

Парцијалне диференцијалне једначине

Парцијалне једначине су врста диференцијалних једначина где се појављују парцијални изводи, тј. где је непозната функција више променљивих. Често се појављују у физици јер описују разне појаве које су сложеније од кретања честице (што су описивале обичне ДЈ). Теорија ПДЈ је доста другачија од ОДЈ, две сличне једначине могу да имају потпуно различите технике решавања, нема универзалне теорије као код ОДЈ, не постоје опште теореме о егзистенцији и јединствености решења...

Пример 1. Таласна једначина која описује кретање еластичне жице је

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

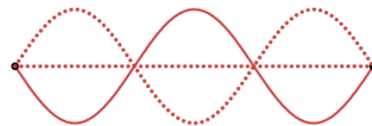
где је непозната функција $u(x, t)$. Код парцијалних једначина постоје почетни услови, као и гранични услови, рецимо ако имамо жицу дужине π којој су фиксирани крајеви, онда је непозната функција u са доменом $[-\pi, \pi] \times \mathbb{R}$ и граничним условима $u(-\pi, t) = 0, u(\pi, t) = 0$. Једно решење ове једначине је $u(x, t) = \cos(at) \cos x$, које описује просто осциловање на смици испод. Општије, решења су све функције $\cos(ant) \cos(nx)$ за било које природно n (слика испод).

Интуиција за таласну једначину: посматрајмо једну тачку на жици, са леве стране једначине је други извод по t , тј. убрзање, а са десне стране је сила. Сила која делује на жицу у датој тачки зависи од тога колико је искривљена, тј. што је више искривљена то ће више тежити да се исправи. Рецимо ако је у датој тачки жица конкавна, други извод је негативан, па ће сила бити усмерена исто у негативном правцу, на доле.

Такође можемо да задамо почетни услов, рецимо $u(x, 0) = \cos x$, $u'(x, 0) = -\sin x$. Видимо да је овде почетни услов функција, јер свака тачка на жици треба да има почетни услов. За неке друге почетне услове, ова једначина може да се реши помоћу основних решења попут оних датих изнад за разне n и Фуријеових редова, тј. да се решења разложи на основна помоћу Фуријеових редова.



(а) Осцилација за $n = 1$



(б) Осцилација за $n = 3$

Ми ћемо се овде бавити једноставнијим парцијалним једначинама, конкретно:

$$\text{квазилинеарна: } \sum a_j(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_j} = b(x_1, \dots, x_n, u),$$

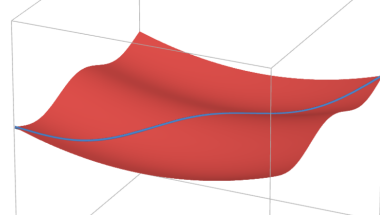
$$\text{линеарна: } \sum a_j(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_j} = b(x_1, \dots, x_n),$$

$$\text{хомогена: } \sum a_j(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0.$$

Дакле непозната је функција $u(x_1, \dots, x_n)$ коју ћемо замишљати као график, тј. као хиперповрш у $\mathbb{R}^{n+1}$, а почетни услов ће бити *фигура* Φ , која је димензије $n - 1$. Почетни услов за таласну једначину је био другачији јер је она другог реда – једначине које ћемо ми радити су првог реда. Дакле као што је за решење диференцијалне једначине, које је једнодимензиона крива, почетни услов тачка, тако ће за парцијалну једначину са непознатом функцијом две променљиве, почетни услов бити крива и.т.д.



(а) Кошијев проблем за ОДЈ



(б) Кошијев проблем за ПДЈ

Слично као што је обична диференцијална једначина $\dot{x} = F(x)$ представљала правац (брзину) који треба да има решење које пролази кроз ту тачку, можемо геометријски да посматрамо ПДЈ дате изнад. За фиксирану тачку $x = (x_1, \dots, x_n)$, бројеви $\frac{\partial u}{\partial x_1}|_x, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}|_x$ одређују тангентну раван на график функције u . Према томе дате ПДЈ ограничавају скуп хиперравни које могу да буду тангентне на график функције u у датој тачки. Боља геометријска аналогија је Фробенијусова теорема о интеграбилности дистрибуција, или системи ПДЈ.

Показаћемо два метода за решавање поменутих типова: метод првих интеграла и метод карактеристика.

Метод првих интеграла

Дефиниција 1. *Први интеграл система n обичних ДЈ је функција $E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ која је константна дуж трајекторија система, тј. ако је $\gamma(t)$ решење, $E(\gamma(t)) = \text{const.}$*

Ако је дата квазилинеарна једначина

$$\sum a_j u_{x_j} = b, \tag{1}$$

можемо да направимо систем обичних диференцијалних једначина (сада привремено посматрамо $x_1, \dots, x_n, u$ као функције времена):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_1, \\ &\dots \\ \dot{x}_n &= a_n, \\ \dot{u} &= b.\end{aligned}\tag{2}$$

Идеја је да сада нађемо n независних¹ првих интеграла за овај систем, па ће решења једначине (1) бити хиперповрши

$$\varphi(E_1, \dots, E_n) = c$$

за $c \in \mathbb{R}$. Константа c наравно зависи од почетних услова.

Задатак 1. *Решити ПДЈ*

$$yu_x - xu_y = 0, \quad u(t, t) = t^4.$$

¹Функционално независних, рецимо ако је $E_1(x, y) = x^2 + y^2$ први интеграл, не можемо за други први интеграл да узмемо $E_2(x, y) = (x^2 + y^2)^2$.

Решење: Добијамо систем ОДЈ

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x \\ \dot{u} &= 0.\end{aligned}$$

Одмах видимо да је $u = \text{const}$, па је $E_1(x, y, u) = u$ један први интеграл. u ће увек бити први интеграл код хомогених ПДЈ.

Други први интеграл можемо да потражимо овако: пошто треба да важи $E_2(x(t), y(t), u(t)) = \text{const}$, тј. $\frac{d}{dt}E_2(x(t), y(t), u(t)) = 0$, треба да важи:

$$\frac{\partial E_2}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial E_2}{\partial u} \dot{u} = \frac{\partial E_2}{\partial x} \cdot y + \frac{\partial E_2}{\partial y} \cdot (-x) + 0 = 0,$$

па одавде видимо да можемо да узмемо

$$\frac{\partial E_2}{\partial x} = x, \quad \frac{\partial E_2}{\partial y} = y.$$

Одавде добијамо $E_2(x, y, u) = (x^2 + y^2)/2 + \text{const}$, па можемо да узмемо само $E_2(x, y, u) = x^2 + y^2$ јер су ове функције зависне. Да је било рецимо $E_2(x, y, u) = (x^2 + y^2)/2 + x + \text{const}$, не бисмо могли да урадимо исто, могли бисмо само да склонимо const . Наравно, прве интеграле можете да нађете и на неки други начин ако вам падне на памет.

Сада је решење ПДЈ површ $\varphi(E_1, E_2) = 0$ за неку функцију φ , и њу добијамо из почетних услова:

$$\varphi(u, x^2 + y^2) = \varphi(t^4, 2t^2) = 0,$$

па можемо да узмемо $\varphi(a, b) = a - b^2/4$, и одавде је

$$u(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)^2}{4}.$$

Опет, пошто је у хомогеној ПДЈ функција $E_1(x, y, u)$ увек први интеграл, можемо да тражимо решење и у облику $u = \varphi_1(E_2, \dots, E_n)$.

Задатак 2. Решити ПДЈ

$$(y^2 + u^2)u_x + 2xyu_y = 2xu.$$

Решење: Овај задатак је задат без почетних услова, тако да ћемо на крају добити опште решење.

Поново направимо систем:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y^2 + u^2 \\ \dot{y} &= 2xy \\ \dot{u} &= 2xu.\end{aligned}$$

Напишимо и следећу једначину да бисмо лакше нашли прве интеграле:

$$\frac{\partial E}{\partial x}(y^2 + u^2) + \frac{\partial E}{\partial y}2xy + \frac{\partial E}{\partial u}2xu = 0.$$

Можемо за E_1 да узмемо

$$\frac{\partial E_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial E_1}{\partial y} = \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial E_1}{\partial u} = -\frac{1}{u}.$$

Одавде добијамо $E_1(x, y, u) = \ln|y| - \ln|u| = \ln|y/u|$, па можемо да узмемо само $E_1(x, y, u) = y/u$.

За E_2 можемо да узмемо

$$\frac{\partial E_2}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial E_2}{\partial y} = -y, \quad \frac{\partial E_2}{\partial u} = -u,$$

па добијамо $E_2(x, y, u) = 2x^2 - y^2 - u^2$ (после множења са 2).

Пошто смо нашли довољно првих интеграла, опште решење ПДЈ је

$$\varphi\left(\frac{y}{u}, 2x^2 - y^2 - u^2\right) = 0$$

за неку функцију φ .

У следећим задацима треба наћи два прва интеграла, трећи је свакако $E_3(x, y, u) = u$, па ће решење бити $u = \varphi(E_1, E_2)$.

Задатак 3. Решити ПДЈ

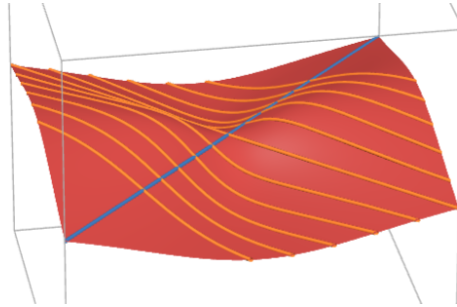
$$(4y - 3z)u_x + (4x - 2z)u_y + (2y - 3x)u_z = 0, \quad u(x, y, 1) = (x + 2)^2 - (y + 3)^2.$$

Задатак 4. Решити ПДЈ

$$x(y^2 - z^2)u_x - y(x^2 + z^2)u_y + z(x^2 + y^2)u_z = 0, \quad u(1, y, z) = (y + z)^2.$$

Метод карактеристика

Идеја овог метода је да добијемо график функције u тако што за сваку тачку из почетног услова (тј. на фигури Φ) решимо систем (2) и добијемо криву која припада графику, па ће сам график бити просто унија свих тих кривих. Пошто ћемо радити



Фигуре 3: Метод карактеристика

само са функцијама две променљиве, фигура Φ ће бити крива $\gamma(s)$, и њу ћемо звати карактеристика.

Пошто се и код метода карактеристика и метода првих интеграла прво формира систем ОДЈ, када добијете парцијалну једначину, свакако прво направите систем и после процените који метод више одговара.

Покажимо овај метод на примеру:

Задатак 5. *Решити ПДЈ*

$$u_x + u_y + 2u = 1 + u^2, \quad u(\sin x, x + x^2) = x.$$

Решење: Почетни услов са десне стране је крива и можемо да је параметризујемо са

$$\gamma(s) = (\sin s, s + s^2, s).$$

Систем ОДЈ који се добија из (2) је:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 1 \\ \dot{y} &= 1 \\ \dot{u} &= (u - 1)^2,\end{aligned}$$

и лако се решава: $x(t) = t + c_1$, $y(t) = t + c_2$, $u(t) = \frac{t+c_3-1}{t+c_3}$. Константе $c_{1,2,3}$ зависе од почетних услова, а ми ћемо да наместимо да тачке са карактеристике $\gamma(s)$ буду почетни услови, тј. да за фиксирано s буде $(x(0), y(0), u(0)) = \gamma(s)$. Дакле имамо:

$$\begin{aligned}x(0) &= c_1 = \sin s \\ y(0) &= c_2 = s + s^2 \\ u(0) &= \frac{c_3 - 1}{c_3} = s \implies c_3 = \frac{1}{1 - s}.\end{aligned}$$

Убацавањем ових почетних услова добијамо параметризацију површи која је график функције u :

$$\Gamma(u) = \left\{ \left(t + \sin s, t + s + s^2, \frac{t + \frac{s}{1-s}}{t + \frac{1}{1-s}} \right) \right\}.$$

Овде је компликовано изразити u преко x, y и није обавезно, битно је добити u на неки начин.

Задатак 6. Решити ПДЈ

$$(y + u)u_x + yu_y = x - y, \quad u(x, 1) = x + 1.$$