Предавање 7 – Извод функције

Најпре ћемо се подсетити дефиниције извода са претходног предавања:

Дефиниција 1. *Функција* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *је* ***диференцијабилна у тачки*** $x_0 \in (a, b)$ *ако постоји коначан лимес*

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \begin{pmatrix} \text{смена} \\ x_0 + h = x \end{pmatrix} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Број $f'(x_0)$ *зовемо* ***извод функције*** f ***у тачки*** x_0.

Израз $\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$ је **прираштај функције**, док је $\Delta x_0 = (x_0 + h) - x_0 = h$ **прираштај аргумента**.

Став 1. *Ако је функција* f *диференцијабилна у тачки* x_0*, онда је непрекидна у тој тачки.*

Доказ. Из дефиниције извода у тачки x_0 и правила за лимес производа добијамо

$$\lim_{x\to x_0} \big(f(x) - f(x_0)\big) = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)\right) = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

Дакле, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, па је функција f непрекидна у тачки x_0. □

Пример 1. *Обрнуто тврђење не важи. Посматрајмо функцију* $f(x) = \sqrt[3]{x}$*. Она је непрекидна у нули, јер је*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x} = 0 = f(0).$$

Међутим, како је

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2} = +\infty,$$

функција f *није диференцијабилна у нули.*

Леви и десни извод

Дефиниција 2. *Нека је функција* f *дефинисана у околини тачке* x_0*.* ***Леви извод*** *функције* f *у тачки* x_0 *је*

$$f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0_-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

ако тај лимес постоји и коначан је. Аналогно, ***десни извод*** *функције* f *у тачки* x_0 *је*

$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0_+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

ако тај лимес постоји и коначан је.

Став 2. *Извод* $f'(x_0)$ *постоји ако и само ако постоје леви и десни извод у тачки* x_0 *и једнаки су. Тада је*

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0).$$

Пример 2. *Посматрајмо функцију*

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Функција f *је непрекидна, а за* $x \neq 0$ *добијамо*

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases} = \operatorname{sgn}(x).$$

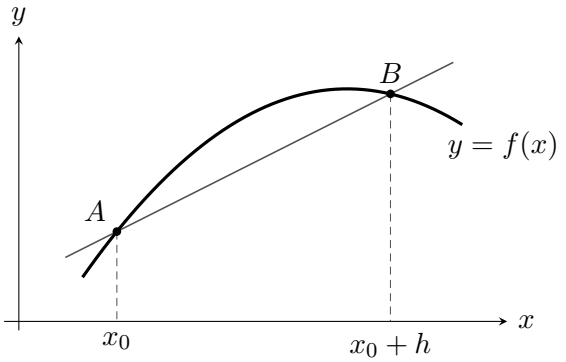
У тачки $x = 0$ имамо $f(0) = 0$, па су једнострани изводи

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0_-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0_-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0_-} \frac{-h}{h} = -1,$$
$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0_+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0_+} \frac{h}{h} = 1.$$

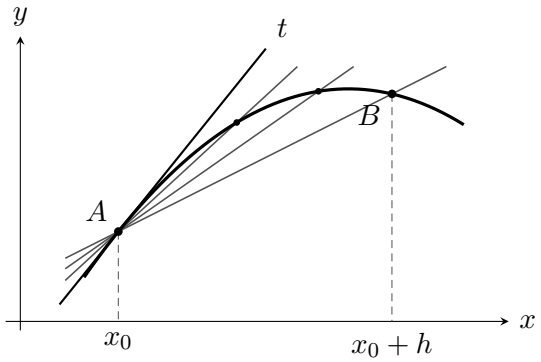
Пошто су леви и десни извод различити, функција $f(x) = |x|$ нема извод у нули.

Геометријско значење извода

Нека је f непрекидна у тачки x_0. Тачке $A(x_0, f(x_0))$ и $B(x_0 + h, f(x_0 + h))$, где је $h \neq 0$, припадају графику функције $y = f(x)$. Праву AB називамо **сечицом графика** (слика 1). Када мењамо h, тачка B се помера по графику, а са њом се помера и сечица AB (слика 2).



Слика 1. Сечица графика



Слика 2. Сечице и тангента

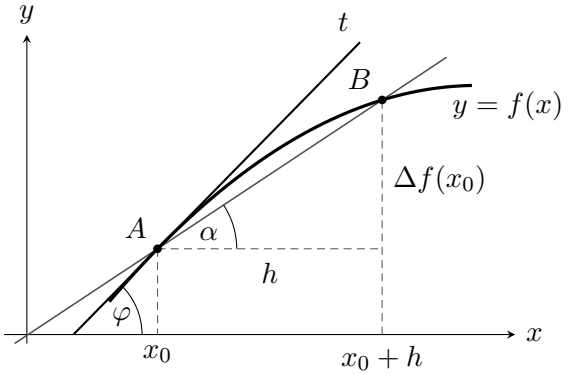
Ако је α угао који сечица AB гради са позитивним смером x-осе (слика 3, лево), њен коефицијент правца је

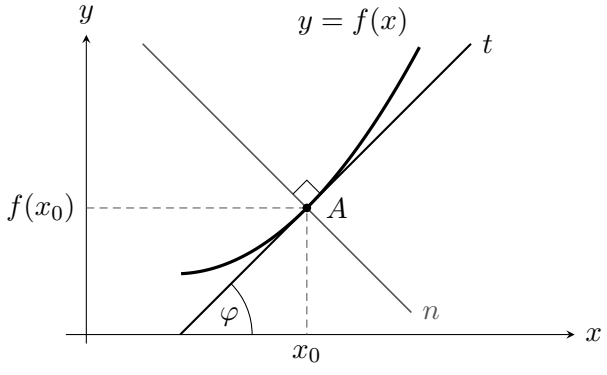
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta f(x_0)}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{1}$$

Из непрекидности функције f у тачки x_0, када $h \to 0$ тачка B тежи тачки A. Ако постоји извод $f'(x_0)$, из (1) и дефиниције извода следи

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

Гранични положај сечице је **тангента** криве $y = f(x)$ у тачки A. Ако је φ угао који тангента гради са позитивним смером x-осе, важи $\operatorname{tg}\varphi = f'(x_0)$.





Слика 3. Тангента и нормала криве

Једначина тангенте у тачки $A(x_0, f(x_0))$ гласи

$$t_A \ : \ y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Праву кроз A која је нормална на тангенту називамо **нормалом криве у тачки** A (слика 3, десно). Ако је $f'(x_0) \neq 0$, једначина нормале гласи

$$n_A \ : \ y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Ако је $f'(x_0) = 0$, права $y = f(x_0)$ је тангента, а права $x = x_0$ је нормала криве у тачки A.

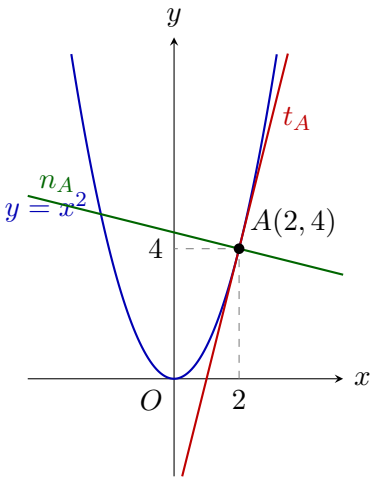
Пример 3. *Одредити једначине тангенте и нормале на криву* $y = x^2$ *у тачки* $A(2, 4)$.

За функцију $f(x) = x^2$ *важи* $f'(x) = 2x$, *па је* $f'(2) = 4$. *Дакле, једначина тангенте је*

$$y - 4 = 4(x - 2),$$
$$mj. \qquad t_A : \ y = 4x - 4,$$

а једначина нормале је

$$y - 4 = -\frac{1}{4}(x - 2),$$
$$mj. \qquad n_A : \ y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{2}.$$



Правила диференцирања

Из дефиниције извода и својстава граничних вредности добијамо правила за диференцирање збира, разлике, производа и количника двеју функција.

Теорема 1. *Нека су функције* $f, g \colon D \to \mathbb{R}$ *диференцијабилне на скупу* $E \subseteq D$. *Тада за свако* $x \in E$ *важи*

(1) $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$,

(2) $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,

(3) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, *ако је* $g(x) \neq 0$.

Формула (2) *назива се* ***Лајбницово правило*** *за извод производа функција.*

Доказ. Нека је $x \in E$ произвољно. Како су f и g диференцијабилне у x, оне су и непрекидне у x.
(1) По дефиницији извода и својствима лимеса имамо

$$\begin{aligned}(f \pm g)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) \pm g(x+h)] - [f(x) \pm g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) \pm g'(x).\end{aligned}$$

(2) У бројиоцу додајемо и одузимамо $f(x)g(x+h)$, па добијамо

$$\begin{aligned}(f \cdot g)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}\end{aligned}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)$$
$$= \left(\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)\left(\lim_{h\to 0} g(x+h)\right)+f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$
$$= f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$$

(3) Ако је $g(x)\neq 0$, по непрекидности функције g важи $g(x+h)\neq 0$ за довољно мало $|h|$. Након свођења на заједнички именилац, у бројиоцу додајемо и одузимамо $f(x)g(x)$. Тако добијамо

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{h\,g(x+h)g(x)}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{h\,g(x+h)g(x)}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,g(x)-f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)}$$
$$= \frac{g(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x)\lim_{h\to 0}g(x+h)}$$
$$= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

□

Пример 4. *Нека је* $f(x)=\operatorname{tg}x$. *За* $\cos x\neq 0$, *применом правила за извод количника добијамо*

$$f'(x)=\frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Теорема 2 (Извод сложене функције)**.** *Нека је функција* f *диференцијабилна у тачки* x, *а функција* g *диференцијабилна у тачки* $y=f(x)$. *Тада је и функција* $g\circ f$ *диференцијабилна у тачки* x *и важи*

$$(g\circ f)'(x)=g'(y)f'(x)=g'\big(f(x)\big)f'(x).$$

Пример 5. *Применом претходне теореме добијамо*

(а)

$$\left(\mathrm{e}^{\sin x}\right)'=\mathrm{e}^{\sin x}(\sin x)'=\mathrm{e}^{\sin x}\cos x.$$

(б)

$$\left[\ln(\operatorname{arctg}(x^5))\right]'=\frac{1}{\operatorname{arctg}(x^5)}\left(\operatorname{arctg}(x^5)\right)'=\frac{1}{\operatorname{arctg}(x^5)}\cdot\frac{1}{1+x^{10}}\cdot(x^5)'=\frac{5x^4}{(1+x^{10})\operatorname{arctg}(x^5)}.$$

Теорема 3 (Извод инверзне функције)**.** *Нека је* f *непрекидна и строго монотона у околини тачке* x *и нека је* $f'(x)\neq 0$. *Ако је* $g=f^{-1}$ *и* $y=f(x)$, *тада је*

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)}.$$

Пример 6. (а) *Функција* $f(x)=x^2$ *на интервалу* $[0,+\infty)$ *има инверзну функцију* $g(y)=\sqrt{y}$. *За* $x>0$ *је* $f'(x)=2x\neq 0$, *па за* $y=x^2$ *према претходној теореми важи*

$$g'(y)=(\sqrt{y})'=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{2x}=\frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Заменом ознаке y *ознаком* x *добијамо стандардни запис*

$$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}},\qquad x>0.$$

Домен функције $x\mapsto\sqrt{x}$ *је* $[0,+\infty)$, *а домен њеног извода је* $(0,+\infty)$.

Пример 7. *Нека је* $f(x) = \sin x$ *за* $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ *и нека је* $g(y) = \arcsin y$ *њена инверзна функција. За* $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ *имамо* $y = \sin x$ *и* $\cos x > 0$*, па по формули за извод инверзне функције добијамо*

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}, \qquad y \in (-1, 1).$$

Пример 8. (в) *Функција* $f(x) = \operatorname{tg} x$ *на интервалу* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *има инверзну функцију* $g(y) = \operatorname{arctg} y$*. За* $y = \operatorname{tg} x$*, према формули за извод инверзне функције, важи*

$$g'(y) = (\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{f'(x)} = \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Заменом ознаке y *ознаком* x *добијамо*

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Логаритамски извод

Логаритамско диференцирање користимо за налажење извода функција облика

$$y = f(x)^{g(x)}, \tag{2}$$

где су f и g диференцијабилне и $f(x) > 0$. Поступак се састоји од три корака.

1. Логаритмујемо обе стране једнакости (2) и добијамо
$$\ln y = g(x) \ln f(x).$$
2. Диференцирамо обе стране по x. На левој страни примењујемо правило за извод сложене функције, па је
$$\frac{y'}{y} = g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)}.$$
3. Помножимо једнакост са y и заменимо $y = f(x)^{g(x)}$.

Тако добијамо формулу

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = f(x)^{g(x)} \left(g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)}\right).$$

Пример 9. *Одредимо извод функције* $y = (1 + x)^{1/x}$ *за* $x > -1$, $x \neq 0$.
Логаритмовањем обе стране једнакости добијамо

$$\ln y = \frac{1}{x} \ln(1 + x).$$

Диференцирањем по x *следи*

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x^2} \ln(1 + x) + \frac{1}{x(1 + x)}.$$

Множењем са $y = (1 + x)^{1/x}$ *добијамо*

$$y' = (1 + x)^{1/x} \left(-\frac{1}{x^2} \ln(1 + x) + \frac{1}{x(1 + x)}\right) = \frac{(1 + x)^{1/x}}{x} \left(-\frac{1}{x} \ln(1 + x) + \frac{1}{1 + x}\right).$$

Лопиталово правило

Лопиталово правило користи се за рачунање лимеса неодређених облика $0/0$ и ∞/∞. Остали неодређени облици, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞ и ∞^0, погодним трансформацијама могу се свести на један од ова два облика.

Теорема 4 (Лопиталово правило)**.** *Нека су функције f и g диференцијабилне у некој пробушеној околини тачке $a\in\mathbb{R}$ и нека је $g'(x)\neq 0$ у тој околини. Претпоставимо да важи један од следећих услова:* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ *или* $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=\lim\limits_{x\to a}|g(x)|=+\infty$. *Ако постоји лимес*

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L,\qquad L\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\},$$

онда постоји и лимес количника функција и важи

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L.$$

Аналогно тврђење важи за леви и десни лимес, као и за лимесе када $x\to+\infty$ или $x\to-\infty$, уз одговарајуће претпоставке на функције.

Напомена. Лопиталово правило може се применити више пута узастопно, ако се након његове примене поново добије неодређени облик $0/0$ или ∞/∞ и ако су при свакој примени испуњени услови претходне теореме.

Пример 10. *Израчунајмо* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Како бројилац и именилац теже нули, применом Лопиталовог правила добијамо

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\overset{\boxed{\frac{0}{0}\ \mathit{Л}}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}\overset{\boxed{\frac{0}{0}\ \mathit{Л}}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}.$$

Правило смо применили два пута, јер се након прве примене поново добија неодређени облик $\frac{0}{0}$.

Пример 11. *Израчунајмо* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$.

Бројилац и именилац теже $+\infty$, па применом Лопиталовог правила добијамо

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\boxed{\frac{\infty}{\infty}\ \mathit{Л}}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1}=0.$$

Пример 12. *Израчунајмо* $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x$.

Добијамо неодређени облик $0\cdot(-\infty)$. Преписивањем производа у облику количника сводимо га на неодређени облик $\frac{-\infty}{+\infty}$, па је

$$\lim_{x\to 0+}x\ln x=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{1/x}\overset{\boxed{\frac{-\infty}{+\infty}\ \mathit{Л}}}{=}\lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0+}(-x)=0.$$

Пример 13. *Израчунајмо* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\mathrm{e}^{1/x}-x\right)$.

Оба члана теже $+\infty$, па добијамо неодређени облик $\infty-\infty$. Издвајањем x и записивањем производа као количника добијамо облик $\frac{0}{0}$, па је

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\mathrm{e}^{1/x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\mathrm{e}^{1/x}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{1/x}-1}{1/x}\overset{\boxed{\frac{0}{0}\ \mathit{Л}}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{1/x}\,(-1/x^2)}{-1/x^2}=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{1/x}=1.$$