarrow\; \text{(C)}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n} \qquad a_n = \frac{1}{\ln n} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad f(x) = \frac{1}{\ln x} \quad f'(x) = \frac{-\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln^2 x} = -\frac{1}{x\ln^2 x} < 0 \text{ za } x \geq 2 \Rightarrow f(x) \searrow \Rightarrow a_n \searrow \;\Rightarrow\; \text{(C)}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n \ln(\sqrt{2})^n}{n+1} \qquad a_n = \frac{\ln(\sqrt{2})^n}{n+1} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n\ln(\sqrt{2})}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(\sqrt{2})}{1+\cancel{\frac{1}{n}}} = \ln(\sqrt{2}) \;\Rightarrow\; \text{(D)}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n)!} \qquad a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \frac{(n+1)^2 \cancel{n!^2}\, \cancel{(2n)!}}{\cancel{(n!)^2}\, \underset{2}{\cancel{(2n+2)}}(2n+1)\cancel{(2n)!}} = \frac{n+1}{4n+2} < 1 \Rightarrow a_n \searrow \wedge a_n > 0 \Rightarrow a_n \text{ (C)}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{n+1} = a_n \cdot \dfrac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \Rightarrow a_{n+1} = a_n \cdot \dfrac{n+1}{4n+2} \overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} a = a \cdot \dfrac{1}{4} \Rightarrow a = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \end{array}\right\} \text{(C)}$$

- **Апсолутна и условна конвергенција.**
- Ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ је апсолутно конвергентан ако је ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ конвергентан.
- Ако је ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ конвергентан онда је и ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергентан (обрнуто не важи).
- Ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ је условно конвергентан ако је ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергентан а ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ дивергентан.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \qquad \left.\begin{array}{l} A.K.: a_n = \left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \quad \alpha = 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ \text{(D)} \\ K: a_n = \frac{1}{n} \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \quad a_n \searrow \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \ \text{(C)} \end{array}\right\} \text{(U.C)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^n} \qquad A.K.: a_n = \left|(-1)^n \frac{n!}{n^n}\right| = \frac{n!}{n^n} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(n+1)} \cdot \cancel{n!}\, n^n}{\cancel{(n+1)}\, (n+1)^n\, \cancel{n!}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \ \text{(C)} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^n} \ \text{(A.C)}$$

У зависности од $a, p \in R$, испитати апсолутну и условну конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n^2+3n+1)^p}$$

A.K.: $a_n = \left|(-1)^n \frac{1}{(n^2+3n+1)^p}\right| = \frac{1}{(n^2+3n+1)^p}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n^2+3n+1)^p}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^{2p}}}{\frac{1}{n^\alpha}} = 1 \quad \text{за } \alpha = 2p$$

$2p > 1 \Rightarrow p > \frac{1}{2}$ (C)

$p \leq \frac{1}{2}$ (D)

$p \in (-\infty, 0]$ (D)

$p \in (0, \frac{1}{2}]$ (U.C)

$p \in (\frac{1}{2}, \infty)$ (A.C)

K: $a_n = \frac{1}{(n^2+3n+1)^p}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{2p}} = \begin{cases} 0, & 2p > 0 \quad p > 0 \\ 1, & p = 0 \\ \infty, & p < 0 \end{cases} \Bigg\} \text{(D)}$$

$$f(x) = \frac{1}{(x^2+3x+1)^p}$$

$$f'(x) = \frac{-p(x^2+3x+1)^{p-1}(2x+3)}{(x^2+3x+1)^{p \cdot 2}} = \frac{-p(2x+3)}{(x^2+3x+1)^{p+1}} < 0 \quad \text{за } x \geq 1,\ p > 0 \Rightarrow f(x)\downarrow \Rightarrow a_n \downarrow \Rightarrow \text{(C)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n^3+2n)^p}{3n+1}$$

A.K.: $a_n=\left|(-1)^n\frac{(n^3+2n)^p}{3n+1}\right|=\frac{(n^3+2n)^p}{3n+1}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n^3+2n)^p}{3n+1}}{\frac{1}{n^\alpha}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^{3p}}{3n}}{\frac{1}{n^\alpha}}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^{1-3p}}}{\frac{1}{n^\alpha}}=\frac{1}{3}\text{ за } \alpha=1-3p$$

$1-3p>1 \Rightarrow p<0$ (C)

$p\geq 0$ (D)

$p\in(-\infty,0)$ (A.C)

$p\in[0,\frac{1}{3})$ (U.C)

$p\in[\frac{1}{3},\infty)$ (D)

K: $a_n=\frac{(n^3+2n)^p}{3n+1}$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{1-3p}}=\begin{cases}0, & 1-3p>0 \Rightarrow p<\frac{1}{3}\\ 1/3 & p=\frac{1}{3}\\ \infty & p>\frac{1}{3}\end{cases}\ \text{(D)}$$

$$f(x)=\frac{(x^3+2x)^p}{3x+1}$$

$$f'(x)=\frac{p(x^3+2x)^{p-1}(3x^2+2)(3x+1)-(x^3+2x)^p.3}{(3x+1)^2}$$

$$=\frac{(x^3+2x)^{p-1}(9px^3+3px^2+6px+2p-3x^3-6x)}{(3x+1)^2}=$$

$$=\frac{(x^3+2x)^{p-1}(3\overbrace{(3p-1)}^{<0}x^3+3px^2+6(p-1)x+2p)}{(3x+1)^2}<0 \Rightarrow f(x)\downarrow\ \forall x>x_0 \Rightarrow a_n\downarrow \Rightarrow \text{(C)}$$

за $p<\frac{1}{3}$

$$\sum_{n=2}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p \ln\frac{n-1}{n+1} \qquad a_n=\left(\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)^p \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{-1}=\frac{-\ln\frac{n+1}{n-1}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^p} \Rightarrow -\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln\frac{n+1}{n-1}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^p}$$

$$a_n=\frac{\ln\frac{n+1}{n-1}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^p}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\ln\frac{n+1}{n-1}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^p}}{\frac{1}{n^\alpha}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\underbrace{\dfrac{\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right)}{(2\sqrt{n})^p\cdot\frac{2}{n-1}}}_{\to 1}\cdot\frac{2}{n-1}}{\frac{1}{n^\alpha}}=\frac{2}{2^p}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^{\frac{p}{2}+1}}}{\frac{1}{n^\alpha}}\Rightarrow\frac{1}{2^{p-1}}$$

за $\alpha=\frac{p}{2}+1$ $\quad \frac{p}{2}+1>1\Rightarrow p>0$ (C) $\Rightarrow$ (A. C)

$p\leq 0$ (D)

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p+(-1)^n} \qquad p\neq 0$$

$p>0$: A.K.: $a_n=\left|(-1)^n\frac{1}{n^p+(-1)^n}\right|=\frac{1}{n^p+(-1)^n}$ $\quad \alpha=p \quad$ $p\in(0,1]$ (D) $\quad p\in(1,\infty)$ (C)

K.: $a_n=\frac{1}{n^p+(-1)^n}$ $\quad n^p\nearrow \Rightarrow n^p+(-1)^n\nearrow \Rightarrow a_n\searrow$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n=0 \Rightarrow$ (C)

$p<0$: $p=-q,\ q>0$ $\quad a_n=(-1)^n\frac{1}{n^{-q}+(-1)^n}=\frac{n^q}{(-1)^n+n^q}>0$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$ (D)

$$\left.\right\}\begin{cases} p\in(-\infty,0) & \text{(D)}\\ p=0 & \text{РЕД НЕДЕФИНИСАН}\\ p\in(0,1] & \text{(U.C)}\\ p\in(1,\infty) & \text{(A.C)}\end{cases}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{-n}}{\sqrt{n}}, \qquad p > 0 \qquad a_n = \frac{p^{-n}}{\sqrt{n}} > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{p^{-1}}{n^{\cancel{\frac{1}{2n}}}} = \frac{1}{p}$

$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{2x}} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{2x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'H.}{=}} e^{\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2}} = e^0 = 1$

$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{p} < 1 \Rightarrow p > 1 \quad \text{(C)} \\ \frac{1}{p} > 1 \Rightarrow p \in (0,1) \quad \text{(D)} \\ p = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \alpha = \frac{1}{2} \quad \text{(D)} \end{array}\right\} \begin{array}{l} p \in (0,1] \quad \text{(D)} \\ p \in (1,\infty) \quad \text{(A.C)} \end{array}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin^p \frac{\pi}{\sqrt{n}}$$

А.К.: $a_n = \left|(-1)^n \sin^p \frac{\pi}{\sqrt{n}}\right| = \sin^p \frac{\pi}{\sqrt{n}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin^p \frac{\pi}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^{\alpha}}} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^{\alpha/p}}}\right)^p = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{\sqrt{n}} \frac{\pi}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^{\alpha/p}} \frac{\pi}{\sqrt{n}}}\right)^p = \pi^p \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^{1/2}}}{\frac{1}{n^{\alpha/p}}}\right)^p = \pi^p \text{ за } \frac{\alpha}{p} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{p}{2} > 1 \Rightarrow p>2 \text{ (C)}$$

$p \le 2$ (D)

$\sin \frac{\pi}{\sqrt{n}} \ge 0$ зер $\frac{\pi}{\sqrt{n}} \in I, II$

К: $a_n = \sin^p \frac{\pi}{\sqrt{n}}$ $\quad \lim_{n\to\infty} a_n = \left.\begin{cases} 0, & p>0 \\ 1, & p=0 \\ \infty, & p<0 \end{cases}\right\}$ (D)

$f(x) = \sin^p \frac{\pi}{\sqrt{x}}$

$f'(x) = p \sin^{p-1} \frac{\pi}{\sqrt{x}} \cdot \underbrace{\cos \frac{\pi}{\sqrt{x}}}_{>0 \text{ за } x>4} \cdot \left(-\frac{\pi}{2} x^{-3/2}\right) < 0 \Rightarrow a_n \searrow$ за $n > 4$ (C)

$\Rightarrow$ $p \in (-\infty, 0]$ (D)

$p \in (0, 2]$ (У.С.)

$p \in (2, \infty)$ (А.С.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \sin\frac{\pi}{n} \qquad a_n = \frac{1}{n^p}\sin\frac{\pi}{n} \geq 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^p} \sin\frac{\pi}{n} \cdot \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^\alpha} \cdot \frac{\pi}{n}} = \pi \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^{p+1}}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \pi \text{ за } \alpha = p+1 \quad \begin{matrix} p+1>1 \Rightarrow p>0 & (C) \\ p\leq 0 & (D) \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} p>0 & (A.C) \\ p\leq 0 & (D) \end{matrix}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{an^2}}{n}$$

$$A.K.:\ a_n = \left|(-1)^n \frac{e^{an^2}}{n}\right| = \frac{e^{an^2}}{n} \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{an}}{\sqrt[n]{n}} = \begin{cases} 0, & a<0 \quad (C) \\ 1, & a=0 \\ \infty, & a>0 \Rightarrow (D) \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \alpha=1 \quad (D)$$

$$K:\ a_n = \frac{e^{an^2}}{n} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0, & a\leq 0 \\ a>0 & = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{ax^2}}{x} \underset{L.p.}{\overset{\infty/\infty}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{e^{ax^2}\cdot 2ax}{1} = \infty \quad (D) \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{e^{ax^2}}{x},\ a\leq 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{e^{ax^2}\cdot 2ax\cdot x - e^{ax^2}}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{ax^2}(2ax^2-1)}{x^2} < 0 \Rightarrow a_n \searrow \qquad (C) \text{ за } a\leq 0$$

$$\begin{cases} a\in(-\infty,0) & (A.C) \\ a=0 & (U.C) \\ a\in(0,\infty) & (D) \end{cases}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n} \qquad a_n = \frac{1}{n \ln^p n} > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \left.\begin{cases} 0, & p \geq 0 \\ \overset{p<0}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln^{-p} x}{x} = \left(\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^{-\frac{1}{p}}}\right)^{-p} \underset{L.P.}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \left(\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{p} x^{-\frac{1}{p}-1}}\right)^{-p} = \left(\lim\limits_{x\to\infty} -p x^{\frac{1}{p}}\right)^{-p} = 0 \end{cases}\right\} = 0, \ p \in R$$

$$f(x) = \frac{1}{x \ln^p x} \qquad f'(x) = \frac{-(\ln^p x + x \cdot p \ln^{p-1} x \cdot \frac{1}{x})}{x^2 \ln^{2p} x} = \frac{-(\ln x + p)}{x^2 \ln^{p+1} x} < 0 \ \text{за} \ \forall x > x_0$$

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^p x} = \left.\begin{cases} \overset{p=0}{=} \lim\limits_{t\to\infty} \ln|x| \Big|_2^t = \infty \quad \text{(D)} \\ \overset{p\neq 0}{=} \left| \begin{matrix} \ln x = z \\ \frac{1}{x} dx = dz \end{matrix} \right| = \lim\limits_{t\to\infty} \displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln t} \frac{dz}{z^p} = \begin{cases} \overset{p=1}{=} \lim\limits_{t\to\infty} \ln|z| \Big|_{\ln 2}^{\ln t} = \infty \quad \text{(D)} \\ \overset{p\neq 1}{=} \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{z^{-p+1}}{-p+1} \Bigg|_{\ln 2}^{\ln t} = \lim\limits_{t\to\infty} \left(\dfrac{(\ln t)^{1-p}}{1-p} - \dfrac{(\ln 2)^{1-p}}{1-p} \right) = \begin{cases} \infty, & 1-p > 0 \\ \dfrac{(\ln 2)^{1-p}}{p-1}, & 1-p < 0 \end{cases} \end{cases} \end{cases}\right\} \begin{matrix} p \leq 1 \quad \text{(D)} \\ p > 1 \quad \text{(A.C.)} \end{matrix}$$