



1. б) [3п] Дате су тачке $A(2, -3, 4)$, $B(1, 2, -1)$ и $C(3, -2, 1)$.

Израчунати површину $\triangle ABC$, као и меру угла α код темена A .

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 5 & -5 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \|(-10, -8, -6)\|$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{100 + 64 + 36} = \frac{1}{2} \sqrt{200} = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{\|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AC}\|} = \frac{-1 + 5 + 15}{\sqrt{1+25+25} \sqrt{1+1+9}} = \frac{19}{\sqrt{51} \cdot \sqrt{11}} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{19}{\sqrt{51} \cdot \sqrt{11}}$$

2. [10п] У зависности од реалног параметра $a \in \mathbb{R}$ решити систем једначина:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ -ax + y + 4z = 2 \\ 6x + 2y + (2-a)z = 7. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -a & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 2-a \end{vmatrix} = -(a-3)(a+4), \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 2-a \end{vmatrix} = 3-a$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -a & 2 & 4 \\ 6 & 7 & 2-a \end{vmatrix} = -3(a-3)(a+4), \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -a & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 7 \end{vmatrix} = a-3$$

1) $a \neq 3, a \neq -4 \Rightarrow \Delta \neq 0 \xrightarrow{\text{КРАМЕР}} \text{бесконечно решења}$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{1}{a+4}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 3, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-1}{a+4}$$

2) $a = -4 \Rightarrow \Delta = 0$ али $\Delta_x = 7 \neq 0 \Rightarrow \text{нема решења}$

3) $a = 3 \Rightarrow \Delta = 0 = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z$

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ -3x + y + 4z = 2 \\ 6x + 2y - z = 7 \end{cases} \xrightarrow{\text{row operations}} \begin{cases} x + y + z = 3 \\ -4x + 3z = -1 \\ 4x - 3z = 1 \end{cases} \Rightarrow z = \alpha \Rightarrow x = \frac{3\alpha + 1}{4}, y = 3 - \frac{3}{4}\alpha - \frac{1}{4} - \alpha = \frac{11}{4} - \frac{7}{4}\alpha$$

$\Rightarrow \text{бесконечно решења } (x, y, z) = \left(\frac{3\alpha + 1}{4}, \frac{11 - 7\alpha}{4}, \alpha \right), \alpha \in \mathbb{R}$

3. Дати су векторски потпростори

$$U = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} A^T \right\}$$

и

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a + 2b = 0 \right\}.$$

а) [6п] Одредити базу и димензију за U и W .

б) [4п] Испитати да ли је $U \oplus W = M_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b = a+c \\ 2a-b = c+d \\ c+d = -2a+b \\ 2c-d = -2c+d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2a \\ c = 0, d = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow U = \left\{ \begin{bmatrix} a & 2a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{L} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right), \dim U = 1$$

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} -2b & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid b, c, d \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{L} \left(\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right), \dim W = 3$$

⑥ $U \cap W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid \begin{matrix} b=2a, c=0 \\ a=-2b, d=0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow \dim U \cap W = 0$
 $\Rightarrow \dim U + W = \dim U + \dim W - \dim U \cap W = 1 + 3 - 0 = 4 = \dim M_2(\mathbb{R})$
 $\Rightarrow \boxed{U \oplus W = M_2(\mathbb{R})}$

4. [10п] Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A .

Испитати да ли је A дијагоналног типа и ако јесте наћи инвертибилну матрицу P и дијагоналну D такве да је $D = P^{-1}AP$.

$\Delta \varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$
 $\Rightarrow \mu_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$
 $\lambda_1=1 \quad \lambda_2=2 \quad \lambda_3=3$
 $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow -2b+2c=0 \Rightarrow b=c \Rightarrow a=0 \Rightarrow \boxed{U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$
 $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow -a-2b+2c=0 \Rightarrow -b+c=0 \Rightarrow b=c \Rightarrow a=0 \Rightarrow \boxed{U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$
 $\begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow -2a-2b+2c=0 \Rightarrow b=c \Rightarrow a=c, b=0 \Rightarrow \boxed{U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$
 $\Rightarrow \boxed{D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}$
 $\boxed{P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$

5. Дате су тачка $Q(-4, 1, 1)$, права $p: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$ и раван $\alpha: 2x + y - 3z + 2026 = 0$.

а) [4п] Одредити једначину праве n која садржи тачку Q и нормална је на раван α .

б) [6п] Одредити једначину праве q која садржи Q , сече праву p и паралелна је са α .

Δ а) н т.д. $Q(-4, 1, 1) \in n$, $n \perp \alpha: 2x + y - 3z + 2025 = 0$
 $\Rightarrow \vec{n} = \vec{n}_\alpha = (2, 1, -3)$

$\Rightarrow \boxed{n: \frac{x+4}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-3}}$

б) q т.д. $Q \in q$, $q \parallel \alpha$, q сече p

Објашњено на три начина на часу, урадићу на II начин
 а затим и на I начин.

II НАЧИН

$x = 3t + 1$
 $p: y = 2t + 2, z = t + 3, t \in \mathbb{R} \Rightarrow P(3t+1, 2t+2, t+3) \in p$ произв.

$q = PQ \Rightarrow Q \in q, P \in q \Rightarrow q$ сече p

$q \parallel \alpha \Rightarrow \vec{n}_\alpha \perp \vec{q} = \vec{PQ} = (-5-3t, -1-2t, -2-t)$

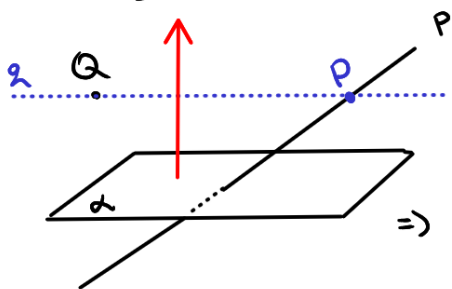
$\Rightarrow \vec{n}_\alpha \circ \vec{PQ} = 0$

$\Rightarrow -10 - 6t - 1 - 2t + 6 + 3t = 0$

$-5t - 5 = 0 \Rightarrow t = -1$

$\Rightarrow P(-2, 0, 2) \Rightarrow \vec{PQ} = (-2, 1, -1)$

$\Rightarrow \boxed{q: \frac{x+4}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}}$



I НАЧИН

$$q: \frac{x+4}{a} = \frac{y-1}{b} = \frac{z-1}{c}$$

$$1) q \parallel \alpha \Rightarrow \vec{n}_\alpha \cdot \vec{q} = 0 \Rightarrow 2a + b - 3c = 0$$

$$2) q \text{ сече } P \Rightarrow [\vec{q}, \vec{P}, \vec{PQ}] = 0$$

$$P(1,2,3) \in P \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 2 & 1 \\ -5 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -3a + b + 7c = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + b - 3c = 0 \\ -3a + b + 7c = 0 \end{cases} \xrightarrow{-1} \begin{cases} 2a + b - 3c = 0 \\ -5a + 10c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -2a + 3c \\ a = 2c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{q} = (2c, -c, c) \parallel (2, -1, 1) \Rightarrow q: \frac{x+4}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$$

6. [10п] Нека је $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ линеарно пресликавање такво да је

$$L(\underbrace{1, -1, 1}_{=a_1}) = (\underbrace{0, 2, 1}_{=b_1}), \quad L(\underbrace{2, 0, 3}_{=a_2}) = (\underbrace{-2, 13, 3}_{=b_2}), \quad L(\underbrace{-1, 2, 0}_{=a_3}) = (\underbrace{-2, 5, -1}_{=b_3}).$$

Наћи формулу за $L(x, y, z)$ а затим одредити бар по једну базу за $\text{Ker } L$ и $\text{Im } L$.

$$\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{лин. нез} \Rightarrow \text{чине базу } \mathbb{R}^3$$

$\Rightarrow \exists$ јед. лин. L која испуњава услов

$$(x, y, z) = \alpha(1, -1, 1) + \beta(2, 0, 3) + \gamma(-1, 2, 0)$$

$$\alpha + 2\beta - \gamma = x \rightarrow \alpha - \frac{2}{3}\alpha + \frac{2}{3}z - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}y = x \Rightarrow \alpha = -6x - 3y + 4z$$

$$-\alpha + 2\gamma = y \Rightarrow \gamma = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}y \Rightarrow \gamma = -3x - y + 2z$$

$$\alpha + 3\beta = z \Rightarrow \beta = -\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3}z \Rightarrow \beta = 2x + y - z$$

$$L(x, y, z) \stackrel{\text{лин.}}{=} \alpha L(1, -1, 1) + \beta L(2, 0, 3) + \gamma L(-1, 2, 0)$$

$$= (-6x - 3y + 4z) \cdot (0, 2, 1) + (2x + y - z) \cdot (-2, 13, 3) + (-3x - y + 2z) \cdot (-2, 5, -1)$$

$$= (2x - 2z, -x + 2y + 5z, 3x + y - z)$$

$$L(x, y, z) = (2x - 2z, -x + 2y + 5z, 3x + y - z)$$

$$\text{Ker } L = \{ (x, y, z) \mid L(x, y, z) = 0 \} = \{ (x, -2x, x) \mid x \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R} \cdot (1, -2, 1)$$

$$\begin{cases} 2x - 2z = 0 \\ -x + 2y + 5z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ -7x + 7z = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -3x + z = -2x$$

$$\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 2x - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = x$$

$$\dim \text{Ker } L = 1$$

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}(a_1, a_2, a_3) \Rightarrow \text{Im } L = \mathbb{R}(b_1, b_2, b_3)$$

$$\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 13 & 3 \\ -2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Im } L = \mathbb{R}(b_3, b_2)$$

$$\dim \text{Im } L = 2$$