Предавање 4 - Редови

Дефиниција 1. *Нека је (a_n) низ реалних бројева. Израз*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$

зовемо ***бројни ред****, а a_n је његов* ***општи члан****. Збир првих n чланова,*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

*називамо n-****том парцијалном сумом реда****.*

Дефиниција 2. *Ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$* ***конвергира*** *ако низ његових парцијалних сума (S_n) конвергира. Његова сума је тада*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = S \in \mathbb{R}.$$

Ако је низ парцијалних сума дивергентан, ред ***дивергира****.*

Пример 1 (Геометријски ред)**.** $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots$, $q \in \mathbb{R}$.

Нека је $q \neq 1$. Означимо са S_n збир чланова са индексима од 0 до n:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n \quad \Rightarrow \; qS_n \; = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n+1}.$$

Одузимањем добијамо $S_n - qS_n = 1 - q^{n+1}$, па је

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

За геометријски низ важи: $q^n \to 0$ за $|q| < 1$, $q^n = 1$ за $q = 1$, а $q^n \to +\infty$ за $q > 1$. За $q = -1$ низ има две тачке нагомилавања, -1 и 1, док за $q < -1$ има две бесконачне тачке нагомилавања, $+\infty$ и $-\infty$. Дакле, за $|q| < 1$ имамо

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}.$$

За $q = 1$ је $S_n = n + 1 \to +\infty$, па ред дивергира. За $q > 1$ такође је $S_n \to +\infty$. За $q = -1$ парцијалне суме су $1, 0, 1, 0, \ldots$, а за $q < -1$ парцијалне суме осцилују и немају граничну вредност. Према томе, геометријски ред $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ конвергира ако и само ако је $|q| < 1$.

Пример 2 (Зенонов парадокс: Ахил и корњача)**.** *Ахил се налази 100 m иза корњаче, а десет пута је бржи од ње. Крећу у трку истовремено. Када Ахил стигне до почетног места корњаче, она је већ на новом положају, 10 m даље. Када Ахил стигне до тог положаја, корњача се опет померила итд. Према овом расуђивању, Ахил никада не стиже корњачу, јер када дође до њеног претходног места, она је већ променила положај.*

Објашњење. Да би стигао корњачу, Ахил мора долазити до њених претходних „пролазних" места. Дакле, он прелази

$$100 + \frac{100}{10} + \frac{100}{10^2} + \frac{100}{10^3} + \cdots = 100\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots\right) = 100\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n$$

$$= 100 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1000}{9}\,\mathrm{m} = 111{,}11\ldots\,\mathrm{m}.$$

Иако се пут дели на бесконачно много деоница, Ахил ће стићи корњачу, јер је њихов укупан збир коначан, тј. тај геометријски ред конвергира. □

Пример 3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Како је $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, *добијамо да је* n*-та парцијална сума*

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Према томе,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Став 1 (Неопходан услов конвергенције)**.** *Ако ред* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *конвергира, онда је* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Доказ. Нека је $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S = \lim_{n\to+\infty} S_n$. Како је $a_n = S_n - S_{n-1}$ за $n \geq 2$, имамо

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

□

Услов $a_n \to 0$ је неопходан, али није довољан. Ако a_n не тежи нули, ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира; ако је $a_n \to 0$, још не знамо да ли ред конвергира.

Пример 4. *Ред* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ *дивергира, јер је* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1 \neq 0$.

Пример 5 (Хармонијски ред)**.** *Ред* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ *дивергира.*

Низ парцијалних сума $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ *строго је растући. За његов подниз* (S_{2^m}), $m \geq 2$, *важи*

$$\begin{aligned} S_{2^m} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^m}\right) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)}_{2\text{ члана}} + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)}_{4\text{ члана}} + \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^m} + \cdots + \frac{1}{2^m}\right)}_{2^{m-1}\text{ чланова}} \\ &= 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{m\text{ сабирака}} = 1 + \frac{m}{2}. \end{aligned}$$

Дакле, $S_{2^m} \to +\infty$. *Како је* (S_n) *растући, следи* $S_n \to +\infty$, *па хармонијски ред дивергира, иако је* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. *Ово потврђује да услов* $a_n \to 0$ *није довољан за конвергенцију реда.*

Напомена. *Ред* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ *конвергира за* $\alpha > 1$, *а дивергира за* $\alpha \leq 1$.

Критеријуми конвергенције редова са позитивним члановима

Посматрамо ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где је $a_n \geq 0$. Приметимо да је низ парцијалних сума растући, па је за конвергенцију реда довољно да је низ парцијалних сума ограничен одозго.

Став 2 (Први поредбени критеријум)**.** *Нека за све довољно велике n важи $0 \leq a_n \leq b_n$. Тада:*

1. *ако $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергира, онда и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира;*
2. *ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира, онда и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ дивергира.*

Доказ. Без умањења општости можемо претпоставити да је $0 \leq a_n \leq b_n$ за свако n, јер промена коначно много чланова не утиче на конвергенцију. Тада је

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Ако је низ $\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$ ограничен одозго, онда је и низ $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$ ограничен одозго, па важи прва тврдња. Ако је низ парцијалних сума реда $\sum a_n$ неограничен, онда је неограничен и низ парцијалних сума реда $\sum b_n$, па важи и друга тврдња. □

Пример 6. *За $\alpha \leq 1$ важи $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^{\alpha}}$. Како хармонијски ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ дивергира, по првом поредбеном критеријуму дивергира и ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ за $\alpha \leq 1$.*

Пример 7. *Важи $\frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)}$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Како ред $2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ конвергира, по првом поредбеном критеријуму конвергира и ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.*

Став 3 (Други поредбени критеријум)**.** *Нека су $a_n \geq 0$ и $b_n > 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и нека је*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = L, \qquad 0 < L < +\infty.$$

Тада су редови $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ еквиконвергентни, тј. оба конвергирају или оба дивергирају.

Доказ. Како је $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$, за свако $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да за $n > n_0$ важи $\left|\frac{a_n}{b_n} - L\right| < \varepsilon$, тј. $\frac{a_n}{b_n} \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. За $\varepsilon = \frac{L}{2}$ добијамо

$$\frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3L}{2}, \qquad \text{па је} \qquad \frac{L}{2} b_n < a_n < \frac{3L}{2} b_n.$$

На основу првог поредбеног критеријума следи тврђење. □

Пример 8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{n^3+2}$.

Означимо $a_n=\dfrac{3n+1}{n^3+2}$ *и нека је* $b_n=\dfrac{1}{n^2}$. *Тада је*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3n^3+n^2}{n^3+2}=3.$$

Како ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ *конвергира, по другом поредбеном критеријуму конвергира и ред* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{n^3+2}$.

Став 4 (Даламберов критеријум)**.** *Нека је* $a_n>0$ *и нека постоји* $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$. *Тада:*

1. *ако је* $q<1$, *ред* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *конвергира;*
2. *ако је* $q>1$, *ред* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *дивергира;*
3. *ако је* $q=1$, *критеријум не даје одговор.*

Доказ. Нека је $q<1$ и изаберимо r тако да је $q<r<1$. Из $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$ следи да за све довољно велике n, рецимо $n\geq n_0$, важи $a_{n+1}\leq ra_n$. Индукцијом добијамо

$$a_{n_0+k}\leq a_{n_0}r^k,\qquad k\geq 0.$$

Како геометријски ред $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}a_{n_0}r^k$ конвергира, на основу првог поредбеног критеријума конвергира и полазни ред.

Ако је $q>1$, за све довољно велике n важи $a_{n+1}>a_n$. Чланови су позитивни и од неког места растући, па не могу тежити нули. Према неопходном услову конвергенције, ред дивергира. □

Пример 9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$

Како је $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}<1$, *ред конвергира.*

Пример 10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n}$

Како је $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}}{\frac{n!}{3^n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{3}=+\infty>1$, *ред дивергира.*

Став 5 (Кошијев корени критеријум)**.** *Нека је* $a_n\geq 0$ *и нека постоји* $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$ *(допуштамо и* $q=+\infty$*). Тада:*

1. *ако је* $q<1$, *ред* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *конвергира;*
2. *ако је* $q>1$, *ред* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *дивергира;*
3. *ако је* $q=1$, *критеријум не даје одговор.*

Доказ. Нека је $q < 1$ и изаберимо r тако да је $q < r < 1$. За све довољно велике n имамо $\sqrt[n]{a_n} \leq r$, па је $a_n \leq r^n$. Како геометријски ред $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ конвергира, по првом поредбеном критеријуму конвергира и ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Ако је $q > 1$, за све довољно велике n важи $\sqrt[n]{a_n} > 1$, па је и $a_n > 1$. Самим тим a_n не тежи нули, па ред дивергира. □

Пример 11. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2+3}{2n^2+1}\right)^n$

Како је $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2+3}{2n^2+1} = \frac{3}{2} > 1$, *ред дивергира.*

Пример 12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$

Како је $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{3^n}} = \frac{1}{3} < 1$, *ред конвергира.*

Напомена. *Даламберов критеријум је често погодан када имамо факторијеле или степене, а Кошијев корени критеријум када је општи члан задат као n-ти степен. За рационалне и ирационалне изразе најчешће користимо поредбене критеријуме. На пример, дивергенцију реда* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *и конвергенцију реда* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *не разликују ни Кошијев ни Даламберов критеријум: у оба случаја добија се* $q = 1$.

Апсолутна и условна конвергенција редова

Сада посматрамо редове чији чланови могу бити произвољног знака.

Дефиниција 3. *Ред* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ***апсолутно конвергира*** *ако конвергира ред* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Ред је ***условно конвергентан*** *ако* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *конвергира, а* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *дивергира.*

Став 6. *Ако ред* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *апсолутно конвергира, онда он конвергира.*

Доказ. Нека ред $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ конвергира, тј. $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} |a_k| = S_1 \in \mathbb{R}$. Како је $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$, на основу првог поредбеног критеријума конвергира и ред $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|)$, па је $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n}(a_k + |a_k|) = S_2 \in \mathbb{R}$. Како је

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(a_k + |a_k|) - \sum_{k=1}^{n} |a_k|,$$

преласком на граничну вредност добијамо

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n}(a_k + |a_k|) - \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} |a_k| = S_2 - S_1 \in \mathbb{R}.$$

Дакле, и ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира. □

Пример 13. *Ред* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ *апсолутно конвергира, јер конвергира ред* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Пример 14. *Ред* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ *апсолутно конвергира. Заиста,* $0 \leq \frac{|\sin n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$, *а ред* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *конвергира. По првом поредбеном критеријуму конвергира и ред* $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n^2} \right|$.

Алтернирајући редови

Дефиниција 4. *Ред облика* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$, *где је* $a_n \geq 0$, *зове се* ***алтернирајући ред***.

Став 7 (Лајбницов критеријум)**.** *Ако је* (a_n) *опадајући низ ненегативних бројева и* $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$, *онда алтернирајући ред* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ *конвергира.*

Доказ. Посматрамо парне парцијалне суме

$$S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2m-1} - a_{2m}).$$

Како је (a_n) опадајући низ, важи $S_{2m+2} - S_{2m} = a_{2m+1} - a_{2m+2} \geq 0$, па је низ парних парцијалних сума (S_{2m}) растући. С друге стране,

$$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m} \leq a_1.$$

Дакле, низ (S_{2m}) је и ограничен одозго, па конвергира. Нека је $S = \lim_{m \to +\infty} S_{2m}$. За непарне парцијалне суме имамо $S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$, па је

$$\lim_{m \to +\infty} S_{2m+1} = \lim_{m \to +\infty} S_{2m} + \lim_{m \to +\infty} a_{2m+1} = S + 0 = S.$$

Како парни и непарни подниз парцијалних сума имају исту граничну вредност, следи $S_n \to S$, па ред конвергира. □

Пример 15. *Ред* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ *конвергира по Лајбницовом критеријуму, јер је низ* $\left(\frac{1}{n}\right)$ *опадајући и* $\frac{1}{n} \to 0$. *Како хармонијски ред* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *дивергира, полазни ред је условно конвергентан.*

Пример 16. *Ред* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n+1}$ *дивергира, јер његов општи члан не тежи нули:*

$$\left| (-1)^{n-1} \frac{n}{n+1} \right| = \frac{n}{n+1} \to 1.$$