

Пре израде задатака, на вежбанци **ОБАВЕЗНО** попунити назив предмета, име и презиме, број индекса (број досијеа) као и име асистента код кога сте распоређени на Хипатији (у пољу задатак прегледао)! Остала поља не морате попуњавати.

1. Дефинисати следеће појмове (а–д):

а) [1п] линеарно независни вектори $v_1, v_2, \dots, v_k$;

б) [1п] адјунгована матрица $\text{adj}A$;

в) [1п] директна сума $V = U \oplus W$ векторских потпростора $U, W \leq V$;

г) [1п] формулисати Кејли-Хамилтонову теорему;

д) [1п] скаларни производ на векторском простору V ;

ђ) [2п] Нека су A и B симетричне матрице. Доказати да је AB симетрична матрица ако и само ако матрице A и B комутирају;

е) [3п] Испитати да ли су вектори $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (1, 1, -2)$ и $\vec{c} = (5, 8, 5)$ копланарни.

Ако јесу, вектор $\vec{c}$ изразити као линеарну комбинацију вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а уколико нису копланарни, израчунати запремину паралелепипеда разапетог векторима $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

2. [10п] Дати су векторски потпростори векторског простора $\mathbb{R}^4$ са

$$U = \mathcal{L}\{(1, -2, -1, -4), (2, -10, -5, 7), (0, 2, 1, -5)\}$$

и

$$W = \{(a, b, c, d) \mid a - b + 2c - d = 0, 7a + 2b - c - d = 0\}.$$

Одредити бар по једну базу, као и димензију за U , W , $U + W$ и $U \cap W$.

3. Дато је линеарно пресликавање $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ са

$$L(x, y, z) = (2x - y - 2z, -10x + 5y + 14z, 6x - 3y - 8z).$$

б) [6п] Наћи базу и димензију за $\text{Ker}L$ и $\text{Im}L$.

в) [4п] Одредити матрицу $[L]_B$ пресликавања L у односу на базу B векторског простора $\mathbb{R}^3$, где је $B = \{f_1 = (1, 1, 1), f_2 = (1, 1, 0), f_3 = (1, 0, 0)\}$.

4. [10п] На векторском простору $\mathbb{R}^2[x]$ полинома степена ≤ 2 дат је скаларни производ са

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + \frac{1}{2}p''(0)q''(0) - \frac{1}{2}p'(0)q''(0) - \frac{1}{2}p''(0)q'(0)$$

и потпростор $U = \text{Span}\{x^2 + x, x^2 - x + 2\} \leq \mathbb{R}^2[x]$. Одредити ортогоналну пројекцију полинома $p = x + 3$ на потпростор U , као и растојање $d(p, U)$.

5. [10п] Дате су права $p : \begin{cases} x - 2z - 3 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$ и раван $\alpha : x + 3y - z + 4 = 0$.

а) Одредити пресечну тачку A праве p и равни α , као и угао између њих.

б) Одредити једначину праве q која садржи тачку A , припада равни α и нормална је на праву p .

6. [10п] Одредити бар једну реалну матрицу A чији је карактеристични полином

$$\varphi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 + 6\lambda \text{ и сопствени вектори су } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$