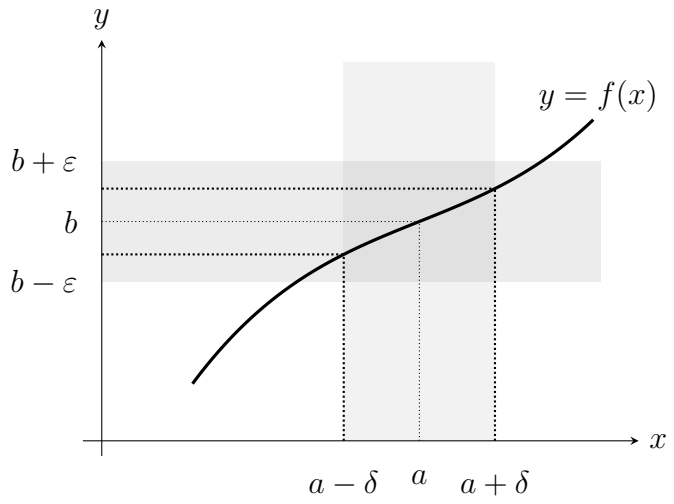
Предавање 5 - Лимес функције, непрекидност

Гранична вредност функције (лимес функције) изражава понашање функције у околини неке тачке. Број $b \in \mathbb{R}$ је лимес функције f када x тежи a ако је вредност функције произвољно близу броја b за аргументе x који су довољно близу броја a, при чему је $x \neq a$.

Дефиниција 1. *Број $b \in \mathbb{R}$ је **гранична вредност (лимес)** функције $f : D \to \mathbb{R}$ у тачки $a \in \mathbb{R}$ ако је f дефинисана у некој околини тачке a, осим евентуално у a, и важи*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) \qquad 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Пишемо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.



Приметимо да услов $0 < |x - a|$ заправо каже да f не мора бити дефинисана у тачки a у којој рачунамо лимес; довољно је да буде дефинисана у пробушеној околини те тачке.

Пример 1. *Покажимо да је* $\lim\limits_{x \to 1}(3x + 2) = 5$.

Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Тада је

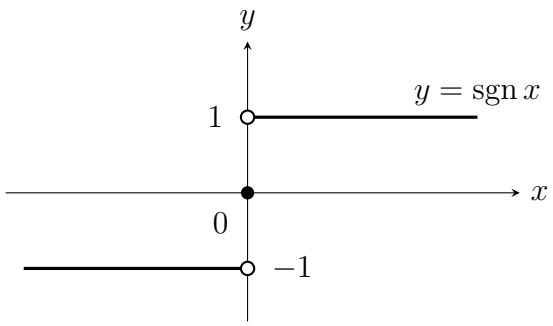
$$|(3x + 2) - 5| = |3x - 3| = 3|x - 1| < \varepsilon \quad \iff \quad |x - 1| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Дакле, можемо узети $\delta = \varepsilon/3$. За свако $\varepsilon > 0$ тада важи

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \qquad 0 < |x - 1| < \frac{\varepsilon}{3} \implies |(3x + 2) - 5| < \varepsilon.$$

Пример 2. *Функција*

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$



нема лимес када $x \to 0$.

Претпоставимо да постоји $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = b$. *Тада*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}) \qquad 0 < |x| < \delta \implies |\operatorname{sgn} x - b| < \varepsilon.$$

Узмимо $\varepsilon = 1$. Постоји $\delta > 0$ такво да за свако x за које је $0 < |x| < \delta$ важи $|\operatorname{sgn} x - b| < 1$. Ако изаберемо $x_0 = \delta/2$ и $x_1 = -\delta/2$, онда добијамо

$$|\operatorname{sgn} x_0 - b| = |1 - b| < 1 \implies -1 < 1 - b < 1 \implies 0 < b < 2,$$
$$|\operatorname{sgn} x_1 - b| = |-1 - b| < 1 \implies -1 < -1 - b < 1 \implies -2 < b < 0.$$

Добијамо $b > 0$ и $b < 0$, што је контрадикција.

У претходном примеру можемо приметити да се функција понаша различито у зависности од тога да ли се x приближава нули слева или здесна. Сходно томе, дефинишемо леви и десни лимес функције $f : D \to \mathbb{R}$ у тачки $a \in \mathbb{R}$ са

$$\lim_{x \to a-} f(x) = b \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) \quad x \in (a - \delta, a) \implies |f(x) - b| < \varepsilon,$$
$$\lim_{x \to a+} f(x) = b \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) \quad x \in (a, a + \delta) \implies |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Лимес функције f у тачки a постоји ако и само ако постоје леви и десни лимеси у тој тачки и једнаки су, тј.

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \iff \lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x) = b.$$

Пример 3. *Важи $\lim\limits_{x \to 0-} \operatorname{sgn} x = -1$ и $\lim\limits_{x \to 0+} \operatorname{sgn} x = 1$ па и одавде видимо да не постоји $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sgn} x$.*

Лимес функције у $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

Појам лимеса проширујемо и на случајеве када $x \to \pm\infty$ или када вредности функције теже $+\infty$ или $-\infty$. При томе, за $x \to +\infty$ домен функције мора бити неограничен одозго, а за $x \to -\infty$ неограничен одоздо. Тако добијамо следеће дефиниције лимеса функције $f : D \to \mathbb{R}$ у проширеном скупу реалних бројева $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \iff (\forall M \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) \quad 0 < |x - a| < \delta \implies f(x) > M,$$
$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \iff (\forall M \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) \quad 0 < |x - a| < \delta \implies f(x) < M,$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{R})(\forall x \in D) \quad x > N \implies |f(x) - b| < \varepsilon,$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{R})(\forall x \in D) \quad x < N \implies |f(x) - b| < \varepsilon,$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff (\forall M \in \mathbb{R})(\exists N \in \mathbb{R})(\forall x \in D) \quad x > N \implies f(x) > M,$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \iff (\forall M \in \mathbb{R})(\exists N \in \mathbb{R})(\forall x \in D) \quad x > N \implies f(x) < M,$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \iff (\forall M \in \mathbb{R})(\exists N \in \mathbb{R})(\forall x \in D) \quad x < N \implies f(x) > M,$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \iff (\forall M \in \mathbb{R})(\exists N \in \mathbb{R})(\forall x \in D) \quad x < N \implies f(x) < M.$$

Пример 4. *Важи $\lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ и $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{1}{x} = +\infty$.*

Покажимо да је $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{1}{x} = +\infty$. Нека је $M \in \mathbb{R}$ произвољно и изаберимо $\delta = \dfrac{1}{|M| + 1} > 0$. Тада за свако $x \in (0, \delta)$ важи

$$\frac{1}{x} > \frac{1}{\delta} = |M| + 1 > M, \quad \text{па је} \quad \lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Пример 5. *Важи $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.*

Пример 6. *Важи $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$.*

Пример 7. *Важи $\lim\limits_{x \to 0+} \ln x = -\infty$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.*

Теорема 1 (Хајнеова теорема)**.** *Лимес функције $f : D \to \mathbb{R}$ у тачки $a \in \overline{\mathbb{R}}$ једнак је $b \in \overline{\mathbb{R}}$ ако и само ако за сваки низ (x_n) из $D \setminus \{a\}$ такав да $x_n \to a$ важи $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = b$.*

Да бисмо показали да неки лимес не постоји, довољно је наћи два низа са истим лимесом, али различитим лимесима слика, или један низ чије слике немају лимес ни у $\overline{\mathbb{R}}$.

Пример 8. *Докажимо да не постоји* $\lim\limits_{x\to0} \sin\dfrac{1}{x}$.

За низове $x_n = 1/(n\pi)$ и $y_n = 1/(\pi/2 + 2n\pi)$ важи $x_n \to 0$, $y_n \to 0$, али

$$\sin\frac{1}{x_n} = \sin(n\pi) = 0 \to 0, \qquad \sin\frac{1}{y_n} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1 \to 1.$$

Зато посматрани лимес не постоји.

Особине лимеса

Став 1. *Ако постоји* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$*, тада је он јединствен.*

Доказ. Претпоставимо да постоје два лимеса b_1 и b_2, $b_1 \neq b_2$. Узмимо $\varepsilon = |b_1 - b_2|/2$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = b_1 \;\Rightarrow\; (\exists\delta_1 > 0)(\forall x \in D)\; 0 < |x-a| < \delta_1 \;\Rightarrow\; |f(x) - b_1| < \varepsilon,$$
$$\lim_{x\to a} f(x) = b_2 \;\Rightarrow\; (\exists\delta_2 > 0)(\forall x \in D)\; 0 < |x-a| < \delta_2 \;\Rightarrow\; |f(x) - b_2| < \varepsilon.$$

Дакле, за $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} \Rightarrow (\forall x \in D)\; 0 < |x-a| < \delta$ важи

$$f(x) \in (b_1 - \varepsilon, b_1 + \varepsilon) \cap (b_2 - \varepsilon, b_2 + \varepsilon) = \varnothing.$$

Контрадикција. □

Став 2. *Нека f и g имају коначне лимесе када $x \to a$. Тада је:*

1. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$;
2. $\lim\limits_{x\to a}(c\, f(x)) = c \lim\limits_{x\to a} f(x)$, *за* $c \in \mathbb{R}$;
3. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$;
4. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, *ако је* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$.

Теорема 2 (О два полицајца)**.** *Нека је* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = b$*. Ако постоји $\delta > 0$ такво да је*

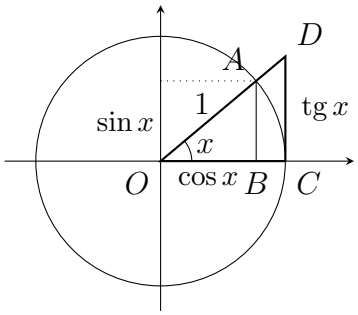
$$g(x) \le f(x) \le h(x), \qquad \forall x \in D \cap \big((a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)\big),$$

онда је и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Доказ. Потпуно аналогно доказу за низове. □

Пример 9. *Покажимо да је* $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Посматрамо $x \in (0, \pi/2)$, при чему је угао x изражен у радијанима. У јединичном кругу нека је O центар, $C = (1, 0)$, $A = (\cos x, \sin x)$, $B = (\cos x, 0)$, а D пресек полуправе OA са тангентом у C. Тада је $AB = \sin x$, дужина лука $\widehat{AC}$ једнака је x, а $CD = \operatorname{tg} x$.



Поређењем површина троугла OCA, кружног исечка OCA и троугла OCD добијамо

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x, \qquad \textit{односно} \qquad \sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Дељењем са $\sin x > 0$ следи

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \quad \textit{па из реципрочних вредности} \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Како је $\lim\limits_{x\to 0+} \cos x = 1$, на основу теореме о два полицајца добијамо $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

За негативно x, тј. када $x \to 0-$, узмемо $t = -x > 0$ и имамо

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{t\to 0+} \frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{t\to 0+} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

Пошто се леви и десни лимес поклапају, следи $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Пример 10. *Важни лимеси:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \qquad \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha,$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Непрекидност функције

Дефиниција 2. *Функција $f : D \to \mathbb{R}$ је **непрекидна у тачки** $a \in D$ ако*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) \qquad |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Другим речима, ако је a тачка нагомилавања домена, f је непрекидна у a ако и само ако је

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) = f\left(\lim_{x\to a} x\right).$$

Дефиниција 3. *Функција $f : D \to \mathbb{R}$ је **непрекидна на скупу** $E \subseteq D$ ако је непрекидна у свакој тачки скупа E. Функција f је **непрекидна** ако је непрекидна у свакој тачки свог домена.*

Пример 11. *Функција $f(x) = 2x + 3$ је непрекидна на $\mathbb{R}$.*

Нека је $a \in \mathbb{R}$ произвољна тачка и $\varepsilon > 0$ произвољно. Тада је

$$|f(x) - f(a)| = |2x + 3 - 2a - 3| = 2|x - a| < \varepsilon$$

за $|x - a| < \delta = \varepsilon/2$.

Пример 12. *Функција $f(x) = \sin x$ је непрекидна на $\mathbb{R}$.*

Нека је $a \in \mathbb{R}$ произвољно и $\varepsilon > 0$. Тада

$$|f(x) - f(a)| = |\sin x - \sin a| = \left|2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}\right|$$
$$\leq 2\left|\sin \frac{x-a}{2}\right| \leq 2\left|\frac{x-a}{2}\right| = |x - a| < \varepsilon$$

за $|x - a| < \delta = \varepsilon$. Користили смо неједнакост $|\sin t| \leq |t|$.

Тачке прекида

Нека је функција f дефинисана у околини тачке $a \in \mathbb{R}$, осим евентуално у самој тачки a. Тада је тачка a:

1. **отклоњив прекид** ако постоје коначни једнострани лимеси и важи

$$\lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x) \neq f(a),$$

   или ако су ови лимеси једнаки, а f није дефинисана у a;

2. **прекид прве врсте** ако постоје коначни леви и десни лимес, али нису једнаки:

$$\lim_{x \to a-} f(x) \neq \lim_{x \to a+} f(x);$$

3. **прекид друге врсте** ако је бар један од једностраних лимеса бесконачан или не постоји.

Пример 13. *Функција* $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ *има отклоњив прекид у* $x = 0$*, јер је*

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = 1 = \lim_{x \to 0+} f(x),$$

али f *није дефинисана у нули. Прекид отклањамо тако што додефинишемо функцију са* $f(0) = 1$*, тј. функција*

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

је непрекидна на $\mathbb{R}$*.*

Пример 14. *Функција* $f(x) = \operatorname{sgn} x$ *има прекид прве врсте у* $x = 0$*, јер је*

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = -1 \neq 1 = \lim_{x \to 0+} f(x).$$

Пример 15. *Функција* $f(x) = \frac{1}{x}$ *има прекид друге врсте у* $x = 0$*, јер је*

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = -\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x \to 0+} f(x) = +\infty.$$

Пример 16. *Функција*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \sin \dfrac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

има прекид друге врсте у $x = 0$*, јер не постоји* $\lim_{x \to 0+} f(x)$*.*

Пример 17. *Функција*

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

је непрекидна у $x = 0$*. Како је* $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$*, за свако* $x \neq 0$ *важи*

$$-|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x|.$$

На основу теореме о два полицајца добијамо

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0),$$

па је f *непрекидна у нули.*

Пример 18 (Дирихлеова функција)**.** *Функција*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

има прекид друге врсте у свакој тачки, јер у свакој околини било ког реалног броја постоји бесконачно много рационалних и ирационалних бројева. Зато се свакој тачки може прићи низовима рационалних и ирационалних бројева чије слике имају различите лимесе.

Задатак. Одредити параметар $a \in \mathbb{R}$ тако да функција

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(3x)}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

буде непрекидна на $\mathbb{R}$.

Решење. Функција f је непрекидна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ као количник непрекидних функција са ненултим имениоцем. Како је

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin(3x)}{3x} \cdot 3 \right) = 3,$$

услов непрекидности у нули је $3 = a = f(0)$. Дакле, f је непрекидна на $\mathbb{R}$ за $a = 3$. □

Задатак. Одредити параметре $a, b \in \mathbb{R}$ тако да функција

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x < 1, \\ b, & x = 1, \\ 2x + 1, & x > 1 \end{cases}$$

буде непрекидна у $x = 1$.

Решење. Функција f је непрекидна у $x = 1$ ако и само ако је

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1+} f(x) = f(1).$$

Како важи

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1-} f(x) &= \lim_{x \to 1-} (x^2 + a) = 1 + a, \\ \lim_{x \to 1+} f(x) &= \lim_{x \to 1+} (2x + 1) = 3, \\ f(1) &= b, \end{aligned}$$

добијамо да је f непрекидна у $x = 1$ ако и само ако је $1 + a = 3 = b$, одакле је $a = 2$ и $b = 3$. □