

Пре израде задатака, на вежбанци **ОБАВЕЗНО** попунити назив предмета, име и презиме, број индекса (број досијеа) као и име асистента код кога сте распоређени на Хипатији (у пољу задатак прегледао)! Остала поља не морате попуњавати.

1. Дефинисати/формулисати следеће појмове:

а) [1п] решење система линеарних једначина
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

б) [1п] линеарно независни вектори $v_1, v_2, \dots, v_k$;

в) [1п] траг матрице $A \in M_n(\mathbb{R})$;

г) [1п] база и димензија векторског простора V ;

д) [1п] линеарно пресликавање $L : U \rightarrow W$;

ђ) [2п] формулисати Крамерову теорему за решавање система из дела а);

е) [1п] сопствена вредност и сопствени вектор матрице $A \in M_n(\mathbb{R})$;

ж) [2п] Грам-Шмитов поступак ортогонализације базе (f_1, f_2, f_3, f_4) унитарног векторског простора V .

2. [10п] Одредити инверзну матрицу матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -4 \\ -1 & -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$, ако постоји.

3. Дато је пресликавање $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ са $F(x, y) = (2x + y, 3x + 2y)$.

а) [2п] Доказати да је пресликавање F линеарно.

б) [4п] Наћи базу и димензију за $\text{Ker} F$ и $\text{Im} F$.

в) [4п] Доказати да је F инвертибилно и наћи формулу за F^{-1} .

4. Дат је векторски простор $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + 2t = 0, 2x + 2y - t = 0\}$ са стандардним скаларним производом у $\mathbb{R}^4$.

а) [3п] Одредити базу и димензију векторског простора W .

б) [3п] Одредити базу и димензију векторског простора $W^\perp$.

в) [4п] Којем од простора W и $W^\perp$ је вектор $v = (7, -3, 3, -6)$ ближи?

5. [10п] Дате су праве $p : \begin{cases} x + 2z - 7 = 0, \\ y + 3z - 5 = 0, \end{cases}$ и $q : \frac{x+2}{-3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{-2}$.

Одредити праву l која пролази кроз тачку $L(2, 2, -2)$ и сече праве p и q .

6. [10п] Одредити све реалне матрице A чији је карактеристични полином $\varphi_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda - 6$ и сопствени вектори су $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$.