

Предавање ③ - Низови

Дефиниција 1. *Низ реалних бројева је функција $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Вредност $a(n)$ означавамо са a_n и зовемо n -ти члан низа. За низ ћемо користити ознаку (a_n) .*

Низове задајемо на три начина:

1. пописивањем елемената: $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$;
2. формулом општег члана a_n ;
3. рекурентном формулом, уз задавање почетних чланова.

Пример 1. *Низ задат општим чланом $a_n = 2n - 1$ би се пописивањем елемената задао са $1, 3, 5, 7, \dots$, или рекурентном формулом $a_{n+1} = a_n + 2$, $a_1 = 1$.*

Пример 2. *Низ $a_n = \frac{n}{n+1}$ је $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \dots$*

Ограниченост и монотоност

Дефиниција 2. *Низ (a_n) је ограничен одозго ако постоји $M \in \mathbb{R}$ тако да је $a_n \leq M$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Низ је ограничен одоздо ако постоји $m \in \mathbb{R}$ тако да је $m \leq a_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Низ (a_n) је ограничен ако је ограничен и одозго и одоздо, односно ако*

$$(\exists C > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |a_n| \leq C.$$

Дефиниција 3. *Низ (a_n) је:*

1. **растући** ако је $a_n \leq a_{n+1}$ за свако $n \in \mathbb{N}$, односно $a_{n+1} - a_n \geq 0$;
2. **строго растући** ако је $a_n < a_{n+1}$ за свако $n \in \mathbb{N}$, односно $a_{n+1} - a_n > 0$;
3. **опadaјући** ако је $a_n \geq a_{n+1}$ за свако $n \in \mathbb{N}$, односно $a_{n+1} - a_n \leq 0$;
4. **строго опadaјући** ако је $a_n > a_{n+1}$ за свако $n \in \mathbb{N}$, односно $a_{n+1} - a_n < 0$.

Једним именом овакве низове зовемо **монотони**.

Пример 3.

1. Низ $a_n = \frac{1}{n}$, тј. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$, строго је опadaјући, јер је $a_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = a_{n+1}$.
Ограничен је, јер је $|a_n| \leq 1$.
2. Низ $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, тј. $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots$, није монотон, али јесте ограничен, јер је $|a_n| \leq 1$.
3. Низ $a_n = n^3 + 3$, тј. $4, 11, 30, 67, 128, \dots$, строго је растући, јер је $a_n < a_{n+1}$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Није ограничен одозго, па није ограничен.
4. Низ $a_n = (-1)^n n$ није ни монотон ни ограничен.

Задатак 1. *Да ли је низ $a_n = \frac{n}{n+1}$ монотон и ограничен?*

Решење. Како је

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0,$$

низ (a_n) је строго растући. Из $0 < a_n < 1$ следи да је и ограничен. □

Гранична вредност низа

Приметимо да се за низ $a_n = \frac{1}{n}$ чланови приближавају нули, а за низ $a_n = \frac{n}{n+1}$ чланови се приближавају јединици. Оно што нас занима је да ли су сви „довољно касни” чланови произвољно близу једном броју.

Дефиниција 4. Број $a \in \mathbb{R}$ је **гранична вредност** или **лимес** низа (a_n) ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n > n_0 \implies |a_n - a| < \varepsilon.$$

Пишемо $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ или $a_n \rightarrow a$ и кажемо да (a_n) **конвергира** ка a . Низ који нема граничну вредност или она није коначна зовемо **дивергентан** низ.

Из дефиниције лимеса закључујемо да се у свакој ε -околини тачке a , тј. у интервалу $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, налази бесконачно много чланова низа, док се ван те околине налази коначно много чланова. Број n_0 зависи од ε .

Пример 4. Докажимо да је $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Доказ. Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Тражимо n_0 тако да за $n > n_0$ важи

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon \iff \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Узмимо $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$, где је $\lfloor x \rfloor$ цео део броја x , тј. највећи цео број који није већи од x . За овако изабрано n_0 важи тврђење. $\square$

Пример 5. Такође је $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$, јер је $\left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n}$. Одавде видимо да конвергентан низ не мора бити монотон.

Дефиниција 5. Низ (a_n) **дивергира према** $+\infty$, тј. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$, ако

$$(\forall M \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n > n_0 \implies a_n > M.$$

Низ (a_n) **дивергира према** $-\infty$, тј. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$, ако

$$(\forall M \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n > n_0 \implies a_n < M.$$

Пример 6. Важи $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$ и $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-n) = -\infty$.

Доказ. Нека је $M \in \mathbb{R}$ произвољно. За први лимес тражимо $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да за $n > n_0$ важи $n^3 > M$, тј. $n > \sqrt[3]{M}$. Можемо узети $n_0 = \max\{1, \lfloor \sqrt[3]{M} \rfloor + 1\}$. За други лимес довољно је узети $n_0 = \max\{1, \lfloor -M \rfloor + 1\}$: тада из $n > n_0$ следи $-n < M$. $\square$

Став 1. Ако низ има граничну вредност, онда је она јединствена.

Доказ. Претпоставимо супротно: нека низ (a_n) има две граничне вредности a и b , $a \neq b$. Изаберимо $\varepsilon = \frac{|a - b|}{2}$. Тада се околине $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ и $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ не секу. По дефиницији лимеса, за довољно велико n_0 , сви чланови a_n , $n > n_0$, морају припадати и једној и другој околини, што је контрадикција. $\square$

Став 2. Сваки конвергентан низ је ограничен.

Доказ. Нека је $a \in \mathbb{R}$ гранична вредност низа (a_n) . За $\varepsilon = 1$ изаберимо $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да је $|a_n - a| < 1$ за све $n > n_0$. Сада међу коначно много бројева $a_1, a_2, \dots, a_{n_0}, a - 1$ и $a + 1$ можемо одредити онај са највећом апсолутном вредношћу M . Тада је $|a_n| \leq M$ за свако $n \in \mathbb{N}$, па је (a_n) ограничен. $\square$

Пример 7. *Обрнуто не важи: низ $a_n = (-1)^n$ је ограничен, али није конвергентан.*

Дефиниција 6. *Супремум непразног, одозго ограниченог скупа $A \subseteq \mathbb{R}$ је његово најмање горње ограничење, односно најмањи реалан број s за који важи $a \leq s$ за свако $a \in A$. Ознака је $s = \sup A$.*

Основно својство реалних бројева је да сваки такав скуп има супремум у $\mathbb{R}$.

Став 3. *Монотон и ограничен низ је конвергентан.*

Доказ. Претпоставимо да је низ (a_n) растући и нека је $a = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Из ограничености следи да је $a < +\infty$. За свако $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да је $a_{n_0} > a - \varepsilon$. У супротном би $a - \varepsilon$ било горње ограничење мање од a . Како је низ растући, за свако $n > n_0$ важи

$$a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a < a + \varepsilon.$$

Према томе, $|a_n - a| < \varepsilon$ за свако $n > n_0$, па је $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$. За опадајући низ (a_n) низ $(-a_n)$ је растући и ограничен, па се тврђење добија на исти начин. $\square$

Напомена. *За претходни став довољно је да је низ растући и ограничен одозго, или опадајући и ограничен одоздо.*

Пример 8. *Низ $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ је монотон и ограничен.*

Доказ. Најпре доказујемо монотоност. Користимо раније доказану Бернулијеву неједнакост $(1 + \beta)^n \geq 1 + n\beta$, за $n \in \mathbb{N}$ и $\beta > -1$, при чему једнакост важи само за $n = 1$ или $\beta = 0$. Како је

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} \\ &= \frac{n+1}{n} \cdot \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{n} \left(\frac{n^2 + 2n + 1 - 1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \\ &= \frac{n+1}{n} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \stackrel{\text{Б. неј.}}{>} \frac{n+1}{n} \left(1 + (n+1) \cdot \frac{-1}{(n+1)^2}\right) \\ &= \frac{n+1}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1-1}{n+1} = 1, \end{aligned}$$

добивамо

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \text{за свако } n \in \mathbb{N}.$$

Дакле, $a_{n+1} > a_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$, па је (a_n) строго растући низ.

За ограниченост посматрамо помоћни низ $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Очигледно је $b_n > a_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Поново по Бернулијевој неједнакости,

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \cdot \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n+1}{n+2} \left(\frac{n(n+2)+1}{n(n+2)} \right)^{n+1} = \frac{n+1}{n+2} \left(1 + \frac{1}{n(n+2)} \right)^{n+1} \\
&\stackrel{\text{Б. неј.}}{>} \frac{n+1}{n+2} \left(1 + \frac{n+1}{n(n+2)} \right) = \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{n(n+2)+n+1}{n(n+2)} = \frac{(n+1)(n^2+3n+1)}{n(n+2)^2} \\
&= \frac{n^3+3n^2+n+n^2+3n+1}{n(n+2)^2} = \frac{n(n+2)^2+1}{n(n+2)^2} = 1 + \frac{1}{n(n+2)^2} > 1.
\end{aligned}$$

Следи да је $b_n > b_{n+1}$ за свако $n \in \mathbb{N}$, па је (b_n) опадајући низ. Дакле,

$$0 < a_n < b_n \leq b_1 = 4,$$

па је (a_n) ограничен. Како је монотон и ограничен, низ (a_n) је конвергентан. Његову граничну вредност означавамо са e , тј.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e \approx 2,718281828459045\dots$$

□

Тачке нагомилавања низа и подниз

Дефиниција 7. Број $b \in \mathbb{R}$ је **тачка нагомилавања** низа (a_n) ако се у свакој околини броја b налази бесконачно много чланова низа (a_n) , тј. ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}) \quad m > n \wedge |a_m - b| < \varepsilon.$$

Кажемо да је $+\infty$ **тачка нагомилавања** низа (a_n) ако

$$(\forall M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}) \quad m > n \wedge a_m > M,$$

а да је $-\infty$ **тачка нагомилавања** ако

$$(\forall M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}) \quad m > n \wedge a_m < M.$$

Највећа точка нагомилавања зове се **лимес супериор** и обележава се $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$, а најмања точка нагомилавања је **лимес инфериор** и обележава се $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n$. Овде допуштамо и вредности $-\infty$ и $+\infty$.

Пример 9. Низ $a_n = (-1)^n$, тј. $-1, 1, -1, 1, \dots$, има две тачке нагомилавања, -1 и 1 , али нема лимес. Дакле, ван околине тачке нагомилавања може се налазити бесконачно много чланова низа, као и у самој околини. Важно

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1, \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -1.$$

Ако је низ конвергентан, онда је

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n,$$

тј, низ неконвергира ако и само ако има тачно једну тачку нагомилавања у $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ и та тачка је коначна.

Пример 10. Низ $a_n = (1 + (-1)^n)n^2$, тј. $0, 8, 0, 32, 0, 72, \dots$, има две тачке нагомилавања: 0 и $+\infty$.

Пример 11. Низ дат са $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ има бесконачно много коначних тачака нагомилавања: то су сви елементи скупа $\mathbb{N}$. Поред њих, и $+\infty$ је тачка нагомилавања.

Задатак 2. Навести пример низа који има n коначних тачака нагомилавања, где је $n \in \mathbb{N}$.

Решење. Узмимо низ $1, 2, 3, \dots, n, 1, 2, 3, \dots, n, 1, 2, 3, \dots, n, \dots$. Сваки од бројева $1, 2, \dots, n$ појављује се бесконачно много пута, па је тачка нагомилавања. Других тачака нагомилавања нема. $\square$

Пример 12. Посматрајмо геометријски низ $a_n = q^n$, где је $q \in \mathbb{R}$. За $|q| < 1$ важи $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$. За $q = 1$ низ је константан, $1, 1, 1, \dots$, и конвергира ка 1. За $q = -1$ има две тачке нагомилавања, 1 и -1 . За $|q| > 1$ низ дивергира: за $q > 1$ дивергира ка $+\infty$, а за $q < -1$ има две тачке нагомилавања, $+\infty$ и $-\infty$.

Дефиниција 8. *Подниз* низа $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ је свака композиција $a \circ \alpha$, где је $\alpha: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ строго растућа функција. Ако означимо $n_k = \alpha(k)$, k -ти члан подниза је

$$(a \circ \alpha)(k) = a(\alpha(k)) = a_{\alpha(k)} = a_{n_k}.$$

Пример 13. Посматрајмо низ $a_n = (-1)^n$. Подниз (a_{2n}) , тј. $1, 1, 1, \dots$, константан је, као и подниз (a_{2n-1}) , тј. $-1, -1, -1, \dots$.

Број $b \in \mathbb{R}$ је тачка нагомилавања низа (a_n) ако и само ако постоји бар један подниз (a_{n_k}) који конвергира према b .

Ако је низ (a_n) конвергентан, онда за сваки његов подниз важи

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

Став 4. Сваки низ има монотон подниз.

Доказ. За дати низ (a_n) дефинишемо скуп

$$A = \{m \in \mathbb{N} \mid (\forall n \geq m) a_n \geq a_m\}.$$

Скуп A може бити бесконачан или коначан.

1. Ако је A бесконачан, у њему можемо одабрати строго растући низ индекса $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$. По дефиницији скупа A важи $a_{n_1} \leq a_{n_2} \leq \dots \leq a_{n_k} \leq \dots$. Дакле, (a_{n_k}) је монотон (растући) подниз.
2. Ако је A коначан, изаберимо $n_1 \in \mathbb{N}$ тако да је $n_1 > m$ за свако $m \in A$. Како $n_1 \notin A$, постоји $n_2 > n_1$ тако да је $a_{n_2} < a_{n_1}$. Такође је $n_2 \notin A$. Понављајући овај поступак добијамо $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ такве да је $a_{n_1} > a_{n_2} > a_{n_3} > \dots$. Према томе, (a_{n_k}) је монотон (строго опадајући) подниз низа (a_n) .

$\square$

Теорема 1 (Болцано–Вајерштрас). Сваки ограничен низ има конвергентан подниз.

Доказ. Сваки низ има монотон подниз. Како је дати низ ограничен, ограничен је и тај подниз. Добијамо монотон и ограничен подниз, па је он конвергентан. $\square$

Теорема 2 (О два полицајца). Ако за низове (a_n) , (b_n) и (c_n) постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да за свако $n > n_0$ важи $a_n \leq b_n \leq c_n$ и ако је $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = b$, онда је и $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$.

Доказ. Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Како је $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = b$, постоји $n_1 \in \mathbb{N}$ тако да за свако $n > n_1$ важи $|a_n - b| < \varepsilon$, тј. $a_n \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$. Такође, из $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = b$ следи да постоји $n_2 \in \mathbb{N}$ тако да за свако $n > n_2$ важи $|c_n - b| < \varepsilon$, тј. $c_n \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$. Тада за $\bar{n}_0 = \max\{n_0, n_1, n_2\}$ и свако $n > \bar{n}_0$ имамо

$$b - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < b + \varepsilon,$$

па је $|b_n - b| < \varepsilon$. Дакле, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$. □

Пример 14. Докажимо да је $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos n}{n} = 0$.

Доказ. Како је $-1 \leq \cos n \leq 1$ за свако $n \in \mathbb{N}$, добијамо

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Из $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}$, по теореме о два полицајца, следи $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos n}{n} = 0$. □

Пример 15. Израчунати $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$, ако је

$$a_n = \frac{n}{n^3 + 1} + \frac{n}{n^3 + 2} + \cdots + \frac{n}{n^3 + n}, \quad n \geq 1.$$

Доказ. Збир који посматрамо има n сабирака. Најмањи сабирак је $\frac{n}{n^3 + n}$, а највећи је $\frac{n}{n^3 + 1}$, јер су бројоци исти и позитивни, па већи именилац даје мањи разломак.

Ако сваки сабирак заменимо најмањим, добијамо збир који је мањи или једнак почетном. Ако сваки сабирак заменимо највећим, добијамо збир који је већи или једнак почетном. Зато је

$$\underbrace{\frac{n}{n^3 + n} + \cdots + \frac{n}{n^3 + n}}_{n \text{ сабирака}} \leq a_n \leq \underbrace{\frac{n}{n^3 + 1} + \cdots + \frac{n}{n^3 + 1}}_{n \text{ сабирака}},$$

односно

$$n \cdot \frac{n}{n^3 + n} \leq a_n \leq n \cdot \frac{n}{n^3 + 1}.$$

Дакле, доњу границу добијамо као број сабирака пута најмањи сабирак, а горњу као број сабирака пута највећи сабирак.

Како је

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^3 + n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^3 + 1} = 0,$$

по теореме о два полицајца следи

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

□