

REKURENTNE JEDNAČINE

April 5, 2018

1. Rešiti rekurentnu jednačinu $a_{n+2} - 7a_{n+1} + 12a_n - 5 = 0, a_0 = 1, a_1 = 2$.

1) Homogena:

$$a_{n+2} - 7a_{n+1} + 12a_n = 0$$

$$t^2 - 7t + 12 = 0$$

$$t_1 = 4, t_2 = 3$$

$$a_h = c_1 3^n + c_2 2^n$$

2) $f(n) = 5 = P_0(n)$.

Da li je $t=1$ rešenje karakteristične jednačine? Nije, dakle:

$$a_p = Q_0(n) = A, A \in R.$$

Ubacivanjem u polaznu nehomogenu, dobijamo:

$$A - 7A + 12A = 5$$

$$A = \frac{5}{6}$$

$$a_n = a_h + a_p = c_1 3^n + c_2 2^n + \frac{5}{6}$$

Koeficijenti c_1, c_2 :

$$1 = a_0 = c_1 + c_2$$

$$2 = a_1 = 3c_1 + 4c_2 + \frac{5}{6}$$

$$c_1 = -\frac{1}{2}, c_2 = \frac{2}{3}$$

$$a_n = -\frac{1}{2} 3^n + \frac{2}{3} 4^n + \frac{5}{6}.$$

2. Rešiti rekurentnu jednačinu $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n + 2 + 3n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 1$.

1) Homogena:

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$t_1 = 3, t_2 = 1$$

$$a_h = c_1 3^n + c_2$$

2) $f(n) = 2 + 3n = P_0(n)$.

Da li je $t=1$ rešenje karakteristične jednačine? Jeste, i to jednostruko. Dakle, $m = 1$:

$$a_p = n(An + B), A, B \in R.$$

$$(n+2)(An+B) - 4(n+1)(A(n+1)+B) + 3n(An+B) = 2+3n$$

$$An^2 + (2A+B)n + 2B - 4(An^2 + (2A+B)n + A+B) + 3(An^2 + Bn) = 2+3n$$

$$\text{uz } n^2: A - 4A + 3A = 0 \text{ (višak)}$$

$$\text{uz } n^1: B + 2A - 4A - 4(A+B) + 3B = 3$$

$$\text{uz } n^0: 2B - 4(A+B) = 2$$

$$A = -\frac{1}{2}, B = 0.$$

$$a_n = a_h + a_p = c_1 3^n + c_2 - \frac{1}{2}n^2$$

$$1 = a_0 = c_1 + c_2$$

$$1 = a_1 = 3c_1 + c_2 - \frac{1}{2}$$

$$c_1 = \frac{1}{4}, c_2 = \frac{3}{4}.$$

3. Naći opšte rešenje rekurentne jednačine $2a_{n+2} + 3a_{n+1} - 2a_n = n^2 2^n + 2^n$.

$$2a_{n+2} + 3a_{n+1} - 2a_n = (n^2 + 1)2^n.$$

1) Homogena:

$$2a_{n+2} + 3a_{n+1} - 2a_n = 0$$

$$2t^2 + 3t - 2 = 0$$

$$t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = -2$$

$$a_h = c_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + c_2(-2)^n.$$

$$2) f(n) = (n^2 + 1)2^n = P_2(n)2^n.$$

Da li je $t = 2$ rešenje karakteristične jednačine? Nije, dakle:

$$a_p = (An^2 + Bn + C)2^n, A, B, C \in R.$$

$$2(A(n+2)^2 + B(n+2) + C)2^{n+2} + 3(A(n+1)^2 + B(n+1) + C)2^{n+1} - 2(An^2 + Bn + C)2^n = (n^2 + 1)2^n.$$

Deljenjem jednačine sa 2^n dobijamo

$$8(A(n+2)^2 + B(n+2) + C) + 6(A(n+1)^2 + B(n+1) + C) - 2(An^2 + Bn + C) = n^2 + 1.$$

Izjednače se koeficijenti uz odgovarajuće stepene i čitaocu se ostavlja da pokaže da su koeficijenti:

$$A = \frac{1}{12}$$

$$B = -\frac{7}{36}$$

$$C = \frac{29}{54}$$

Takodje, čitaocu preostaje i da zapiše opšte rešenje nehomogene jednačine. Napomena: Uobičajenu udžbeničku frazu "čitaocu se ostavlja da pokaže" bi trebalo shvatiti kao "pisca mrzi da dokaže i/ili iskuca", što je primenljivo i u ovom slučaju.