

Линеарна алгебра и аналитичка геометрија

ЈУН 1 - 29.06.2026. године

Групе вежби: 1И2А, 1И2Б и 1И2В

Време рада: 180 мин. Срећно!



Пре израде задатака, на вежбанци **ОБАВЕЗНО** попунити назив предмета, име и презиме, број индекса (број досијеа) као и име асистента код кога сте распоређени на Хипатији (у пољу задатак прегледао)! Остала поља не морате попуњавати.

1. Дефинисати следеће појмове (а–д):

- а) [1п] сума векторских простора U и W ;
- б) [1п] линеарно пресликавање $L : U \rightarrow W$;
- в) [2п] језгро и слика, ранг и дефект линеарног пресликавања $L : U \rightarrow W$;
- г) [1п] скаларни производ на векторском простору V ;
- д) [2п] Доказати да сличне матрице имају исти карактеристични полином;
- ђ) [3п] Дате су тачке $A(2, -3, 4)$, $B(1, 2, -1)$ и $C(3, -2, 1)$.

Израчунати површину $\triangle ABC$, као и меру угла α код темена A .

2. [10п] Нека су U и W векторски потпростори од $\mathbb{R}^4$ дати са

$$U = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid b + c + d = 0\}, \quad W = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a + b = 0, c - 2d = 0\}.$$

Одредити базе и димензије потпростора U , W , $U \cap W$ и $U + W$.

3. [10п] Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 312 \\ 0 & 0 & 1312 \end{bmatrix}$.

Наћи сопствени вектор који одговара најмањој реалној сопственој вредности.

Испитати да ли је A дијагоналног типа и ако јесте наћи инвертибилну матрицу P и дијагоналну D такве да је $D = P^{-1}AP$.

4. [10п] У векторском простору $M_2(\mathbb{R})$ са скаларним производом $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^T A)$ дат је векторски потпростор W са

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid 2a + b + c + 3d = 0, \quad 3a + 2b + 2c + d = 0, \quad a + 2b + 2c - 9d = 0 \right\}.$$

Којем од потпростора W и $W^\perp$ је $A = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ближа?

5. [10п] Дате су праве $p : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+1}{-1}$ и $q : \frac{x-2}{-2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{2}$.

Одредити једначину заједничке нормале, као и растојање мимоилазних правих p и q .

6. а) [6п] Нека је $A \in M_n(\mathbb{R})$ инвертибилна матрица. Доказати да је $\det(\text{adj } A) = (\det A)^{n-1}$.
б) [4п] Нека су $A, B \in M_{2027}(\mathbb{R})$ такве да је $\det A = 29$ и $\det B = 6$. Израчунати $\det(\text{adj}(B^{-1}A))$.