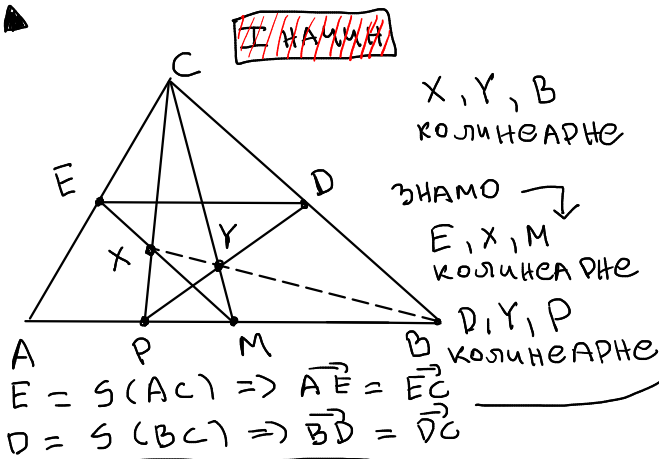




1. Нека су M , D и E редом средишта страница AB , BC и CA троугла $\triangle ABC$. Тачка P се налази на дужи AM . Праве EM и CP секу се у X , а праве DP и CM секу се у Y . Доказати да су X, Y, B колинеарне. [9 поена]



X, Y, B
колинеарне

знамо $\rightarrow$
 E, X, M
колинеарне

D, Y, P
колинеарне

$$E = S(AC) \Rightarrow \vec{AE} = \vec{EC}$$

$$D = S(BC) \Rightarrow \vec{BD} = \vec{DC}$$

$$\vec{PB} = \beta \vec{BM}$$

$$\Rightarrow \vec{MP} = \vec{MB} + \vec{BP} = -\frac{1}{\beta} \vec{PB} - \vec{PB}$$

$$\vec{MP} = \frac{-1-\beta}{\beta} \vec{PB} \quad (2)$$

$$M \text{ средиште } AB \Rightarrow \vec{AM} = \vec{MB}$$

$$\Rightarrow \beta \vec{MA} = \vec{PB} = \vec{PA} + \vec{AB} = \vec{PA} + 2\vec{AM}$$

$$\Rightarrow \vec{PA} = (\beta+2)\vec{MA}$$

$$\vec{PM} = \vec{PA} + \vec{AM} = (\beta+2)\vec{MA} - \vec{MA} = (\beta+1)\vec{MA} \quad (4)$$

$PD \cap CM = \{Y\} \rightarrow PD, CM, BX$
 X, Y, B колинеарне $\Leftrightarrow$ конкурентне
т.б. $Y \in BX$

$$E, X, M \text{ колинеарне} \xrightarrow{\text{менелай}} \triangle APC \quad \left(\frac{\vec{CE}}{\vec{EA}} \right) \cdot \frac{\vec{AM}}{\vec{MP}} \cdot \left(\frac{\vec{PX}}{\vec{XC}} \right) = -1$$

$$\Rightarrow 1 \cdot (-\alpha) \cdot \beta = -1 \Rightarrow \alpha\beta = 1$$

$$E = S(AC) \Rightarrow \frac{\vec{CE}}{\vec{EA}} = \frac{\vec{CD}}{\vec{DB}} = 1, M = S(AB) \Rightarrow \frac{\vec{AM}}{\vec{MP}} = -\frac{\vec{BM}}{\vec{MP}} = -\alpha$$

$$\text{Доказујемо } \alpha\beta\gamma = -1$$

$$\text{менелай } \triangle CPM \quad \left(\frac{\vec{CX}}{\vec{XP}} \right) \cdot \left(\frac{\vec{PB}}{\vec{BM}} \right) \cdot \left(\frac{\vec{MY}}{\vec{YC}} \right) = -1 \quad ?$$

$$\text{менелай } \triangle APC \quad \left(\frac{\vec{AE}}{\vec{EC}} \right) \cdot \frac{\vec{CX}}{\vec{XP}} \cdot \frac{\vec{PM}}{\vec{MA}} = -1 \quad (1)$$

$$\text{менелай } \triangle BMC \quad \left(\frac{\vec{BD}}{\vec{DC}} \right) \cdot \frac{\vec{CY}}{\vec{YM}} \cdot \frac{\vec{MP}}{\vec{PB}} = -1 \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow -1 = \frac{\vec{CX}}{\vec{XP}} \cdot \frac{\vec{PM}}{\vec{MA}} \quad (4) \quad \alpha \cdot (\beta+1) \Rightarrow \alpha = \frac{-1}{\beta+1}$$

$$(2) \Rightarrow -1 = \frac{\vec{CY}}{\vec{YM}} \cdot \frac{\vec{MP}}{\vec{PB}} \quad (3) \quad \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{-(\beta+1)}{\beta} \Rightarrow \gamma = \frac{\beta+1}{\beta}$$

$$\Rightarrow \alpha\beta\gamma = \frac{-1}{\beta+1} \cdot \beta \cdot \frac{\beta+1}{\beta} = -1$$

$\Rightarrow X, Y, B$
колинеарне

2. Одредити једначину равни која је паралелна правим

$$p: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-2}{-1}, \quad q: \frac{x+5}{-3} = \frac{y-7}{2} = \frac{z+6}{0}$$

и налази се на једнаком растојању од њих. [7 поена]

$$1) \alpha \parallel p \Rightarrow \vec{n}_\alpha \perp \vec{p} = (2, 5, -1)$$

$$2) \alpha \parallel q \Rightarrow \vec{n}_\alpha \perp \vec{q} = (-3, 2, 0)$$

$$\Rightarrow \vec{n}_\alpha = \vec{p} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 5 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (2, 3, 19)$$

$$3) d(p, \alpha) = d(q, \alpha) \Leftrightarrow d(P, \alpha) = d(Q, \alpha)$$

$$P(1, -3, 2) \in p, Q(-5, 7, -6) \in q$$

$$\Leftrightarrow \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) + 19 \cdot 2 + d|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 19^2}} = \frac{|2 \cdot (-5) + 3 \cdot 7 + 19 \cdot (-6) + d|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 19^2}}$$

$$\Leftrightarrow |31 + d| = |-103 + d|$$

$$\Rightarrow 31 + d = -103 + d \quad (1) \vee 31 + d = -d + 103 \Rightarrow d = 36$$

$$\Rightarrow \alpha: 2x + 3y + 19z + 36 = 0$$

3. Изометријским трансформацијама свести криву

$$K: 8x^2 + 17y^2 + 12xy + 100y + 175 = 0$$

на канонски облик. Која крива је у питању?

[9 поена]

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 0 \\ 6 & 17 & 50 \\ 0 & 50 & 175 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 17 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & 6 \\ 6 & 17-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 25\lambda + 100 = (\lambda-5)(\lambda-20)$$

$$(B-5E)u = 0$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{u}_5 = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$3a + 6b = 0 \Rightarrow a = -2b$$

$$(B-20E)u = 0$$

$$\begin{bmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{u}_{20} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$6a - 3b = 0 \Rightarrow b = 2a$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow y_K: \frac{8}{5}(4x'^2 - 4x'y' + y'^2) + \frac{17}{5}(x'^2 + 4x'y' + 4y'^2) + \frac{12}{5}(-2x'^2 - 3x'y' + 2y'^2) + 20\sqrt{5}(x' + 2y') + 175 = 0$$

$$\Rightarrow y_K: 5x'^2 + 20y'^2 + 20\sqrt{5}x' + 40\sqrt{5}y' + 175 = 0 \quad /: 5$$

$$\Rightarrow y_K: x'^2 + 4\sqrt{5}x' + 4y'^2 + 8\sqrt{5}y' + 35 = 0$$

$$y_K: (x' + 2\sqrt{5})^2 + 4(y' + \sqrt{5})^2 - 20 - 20 + 35 = 0$$

$$\begin{cases} x'' = x' + 2\sqrt{5} \\ y'' = y' + \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow y_K: x''^2 + 4y''^2 = 5$$

$$\text{тј. } y_K: \frac{x''^2}{5} + \frac{y''^2}{5/4} = 1$$

$\Rightarrow$ елипса

4. Одредити формуле изометрије $I_A \circ I_\alpha$ која је композиција равanske рефлексije I_α у односу на $\alpha: 3y + 4z = 0$ и централне симетрије I_A у односу на тачку $A(4, 2, 0)$. Шта је слика сфере

$$S: x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 6y - 12z = 144$$

при том пресликавању?

[9 поена]

1) $n \perp \alpha, M \in n, \vec{n} = \vec{n}_\alpha = (0, 3, 4) \Rightarrow n: \begin{cases} x = x_0 \\ y = 3t + y_0 \\ z = 4t + z_0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

2) $S = n \cap \alpha: 9t + 3y_0 + 16t + 4z_0 = 0 \Rightarrow t = \frac{-3y_0 - 4z_0}{25} \Rightarrow S(x_0, \frac{16y_0 - 12z_0}{25}, \frac{-12y_0 + 9z_0}{25})$

3) $S = S(MM') \Rightarrow [M'] = 2[S] - [M] = (x_0, \frac{7y_0 - 24z_0}{25}, \frac{-24y_0 - 7z_0}{25})$

$\Rightarrow I_\alpha: \begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{7}{25}y - \frac{24}{25}z \\ z' = -\frac{24}{25}y - \frac{7}{25}z \end{cases}$

$$* I_A(M') = M'' \Leftrightarrow \vec{AM''} = -\vec{AM'} \Rightarrow (x'' - 4, y'' - 2, z'') = (4 - x', 2 - y', -z')$$

$$I_A: \begin{cases} x'' = -x' + 8 \\ y'' = -y' + 4 \\ z'' = -z' \end{cases}$$

$$I_A \circ I_\alpha: \begin{cases} x'' = -x' + 8 = -x + 8 \\ y'' = -y' + 4 = -\frac{7}{25}y + \frac{24}{25}z + 4 \\ z'' = -z' = \frac{24}{25}y + \frac{7}{25}z \end{cases}$$

$$F = I_A \circ I_\alpha: \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -7/25 & 24/25 \\ 0 & 24/25 & 7/25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C(-6, 3, 6) \\ R = 15$$

$$S: x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 6y - 12z = 144 \Leftrightarrow S: (x+6)^2 + (y-3)^2 + (z-6)^2 = 225$$

$$C' = F(C) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -7/25 & 24/25 \\ 0 & 24/25 & 7/25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 123/25 \\ 114/25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 223/25 \\ 114/25 \end{bmatrix}$$

f изометрија $\Rightarrow$ сфера S се слика у сферу S'
 $C(-6, 3, 6) \mapsto C'(14, \frac{223}{25}, \frac{114}{25})$, $R=15 \mapsto R'=15$
 $\Rightarrow S': (x-14)^2 + (y-\frac{223}{25})^2 + (z-\frac{114}{25})^2 = 225$

5. Одредити једначину површи која представља геометријско место тачака на једнаком растојању од координатног почетка и равни $\alpha: 3x + 4y + 12z = 12$. Одредити тачку са те површи која је најближа координатном почетку [6 поена]

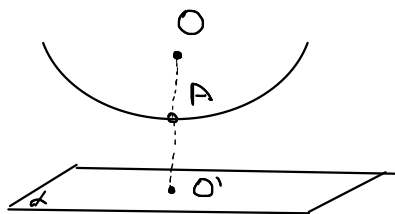
▲ $M(x, y, z)$ произв $\Rightarrow S = \{M \mid d(M, O) = d(M, \alpha)\}$

$\Rightarrow S: \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \frac{|3x + 4y + 12z - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}} / 2$

$S: 169(x^2 + y^2 + z^2) = (3x + 4y + 12z - 12)^2$

Која год била површ (у питању је кружни параболоид)

можемо уочити да је тачка површи S најближа коорд. почетку управо средиште дужи OO' , где је O' пројекција O на α



1) $n \perp \alpha$, $O \in n$, $n \perp \alpha \Rightarrow n: \begin{matrix} x=3t \\ y=4t \\ z=12t \end{matrix}$, $t \in \mathbb{R}$

2) $n \cap \alpha: 9t + 16t + 144t - 12 = 0 \Rightarrow t = \frac{12}{169}$

$\Rightarrow O'(\frac{36}{169}, \frac{48}{169}, \frac{144}{169})$

3) Тражена $A = S(OO') \Rightarrow A(\frac{18}{169}, \frac{24}{169}, \frac{72}{169})$

