Предавање 6 - Непрекидне функције, извод функције

Подсетимо се најпре дефиниције непрекидних функција:

Дефиниција 1. *Функција $f : D \to \mathbb{R}$ је* ***непрекидна у тачки*** *$a \in D$ ако*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) \qquad |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

односно

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) \qquad x \in (a - \delta, a + \delta) \implies f(x) \in (f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon).$$

Дефиниција 2. *Функција $f : D \to \mathbb{R}$ је* ***непрекидна на скупу*** *$E \subseteq D$ ако је непрекидна у свакој тачки скупа E. Функција f је* ***непрекидна*** *ако је непрекидна у свакој тачки свог домена.*

Локална својства непрекидних функција

Став 1. *Нека је $f : D \to \mathbb{R}$ непрекидна у тачки $a \in D$. Тада постоји околина тачке a у којој је f ограничена.*

Доказ. Из дефиниције непрекидности f у тачки a следи да за свако $\varepsilon > 0$ и ε-околину тачке $f(a)$, тј. интервал $(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$, постоји $\delta > 0$ и δ-околина тачке a чији се пресек са доменом цео пресликава у $(f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$. Самим тим,

$$\forall x \in D \cap (a - \delta, a + \delta) \implies f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon.$$

Дакле, f је ограничена у тој околини. □

Став 2. *Нека је $f : D \to \mathbb{R}$ непрекидна у тачки $a \in D$ и $f(a) \neq 0$. Тада постоји околина тачке a у којој f не мења знак.*

Доказ. Претпоставимо, на пример, да је $f(a) > 0$ и нека је $\varepsilon = f(a)/2$. Из дефиниције непрекидности f у a следи

$$(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) \qquad |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

тј. за $x \in D \cap (a - \delta, a + \delta)$ важи $f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$, па је

$$0 < \frac{f(a)}{2} = f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon = \frac{3}{2} f(a).$$

Дакле, $f(x) > 0$ у околини $(a - \delta, a + \delta)$. Слично се доказује и случај $f(a) < 0$. □

Став 3. *Ако су функције f и g непрекидне у тачки a, тада су и функције $f \pm g$ и $f \cdot g$ непрекидне у a. Додатно, ако је $g(a) \neq 0$, тада је и функција f/g непрекидна у a.*

Приметимо да је f/g дефинисана у некој околини тачке a, на заједничком домену, под условом да је $g(a) \neq 0$ и да су f и g непрекидне у a, на основу претходног става.

Став 4. *Ако је функција $f : A \to B$ непрекидна у $a \in A$ и функција $g : B \to \mathbb{R}$ непрекидна у $f(a)$, тада је и функција $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ непрекидна у тачки a.*

Доказ. Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Како је g непрекидна у $f(a)$, имамо да

$$(\exists \delta_1 > 0)(\forall y \in B) \qquad |y - f(a)| < \delta_1 \implies |g(y) - g(f(a))| < \varepsilon.$$

За тако изабрано $\delta_1 > 0$, из непрекидности f у тачки a следи

$$(\exists \delta_2 > 0)(\forall x \in A) \qquad |x - a| < \delta_2 \implies |f(x) - f(a)| < \delta_1.$$

Како $f(x) \in B$, повезивањем ових импликација имамо

$$(\exists \delta_2 > 0)(\forall x \in A) \qquad |x - a| < \delta_2 \implies |g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon.$$

Како је ε произвољно, ово је баш дефиниција непрекидности $g \circ f$ у a. □

Дефиниција 3. ***Основне елементарне функције*** *су:*

- *константна функција,* $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$;
- *степена функција,* $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
- *експоненцијална функција,* $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$;
- *логаритамска функција,* $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$;
- *тригонометријске функције,*

$$f_1(x) = \sin x, \qquad f_2(x) = \cos x, \qquad f_3(x) = \operatorname{tg} x, \qquad f_4(x) = \operatorname{ctg} x;$$

- *инверзне тригонометријске функције,*

$$g_1(x) = \arcsin x, \qquad g_2(x) = \arccos x, \qquad g_3(x) = \operatorname{arctg} x, \qquad g_4(x) = \operatorname{arcctg} x.$$

Дефиниција 4. ***Елементарна функција*** *је свака функција која се добија коначном применом аритметичких операција и композиција над основним елементарним функцијама.*

Став 5. *Све елементарне функције су непрекидне у области дефинисаности.*

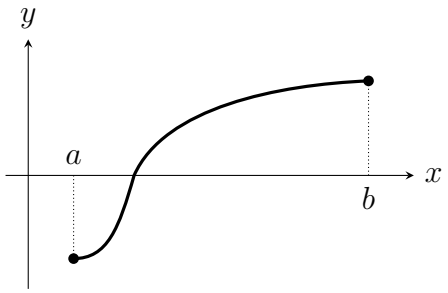
Пример 1. *Полином* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, *где су* $a_i \in \mathbb{R}$ *и* $a_n \neq 0$, *јесте непрекидна функција за свако* $x \in \mathbb{R}$.

Пример 2. *Рационална функција* $R(x) = P(x)/Q(x)$, *где су* $P(x)$ *и* $Q(x)$ *полиноми, непрекидна је за свако* x *такво да је* $Q(x) \neq 0$.

Глобална својства непрекидних функција

Теорема 1 (Болцано–Коши)**.** *Нека је* f *непрекидна на сегменту* $[a, b]$ *и нека су* $f(a)$ *и* $f(b)$ *различитог знака, тј.* $f(a) \cdot f(b) < 0$. *Тада постоји тачка* $c \in (a, b)$ *таква да је* $f(c) = 0$.

Доказ. Без умањења општости можемо претпоставити да је $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$.



Поделимо $[a, b]$ на два једнака дела:

$$I_1 = \left[a, \frac{a+b}{2}\right], \qquad I_2 = \left[\frac{a+b}{2}, b\right].$$

Ако је $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, то је крај доказа. Ако то није случај, онда у крајевима једног од интервала I_1 или I_2 функција f има супротан знак и обележимо тај интервал $[a_1, b_1]$. Настављамо поступак. Или ћемо у неком тренутку на половини интервала добити $c \in (a, b)$ тако да је $f(c) = 0$, или добијамо низ уметнутих интервала

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots,$$

при чему је

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0, \qquad f(a_n) < 0 < f(b_n).$$

Како је низ (a_n) растући и ограничен, а (b_n) опадајући и ограничен, оба конвергирају. Такође, из $b_n - a_n \to 0$, имају исти лимес $c \in [a, b]$. Из непрекидности функције f имамо да је

$$f(c) = f\left(\lim_{n\to+\infty} a_n\right) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) \leq 0,$$
$$f(c) = f\left(\lim_{n\to+\infty} b_n\right) = \lim_{n\to+\infty} f(b_n) \geq 0.$$

Дакле, $0 \leq f(c) \leq 0$, па је $f(c) = 0$. Пошто је $f(a) < 0 < f(b)$, тачка c није ни a ни b, па је $c \in (a, b)$. □

Теорема каже да при наведеним условима постоји бар једна тачка $c \in (a, b)$ таква да је $f(c) = 0$, али она не мора бити јединствена.

Последица 1. *Ако је f непрекидна на сегменту $[a, b]$ и важи $f(a) < f(b)$ (или $f(b) < f(a)$), тада за свако C за које је $f(a) < C < f(b)$ (или $f(b) < C < f(a)$) постоји тачка $c \in (a, b)$ таква да је $f(c) = C$.*

Доказ. Функција $F(x) = f(x) - C$ је непрекидна на $[a, b]$ и важи

$$F(a) \cdot F(b) = (f(a) - C) \cdot (f(b) - C) < 0,$$

па на основу Болцано–Кошијеве теореме постоји $c \in (a, b)$ такво да је $F(c) = 0$, тј. $f(c) = C$. □

Другим речима, непрекидна функција на сегменту $[a, b]$ достиже све вредности између $f(a)$ и $f(b)$.

Задатак 1. *Испитати да ли једначина $\cos x - x = -1$ има решење на сегменту $[-\pi, \pi]$.*

Решење. Посматрамо функцију $f(x) = \cos x - x + 1$. Функција f је непрекидна на сегменту $[-\pi, \pi]$ и важи

$$f(-\pi) = \cos(-\pi) + \pi + 1 = -1 + \pi + 1 = \pi > 0,$$
$$f(\pi) = \cos\pi - \pi + 1 = -1 - \pi + 1 = -\pi < 0.$$

Дакле, $f(-\pi)f(\pi) < 0$, па на основу Болцано–Кошијеве теореме постоји $c \in (-\pi, \pi)$ такво да је $f(c) = 0$. То значи да једначина има бар једно решење у интервалу $(-\pi, \pi)$. □

Задатак 2. *Да ли једначина $x^9 - 3x^5 + 2x = 4$ има решење на $[1, 2]$?*

Решење. Функција $f(x) = x^9 - 3x^5 + 2x - 4$ је полином, па је непрекидна на $[1, 2]$. Важи

$$f(1) = 1 - 3 + 2 - 4 = -4 < 0, \qquad f(2) = 512 - 96 + 4 - 4 = 416 > 0.$$

На основу Болцано–Кошијеве теореме постоји $c \in (1, 2)$ такво да је $f(c) = 0$, тј. једначина има решење. □

Задатак 3. *Испитати да ли функција $f(x) = \sin\pi x + \cos\pi x - x^2 + 3$ достиже вредност 3 на сегменту $[-2, 0]$.*

Решење. Функција f је непрекидна на сегменту $[-2, 0]$. Имамо

$$f(-2) = \sin(-2\pi) + \cos(-2\pi) - (-2)^2 + 3 = 0 + 1 - 4 + 3 = 0,$$
$$f(0) = \sin 0 + \cos 0 - 0^2 + 3 = 0 + 1 - 0 + 3 = 4.$$

Како је $f(-2) = 0 < 3 < 4 = f(0)$, на основу последице Болцано–Кошијеве теореме постоји $c \in (-2, 0)$ такво да је $f(c) = 3$. □

Пример 3. *Промена знака у Болцано–Кошијевој теореми је довољан, али не и неопходан услов за постојање нуле. На пример, $f(x) = x^2$ је непрекидна на $[-1, 1]$, а иако је $f(1) \cdot f(-1) > 0$, постоји $0 \in (-1, 1)$ тако да је $f(0) = 0$.*

Пример 4. *Услов непрекидности у Болцано–Кошијевој теореми не може се изоставити. На пример,* $f(x) = 1/x$ *није дефинисана у нули, па није непрекидна на целом* $[-1, 1]$*, а важи* $f(-1)\cdot f(1) < 0$ *и не постоји* $c \in (-1, 1)$ *у њеном домену тако да је* $f(c) = 0$*.*

Теорема 2 (Вајерштрас)**.** *Ако је функција* f *непрекидна на* $[a, b]$*, онда је она и ограничена на* $[a, b]$*. Додатно,* f *на* $[a, b]$ *достиже и најмању и највећу вредност.*

Пример 5. *Непрекидност на отвореном интервалу није довољна за ограниченост: функција* $f(x) = 1/x$ *је непрекидна на интервалу* $(0, 1)$*, али није ограничена. Дакле, у теореми мора се посматрати затворени сегмент* $[a, b]$*, а не отворени интервал* (a, b)*.*

Пример 6. *Функција* $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$*,*

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-1, 1), \\ 0, & x \in \{-1, 1\}, \end{cases}$$

не достиже ни минимум ни максимум на $[-1, 1]$*. Разлог је то што није непрекидна на* $[-1, 1]$*, конкретно у тачкама* -1 *и* 1*. Функција* f *јесте ограничена.*

Став 6. *Непрекидна функција* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *је инјективна ако и само ако је строго монотона.*

Доказ. ($\Leftarrow$) Ако је f строго монотона, онда је очигледно инјективна.

($\Rightarrow$) Нека је f непрекидна на $[a, b]$ и инјективна. Доказујемо да је f строго монотона. Најпре ћемо доказати да за свака три броја $x_1 < x_2 < x_3$ из $[a, b]$ важи да је $f(x_2)$ строго између $f(x_1)$ и $f(x_3)$, тј. важи

$$f(x_1) < f(x_2) < f(x_3) \qquad \text{или} \qquad f(x_1) > f(x_2) > f(x_3).$$

Претпоставимо супротно, да $f(x_2)$ није између $f(x_1)$ и $f(x_3)$. Због инјективности, све три вредности су различите. Тада је

$$\begin{gathered} f(x_2) > f(x_1) > f(x_3), \qquad f(x_2) > f(x_3) > f(x_1), \\ f(x_2) < f(x_1) < f(x_3) \qquad \text{или} \qquad f(x_2) < f(x_3) < f(x_1). \end{gathered}$$

Нека је, на пример, $f(x_2) > f(x_1) > f(x_3)$. Како је f непрекидна на $[x_2, x_3]$, на основу последице Болцано–Кошијеве теореме f достиже све међувредности између $f(x_2)$ и $f(x_3)$, па постоји неко $x_0 \in (x_2, x_3)$ такво да је $f(x_0) = f(x_1)$, што је контрадикција са инјективношћу. Аналогно се разматрају и остали случајеви.

Дакле, вредност у средњој тачки увек је строго између вредности у крајњим тачкама. Ако је $f(a) < f(b)$, онда за $a < x < b$ важи $f(a) < f(x) < f(b)$, а за $a < x < y < b$, применом доказаног својства на $a < x < y$, добијамо $f(a) < f(x) < f(y)$. Заједно са крајњим тачкама, то показује да је f строго растућа. Ако је $f(a) > f(b)$, аналогно следи да је f строго опадајућа. Према томе, f је строго монотона. □

Пример 7. *Услов строге монотоности не може се ослабити на монотоност: на пример, константна функција јесте непрекидна на* $[a, b]$ *и монотона, али није инјективна, за* $a < b$*.*

Став 7 (Критеријум непрекидности монотоне функције)**.** *Монотона функција* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *је непрекидна ако је*

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)] \quad \textit{ако је } f \textit{ растућа},$$

или

$$f([a, b]) = [f(b), f(a)] \quad \textit{ако је } f \textit{ опадајућа}.$$

Став 8. *Нека је* I *интервал и* $f : I \to J$ *строго монотона и непрекидна функција, где је* $J = f(I)$*. Тада је и* $f^{-1} : J \to I$ *добро дефинисана и непрекидна.*

Извод функције

Дефиниција 5. *Функција $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ је* ***диференцијабилна у тачки*** $x_0 \in (a, b)$ *ако постоји коначан лимес*

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \begin{pmatrix} \text{смена} \\ x_0 + h = x \end{pmatrix} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Број $f'(x_0)$ зовемо ***извод функције*** f ***у тачки*** x_0.

Израз $\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$ је **прираштај функције**, док је $\Delta x_0 = (x_0 + h) - x_0 = h$ **прираштај аргумента**.

Пример 8 (Извод константне функције)**.** *Нека је $f(x) = c$, где је $c \in \mathbb{R}$. За произвољно $x \in \mathbb{R}$, по дефиницији извода имамо*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

Дакле, извод константне функције једнак је нули: $(c)' = 0$.

Пример 9 (Извод функције $f(x) = x^2$)**.** *За произвољно $x \in \mathbb{R}$, по дефиницији извода имамо*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x + h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x + h) = 2x.$$

Дакле, $(x^2)' = 2x$.

Пример 10 (Извод функције $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$)**.** *Математичком индукцијом ћемо показати да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи*

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{$*$}$$

Нека је

$$M = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{важи } (*)\}.$$

База индукције: $1 \in M$ *јер је*

$$(x)' = \lim_{h\to 0} \frac{(x + h) - x}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1.$$

Индуктивна хипотеза: *претпоставимо да $n \in M$, тј. за свако $x \in \mathbb{R}$ важи*

$$(x^n)' = \lim_{h\to 0} \frac{(x + h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1}.$$

Корак индукције: *проверавамо да ли $S(n) = n + 1 \in M$. За произвољно $x \in \mathbb{R}$ имамо*

$$\begin{aligned}
(x^{n+1})' &= \lim_{h\to 0} \frac{(x + h)^{n+1} - x^{n+1}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x + h)(x + h)^n - x(x + h)^n + x(x + h)^n - x \cdot x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left((x + h)^n + x\frac{(x + h)^n - x^n}{h} \right) \\
&= x^n + x \cdot \underbrace{nx^{n-1}}_{ux} = (n + 1)x^n,
\end{aligned}$$

што је и требало доказати. Дакле, $S(n) \in M$, па на основу аксиоме математичке индукције добијамо $M = \mathbb{N}$, односно $(x^n)' = nx^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$. Напоменимо да се ово тврђење могло доказати и директно по дефиницији извода, применом биномне формуле на $(x + h)^n$.

Пример 11 (Извод експоненцијалне функције)**.** *Нека је* $f(x) = a^x$*, где је* $a > 0$*,* $a \neq 1$*. За произвољно* $x \in \mathbb{R}$ *имамо*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} = a^x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}}_{=\ln a} = a^x \ln a.$$

Дакле, $(a^x)' = a^x \ln a$*. Специјално, за* $a = \mathrm{e}$ *важи* $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$*.*

Пример 12 (Извод логаритамске функције)**.** *Нека је* $f(x) = \ln x$*,* $x > 0$*. За произвољно* $x > 0$ *имамо*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln \frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} = \frac{1}{x} \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}}_{=1} = \frac{1}{x}.$$

Дакле, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$*, за* $x > 0$*.*

Пример 13 (Извод синусне функције)**.** *Нека је* $f(x) = \sin x$*. За произвољно* $x \in \mathbb{R}$*, користећи формулу за разлику синуса, добијамо*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\underbrace{\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}_{\to 1} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \right) = 1 \cdot \cos x = \cos x.$$

Дакле, $(\sin x)' = \cos x$*.*

Задатак 4. *По дефиницији наћи извод функције* $f(x) = 3^x - 5x^3$*.*

Решење. За произвољно $x \in \mathbb{R}$ имамо

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3^{x+h} - 5(x+h)^3 - 3^x + 5x^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3^x(3^h - 1) - 5(3x^2h + 3xh^2 + h^3)}{h} \\ &= 3^x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{3^h - 1}{h}}_{=\ln 3} - 5 \lim_{h\to 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3^x \ln 3 - 15x^2. \end{aligned}$$

Дакле, $f'(x) = 3^x \ln 3 - 15x^2$. □

Задатак 5. *По дефиницији наћи извод функције* $f(x) = \sqrt{x}$ *у тачки* $x = 3$*.*

Решење. Имамо

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{3+h} - \sqrt{3}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{3+h} - \sqrt{3})(\sqrt{3+h} + \sqrt{3})}{h(\sqrt{3+h} + \sqrt{3})} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{3+h} + \sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Дакле, $f'(3) = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$. □