

Аналитичка геометрија - поправни колоквијум (27.6.2026.)

Презиме и име

Индекс

Ток

Поени

/

30

Обавезно прочитати!

У току теста није дозвољено коришћење литературе, телефона, окретање, а све врсте покушаја варања биће ригорозно санкционисане. Решења задатака су реални бројеви које треба уписати у за то предвиђене кућице. Поени предвиђени за задатак (3 по задатку) освајају се уколико су све кућице у оквиру тог задатка исправно попуњене уз тачан поступак решавања. Уколико кућице нису исправно попуњене, тачан поступак решавања носиће део поена.

Време предвиђено за рад је 90 минута! Срећан рад!

Нека је T тежиште тетраедра $ABCD$, а S тежиште троугла ABT . Тада је

$$\vec{ST} = \boxed{-\frac{1}{6}} \vec{BA} + \boxed{\frac{1}{6}} \vec{BC} + \boxed{\frac{1}{6}} \vec{BD}.$$

Поступак:

$$T \text{ тежиште } ABCD \Rightarrow \vec{BT} = \frac{1}{4} (\vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BD}) = \frac{1}{4} (\vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BD}) \quad (1n)$$

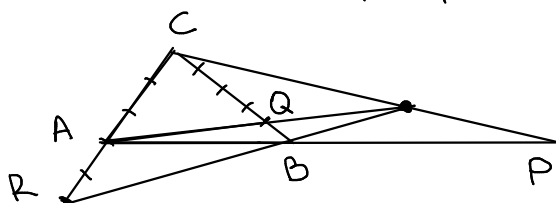
$$S \text{ тежиште } ABT \Rightarrow \vec{BS} = \frac{1}{3} (\vec{BA} + \vec{BT}) = \frac{1}{3} (\vec{BA} + \vec{BT}) \quad (1n)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{ST} &= \vec{ST} = \vec{SB} + \vec{BT} = -\frac{1}{3} (\vec{BA} + \vec{BT}) + \vec{BT} = -\frac{1}{3} \vec{BA} + \frac{2}{3} \vec{BT} \\ &= -\frac{1}{3} \vec{BA} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} (\vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BD}) \\ &= -\frac{1}{3} \vec{BA} + \frac{1}{6} \vec{BA} + \frac{1}{6} \vec{BC} + \frac{1}{6} \vec{BD} \\ &= \boxed{-\frac{1}{6} \vec{BA} + \frac{1}{6} \vec{BC} + \frac{1}{6} \vec{BD}} \quad (1n) \end{aligned}$$

Нека је ABC троугао, а P, Q и R тачке на правима AB, BC и AC , редом, такве да се праве AQ, BR и CP секу у једној тачки и да је $\vec{QC} = 4\vec{BQ}$ и $\vec{CR} : \vec{AR} = 5 : 2$. Ако је $\|\vec{AB}\| = 33$, тада је

$$\|\vec{BP}\| = \boxed{55}.$$

Поступак:



ΔABC
 AQ, BR, CP конк.

$$\xrightarrow{\text{Чеба}} \left(\frac{\vec{AR}}{\vec{RC}} \right) \cdot \left(\frac{\vec{CQ}}{\vec{QB}} \right) \cdot \frac{\vec{BP}}{\vec{PA}} = 1 \quad (1n)$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{BP}}{\vec{PA}} = -\frac{5}{8} \Rightarrow \vec{BP} = \frac{5}{8} \vec{AP} \Rightarrow \vec{AP} = \frac{8}{5} \vec{BP}$$

$$\vec{BP} = \vec{BA} + \vec{AP} = \vec{BA} + \frac{8}{5} \vec{BP} \Rightarrow \frac{3}{5} \vec{BP} = -\vec{BA}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{BP} = \frac{5}{3} \vec{BA}} \Rightarrow \|\vec{BP}\| = \frac{5}{3} \|\vec{AB}\| = \frac{5}{3} \cdot 33 = \boxed{55} \quad (1n)$$

Ако је $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2026$, тада је

$$\vec{a} \times ((\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{b}) = \boxed{0} \vec{b} - \boxed{2026} \vec{b} \times \vec{a}. \quad (1\text{п})$$

Поступак:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{b} = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{b}) \vec{a} = 2026 \vec{b} - \|\vec{b}\|^2 \vec{a} \quad (1\text{п})$$

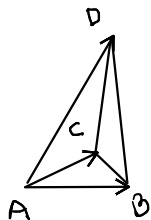
$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{a} \times ((\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{b}) &= \vec{a} \times (2026 \vec{b} - \|\vec{b}\|^2 \vec{a}) \\ &= 2026 \vec{a} \times \vec{b} - \|\vec{b}\|^2 \underbrace{\vec{a} \times \vec{a}}_{=0} \\ &= \boxed{-2026 \vec{b} \times \vec{a}} \quad (1\text{п}) \end{aligned}$$

Нека су $A(-4, -2, -2)$, $B(0, 0, -1)$, $C(0, -1, 0)$ и $S(2, -4, 0)$ четири тачке. Ако је S средиште дужи AD , тада су координате тачке D и запремина тетраедра $ABCD$:

$$D(\boxed{8}, \boxed{-6}, \boxed{2}), \quad V = \boxed{6}.$$

Поступак:

S средиште $AD \Rightarrow A(-4, -2, -2), S(2, -4, 0) \Rightarrow \boxed{D(8, -6, 2)}$
 АРИТМЕТИЧКИ НИЗ КООРД. или $[S] = \frac{[A] + [D]}{2}$ (1п)



$$\vec{AB} = (4, 2, 1), \quad \vec{AC} = (0, -1, 1), \quad \vec{AD} = (12, -4, 4) \quad (1\text{п})$$

$$V = \frac{1}{6} |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]| = \frac{1}{6} |36| = \boxed{6} \quad (1\text{п})$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 12 & -4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -1 \\ 12 & -4 \end{vmatrix} = 16 + 48 - 16 - 12 + 32 - 32 = \boxed{36}$$

Дате су координате тачака $A(1, -1)$, $B(0, 3)$ и $C(-2, 0)$ у односу на афини репер Oxy у равни. У односу на нови афини репер $O'x'y'$ те исте тачке имају координате $A(2, -3)$, $B(1, 0)$ и $C(0, -4)$. Веза координата (x, y) произвољне тачке T у реперу Oxy и координата (x', y') те исте тачке у новом реперу $O'x'y'$ је:

$$\begin{aligned} 7x &= \boxed{10} x' + \boxed{1} y' - \boxed{10}, \\ 7y &= \boxed{-7} x' + \boxed{7} y' + \boxed{28}. \end{aligned}$$

Поступак:

ВЕЗА КООРД. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \quad (1\text{п})$

$$A \mapsto A': \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \Rightarrow \textcircled{1} 2a - 3b + e = 1, \textcircled{2} 2c - 3d + f = -1$$

$$B \mapsto B': \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \Rightarrow \textcircled{3} a + e = 0, \textcircled{4} c + f = 3$$

$$C \mapsto C': \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \Rightarrow \textcircled{5} -4b + e = -2, \textcircled{6} -4d + f = 0$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow e = 4b - 2 \Rightarrow \boxed{e = -10/7}$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow a = -e = 2 - 4b \Rightarrow \boxed{a = 10/7}$$

$$\textcircled{3} \Rightarrow 4 - 8b - 3b + 4b - 2 = 1 \Rightarrow -7b = -1 \Rightarrow \boxed{b = 1/7} \quad (1\text{п})$$

$$\textcircled{6} \Rightarrow f = 4d \Rightarrow \boxed{f = 4}$$

$$\textcircled{4} \Rightarrow c = 3 - 4d \Rightarrow \boxed{c = -1}$$

$$\textcircled{5} \Rightarrow 6 - 8d - 3d + 4d = -1 \Rightarrow -7d = -7 \Rightarrow \boxed{d = 1}$$

Наставак:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10/7 & 1/7 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10/7 \\ 4 \end{bmatrix} /$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x &= \frac{10}{7} x' + \frac{1}{7} y' - \frac{10}{7} \quad / \cdot 7 \\ y &= -x' + y' + 4 \quad / \cdot 7 \end{aligned} \quad \text{због кривича}$$

$$\begin{aligned} 7x &= 10x' + y' - 10 \\ 7y &= -7x' + 7y' + 28 \end{aligned}$$

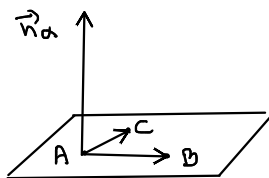
(1п)

Угао између праве $p: x = y, z = 2$ и равни α која садржи тачке $A(0, -4, 0)$, $B(1, -1, 0)$ и $C(-1, 0, 2)$ једнак је

$$\arcsin \frac{4\sqrt{178}}{178}$$

Поступак:

$$p: \begin{aligned} x &= t \\ y &= t, t \in \mathbb{R} \\ z &= 2 \end{aligned} \Rightarrow \vec{p} = (1, 1, 0) \quad (1п)$$



$$\vec{n}_\alpha = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (6, -2, 7) \quad (1п)$$

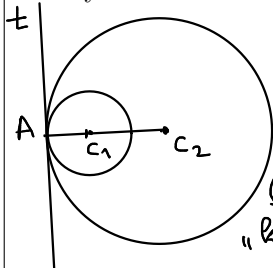
$$\sin \angle(p, \alpha) = \frac{|\vec{p} \cdot \vec{n}_\alpha|}{\|\vec{p}\| \cdot \|\vec{n}_\alpha\|} = \frac{|6 - 2 + 0|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{89}} = \frac{4}{\sqrt{178}} = \frac{4\sqrt{178}}{178}$$

$$\Rightarrow \angle(p, \alpha) = \arcsin \frac{4\sqrt{178}}{178} \quad (1п)$$

Једина заједничка тангента t кругова $k_1: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ и $k_2: x^2 + y^2 - 2x + 2y = 7$ има једначину

$$t: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{0}$$

Поступак:



$$\begin{aligned} k_1: (x-1)^2 + (y-1)^2 &= 1 \Rightarrow C_1(1, 1), r_1 = 1 \\ k_2: (x-1)^2 + (y+1)^2 &= 9 \Rightarrow C_2(1, -1), r_2 = 3 \end{aligned}$$

Очигледно t садржи пресеичну тачку k_1 и k_2
и $t \perp C_1C_2$.

$$"k_2 - k_1" \Rightarrow (y+1)^2 - (y-1)^2 = 8$$

$$y^2 + 2y + 1 - y^2 + 2y - 1 = 8 \Rightarrow 4y = 8 \Rightarrow y = 2$$

$$k_1 \Rightarrow (x-1)^2 + 1 = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow A(1, 2) \quad (1п)$$

$$\vec{C_1C_2} = (0, -2), t \perp C_1C_2 \Rightarrow \vec{t} = (2, 0) \quad (1п)$$

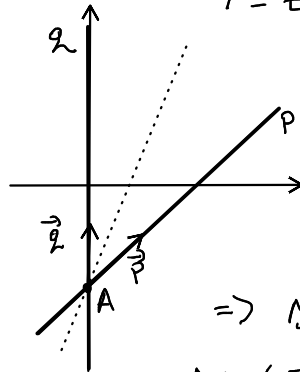
$$\Rightarrow t: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{0} \quad (1п)$$

Једначина симетрале s оштрих углова које граде праве $p: x = t, y = t - 4, t \in \mathbb{R}$ и $q: \frac{x}{0} = \frac{y+1}{3}$ у равни је

$$s: (\sqrt{2}+1)x - \boxed{1}y - \boxed{4} = 0.$$

Поступак:

$$p: \begin{cases} x = t \\ y = t - 4 \end{cases} \Rightarrow \underline{p: y = x - 4} \quad q: \frac{x}{0} = \frac{y+1}{3} \Rightarrow \underline{q: x = 0}$$



$$1) p \cap q: \begin{cases} y = x - 4 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -4 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{A(0, -4)} \quad (1п)$$

$$2) \vec{p} = (1, 1), \vec{q} = (0, 1) \quad (\text{са слике видимо мањи угао})$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{p}}{\|\vec{p}\|} + \frac{\vec{q}}{\|\vec{q}\|} = \frac{(1, 1)}{\sqrt{2}} + \frac{(0, 1)}{1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right) \quad (1п)$$

$$\parallel (1, 1 + \sqrt{2})$$

$$\Rightarrow \Delta: \frac{x}{1} = \frac{y+4}{\sqrt{2}+1}$$

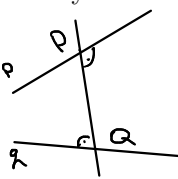
$$\Delta: (\sqrt{2}+1)x = y+4 \Rightarrow \underline{\Delta: (\sqrt{2}+1)x - y - 4 = 0} \quad (1п)$$

Координате пресечне тачке P праве $p: \frac{x-3}{1} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-13}{-1}$ и њене заједничке нормале са правом $q: \frac{x+4}{7} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-9}{3}$ су

$$\frac{z-4}{-3}!$$

$$P(\boxed{7}, \boxed{3}, \boxed{9}).$$

Поступак:



$$P(t+3, 2t-5, -t+13) \in p \text{ произв, } \vec{p} = (1, 2, -1)$$

$$Q(7\Delta-4, -2\Delta+3, -3\Delta+4) \in q \text{ произв, } \vec{q} = (7, -2, -3)$$

$$\Rightarrow \vec{PQ} = (7\Delta-t-7, -2\Delta-2t+8, -3\Delta+t-9) \quad (1п)$$

$$1) \vec{PQ} \cdot \vec{p} = 0 \Rightarrow 7\Delta-t-7-4\Delta-4t+16+3\Delta-t+9=0$$

$$\Rightarrow \underline{6\Delta-6t+18=0} \quad /:3 \Rightarrow \underline{\Delta=t-3}$$

$$2) \vec{PQ} \cdot \vec{q} = 0 \Rightarrow 49\Delta-7t-49+4\Delta+4t-16+9\Delta-3t+27=0$$

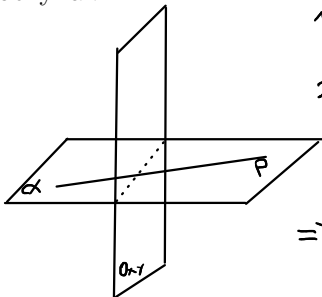
$$\Rightarrow \underline{62\Delta-6t-38=0} \quad (1п) \Rightarrow \underline{P(7, 3, 9)}$$

$$1) 2) \Rightarrow 62t-186-6t-38=0 \Rightarrow 56t=224 \Rightarrow \underline{t=4} \quad (1п)$$

Једначина равни α која садржи праву $p: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-1}$ и нормална је на раван Oxy је

$$\alpha: \boxed{2}x + \boxed{1}y + \boxed{0}z + 1 = 0.$$

Поступак:



$$1) \underline{P(-1, 1, 1) \in p \subset \alpha} \quad \checkmark \quad (1п)$$

$$2) p \subset \alpha \Rightarrow \vec{n}_\alpha \perp \vec{p} = (1, -2, -1) \quad (1п)$$

$$3) \alpha \perp O_{xy}: z=0 \Rightarrow \vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_{O_{xy}} = (0, 0, 1)$$

$$\Rightarrow \vec{n}_\alpha = \vec{p} \times \vec{n}_{O_{xy}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \underline{(-2, -1, 0)}$$

$$\Rightarrow \alpha: -2(x+1) - 1 \cdot (y-1) + 0 \cdot (z-1) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha: -2x - y - 1 = 0 \quad /: -1 \Rightarrow \underline{\alpha: 2x + y + 1 = 0} \quad (1п)$$