



1. б) [3п] Дате су тачке $A(2, -3, 4)$, $B(1, 2, -1)$ и $C(3, -2, 1)$.

Израчунати површину $\triangle ABC$, као и меру угла α код теме A .

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 5 & -5 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \|-10, -8, -6\|$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{100 + 64 + 36} = \frac{1}{2} \sqrt{200} = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{\|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AC}\|} = \frac{-1 + 5 + 15}{\sqrt{1+25+25} \sqrt{1+1+9}} = \frac{19}{\sqrt{51} \cdot \sqrt{11}} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{19}{\sqrt{51} \cdot \sqrt{11}}$$

2. [10п] Нека су U и W векторски потпростори од $\mathbb{R}^4$ дати са

$$U = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid b + c + d = 0\}, \quad W = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a + b = 0, c - 2d = 0\}.$$

$\Rightarrow d = -b - c$ $\Rightarrow b = -a, c = 2d$

Одредити базе и димензије потпростора U , W , $U \cap W$ и $U + W$.

ЗАДАТАК ИЗ РОКА ЈАН 2 2026 ИЗ ЗАМЕНУ М2(Р) СА $\mathbb{R}^4$!

$$U = \{(a, b, c, -b-c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1))$$

$$W = \{(a, -a, 2d, d) \mid a, d \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((1, -1, 0, 0), (0, 0, 2, 1)) \Rightarrow \dim U = 3$$

$$U \cap W = \{(a, b, c, d) \mid b + c + d = 0, b = -a, c = 2d\} = \{(a, -a, 2d, d) \mid a = 3d, c = 2d\} \Rightarrow \dim W = 2$$

$$= \{(3d, -3d, 2d, d) \mid d \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}((3, -3, 2, 1)) \Rightarrow \dim U \cap W = 1$$

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 4 \Rightarrow U + W = \mathbb{R}^4$$

3. [10п] Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 312 \\ 0 & 0 & 1312 \end{bmatrix}$.

Наћи сопствени вектор који одговара најмањој реалној сопственој вредности.

Испитати да ли је A дијагоналног типа и ако јесте наћи инвертибилну матрицу P и дијагоналну D такве да је $D = P^{-1}AP$.

$$\varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 12 \\ 0 & 1-\lambda & 312 \\ 0 & 0 & 1312-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-1312) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1312$$

$$\Rightarrow M_A^1(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-1312) \text{ и } M_A^2(A) = (\lambda-1)^2(\lambda-1312) \neq 0$$

$$M_A^1(A) = (A-E)(A-1312E) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 312 \\ 0 & 0 & 1311 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1311 & 3 & 12 \\ 0 & -1311 & 312 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3933 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \neq 0$$

$$\Rightarrow M_A(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-1312)$$

$\lambda=1$ најмања соп. вредност $\Rightarrow (A-E) \vec{v} = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 312 \\ 0 & 0 & 1311 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3b + 12c = 0 \\ 312c = 0 \\ 1311c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = 0 \\ a \text{ слободна} \end{cases} \Rightarrow E_1 = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

* A није дијаг. типа јер M_A има двоструку нулу ($\Rightarrow \dim E_1 = 1$)

4. [10п] У векторском простору $M_2(\mathbb{R})$ са скаларним производом $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^T A)$ дат је векторски потпростор W са

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid 2a + b + c + 3d = 0, 3a + 2b + 2c + d = 0, a + 2b + 2c - 9d = 0 \right\}.$$

Којем од потпростора W и $W^\perp$ је $A = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ближа?

▲ ! ЗАДАЧАК ИЗ РОКА ЈАН 2 2026 ГЗ ЗАМЕЧУ $\mathbb{R}^4$ СА $M_2(\mathbb{R})$ И ОДГ. СК. ПРОИЗВОД !

$$\begin{aligned} 2a + b + c + 3d &= 0 \\ 3a + 2b + 2c + d &= 0 \\ a + 2b + 2c - 9d &= 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} 2a + b + c + 3d &= 0 \\ -a & \\ -3a & \end{aligned} \quad \begin{aligned} -5d &= 0 \\ -15d &= 0 \end{aligned} \Rightarrow a = -5d$$

$$\Rightarrow W = \left\{ \begin{bmatrix} -5d & 7d-c \\ c & d \end{bmatrix} \mid c, d \in \mathbb{R} \right\} = \underbrace{\left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}}_{F_1} \underbrace{\left\{ \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}}_{F_2}$$

$$A = A_1 + A_2, \quad A_1 \in W, \quad A_2 \in W^\perp$$

$$A = \alpha F_1 + \beta F_2 + A_2 \quad / \circ F_1 / \circ F_2$$

$$\begin{aligned} 3 &= 2\alpha - 7\beta \quad / \cdot 7 \\ -61 &= -7\alpha + 75\beta \quad / \cdot 2 \end{aligned}$$

$$-101 = 101\beta \Rightarrow \boxed{\beta = -1}$$

$$\Rightarrow 2\alpha = -4 \Rightarrow \boxed{\alpha = -2}$$

$$\Rightarrow A_1 = -2F_1 - F_2 = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = A - A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

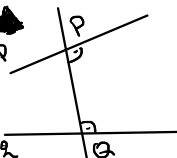
$$d(A, W) = \|A_2\| = \sqrt{\langle A_2, A_2 \rangle} = \sqrt{\text{tr} \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \right)} = \sqrt{5 + 10} = \sqrt{15}$$

$$d(A, W^\perp) = \|A_1\| = \sqrt{\langle A_1, A_1 \rangle} = \sqrt{\text{tr} \left(\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \right)} = \sqrt{29 + 26} = \sqrt{55}$$

$$\sqrt{15} < \sqrt{55} \Rightarrow \boxed{A \text{ је ближа } W}$$

5. [10п] Дате су праве $p: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+1}{-1}$ и $q: \frac{x-2}{-2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{2}$.

Одредити једначину заједничке нормале, као и растојање мимоилазних права p и q .

▲  $P(t+1, 2, -t-1) \in p$ произв, $Q(-2\lambda+2, -\lambda+3, 2\lambda) \in q$ произв
 $\Rightarrow \vec{PQ} = (-2\lambda - t + 1, -\lambda + 1, 2\lambda + t + 1) = \vec{n}, \quad \vec{p} = (1, 0, -1), \quad \vec{q} = (-2, -1, 2)$

1) $\vec{PQ} \cdot \vec{p} = 0 \Rightarrow -2\lambda - t + 1 - 2\lambda - t - 1 = 0 \Rightarrow -4\lambda - 2t = 0 \Rightarrow \boxed{t = -2\lambda}$

2) $\vec{PQ} \cdot \vec{q} = 0 \Rightarrow 4\lambda + 2t - 2 + \lambda - 1 + 4\lambda + 2t + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{9\lambda + 4t = 1}$

$\Rightarrow P(-1, 2, 1), Q(0, 2, 2), \vec{PQ} = (1, 0, 1) \Rightarrow \boxed{\lambda = 1 \Rightarrow t = -2}$

$\Rightarrow \boxed{n = PQ: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-1}{1}}, \quad \boxed{d(p, q) = \|\vec{PQ}\| = \sqrt{2}}$

6. а) [6п] Нека је $A \in M_n(\mathbb{R})$ инвертибилна матрица. Доказати да је $\det(\text{adj } A) = (\det A)^{n-1}$.

б) [4п] Нека су $A, B \in M_{2027}(\mathbb{R})$ такве да је $\det A = 29$ и $\det B = 6$. Израчунати $\det(\text{adj}(B^{-1}A))$.

▲ а) A инвертибилна $\Rightarrow \exists A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj}(A) \Rightarrow \text{adj } A = (\det A) \cdot A^{-1}$
 $\det(\text{adj } A) = \det \left(\underbrace{(\det A)}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{A^{-1}}_{\in M_n(\mathbb{R})} \right) \stackrel{\text{Бине-Коши}}{=} (\det A)^n \cdot \det(A^{-1}) = \frac{(\det A)^n}{\det A} = (\det A)^{n-1}$

б) $K \in \mathbb{R}, B \in M_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \det(KB) = K^n \cdot \det B$

в) $\det A \neq 0, \det B \neq 0 \Rightarrow A, B$ инвертибилне $\Rightarrow B^{-1} \cdot A$ инвертиб.

$$\det(\text{adj}(B^{-1}A)) \stackrel{\text{а)}}{=} \det(B^{-1}A)^{2026} \stackrel{\text{Бине-Коши}}{=} (\det(B^{-1}) \cdot \det A)^{2026}$$

$$= \left(\frac{1}{\det B} \cdot \det A \right)^{2026} = \left(\frac{\det A}{\det B} \right)^{2026} = \left(\frac{29}{6} \right)^{2026}$$

ДАТУМ ИСПИТА 😊