

Предавање 2 - Релације, скупови бројева, математичка индукција

1 Релације

Нека је ρ бинарна релација на скупу A . Најпре ћемо се подсетити особина релације ρ :

1. **Рефлексивност:** $a\rho a$, за свако $a \in A$.
2. **Симетричност:** $a\rho b \Rightarrow b\rho a$, за све $a, b \in A$.
3. **Антисиметричност:** $(a\rho b \text{ и } b\rho a) \Rightarrow a = b$, за све $a, b \in A$.
4. **Транзитивност:** $(a\rho b \text{ и } b\rho c) \Rightarrow a\rho c$, за све $a, b, c \in A$.

Дефиниција 1. Релација ρ је релација еквиваленције ако је рефлексивна, симетрична и транзитивна. За релација еквиваленције ρ на A и $a \in A$ дефинишемо класу еквиваленције елемента a са

$$[a] = \{x \in A \mid x\rho a\}.$$

Пример 1. Нека је $A = \{a, b, c\}$ и $\rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (c, a)\}$. Релација ρ је релација еквиваленције, па је $[a] = [c] = \{a, c\}$ и $[b] = \{b\}$.

Пример 2. Релација на $\mathbb{Z}$ задата условом $a\rho b \iff a - b$ је паран број јесте релација еквиваленције. Тако је $1\rho 3$ и $2\rho 6$, али $3 \not\rho 2$ и $4 \not\rho 1$. Класе еквиваленције су

$$[0] = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}, \quad [1] = \{\dots, -3, -1, 1, 3, \dots\}.$$

Пример 3. Нека је S скуп студената. Релација ρ на S , задата условом да је $a\rho b$ ако и само ако су a и b рођени истог дана, јесте релација еквиваленције.

Дефиниција 2. Релација ρ је релација парцијалног поретка ако је рефлексивна, антисиметрична и транзитивна. Релација ρ парцијалног поретка је **тотални поредак** ако су свака два елемента упоредива: за све $x, y \in A$ важи $x\rho y$ или $y\rho x$.

Пример 4.

1. Релација $\leq$ је релација тоталног поретка на $\mathbb{R}$.
2. Релација $\subseteq$ на $\mathcal{P}(A)$ је парцијални поредак, али у општем случају није тотални. На пример, за $A = \{1, 2\}$ важи $\{1\} \not\subseteq \{2\}$ и $\{2\} \not\subseteq \{1\}$, па $\{1\}$ и $\{2\}$ нису упоредиви.

Пример 5. Релација једнакости $x\rho y \iff x = y$ на скупу $\mathbb{R}$ је и релација еквиваленције и парцијалног поретка: рефлексивна, симетрична, антисиметрична и транзитивна. Специјално, и симетрична и антисиметрична!

Задатак. Дати су скупови $A = \{1, 3\}$ и $B = \{s, p, 3\}$. Наћи $A \times B$ и $B \times A$, као и њихов пресек. Навести пример релације на скупу B која је рефлексивна, симетрична и није транзитивна, као и пример бар по једне функције (ако постоји): $f : A \rightarrow B$ која је “1 – 1”, $g : A \rightarrow B$ која је “на” и $h : A \rightarrow A$ која је бијекција.

Решење. Имамо

$$\begin{aligned}A \times B &= \{(1, s), (1, p), (1, 3), (3, s), (3, p), (3, 3)\}, \\B \times A &= \{(s, 1), (s, 3), (p, 1), (p, 3), (3, 1), (3, 3)\}, \\(A \times B) \cap (B \times A) &= \{(3, 3)\}.\end{aligned}$$

Један пример тражене релације је

$$\rho = \{(s, s), (p, p), (3, 3), (s, p), (p, s), (p, 3), (3, p)\}.$$

Она је рефлексивна и симетрична, али није транзитивна, јер је $s\rho p$ и $p\rho 3$, док $s \not\rho 3$. Функција f постоји: $f(1) = s$, $f(3) = 3$. Функција g не постоји јер је $|A| < |B|$. Функција h постоји: $h(1) = 3$, $h(3) = 1$. $\square$

Пример 6. На скупу $A = \{a, b, c, d\}$ дата је релација табелом

ρ	a	b	c	d
a	1	0	1	0
b	0	1	0	0
c	1	0	1	1
d	0	0	1	1

Релација је рефлексивна (на дијагонали су јединице) и симетрична (таблица је симетрична). Није антисиметрична јер је $a\rho c$ и $c\rho a$, али $a \neq c$. Није транзитивна јер је $a\rho c$ и $c\rho d$, али $a \not\rho d$.

2 Природни бројеви и математичка индукција

Скуп природних бројева је $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$. Можемо га задати и Пеановим аксиомама:

- A1.** 1 је природан број.
- A2.** Добро је дефинисано пресликавање следбеника $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, дато са $S(n) = n + 1$, тј. сваки природан број има следбеника.
- A3.** 1 није следбеник ниједног природног броја, тј. није у слици пресликавања S (не постоји $x \in \mathbb{N}$ такав да је $S(x) = 1$).
- A4.** Пресликавање S је “1–1” (различити природни бројеви имају различите следбенике).
- A5. Аксиома математичке индукције.** Нека је $M \subseteq \mathbb{N}$ такав да је $1 \in M$ (база индукције) и да из $n \in M$ (индуктивна хипотеза) следи $S(n) \in M$ (корак индукције). Тада је $M = \mathbb{N}$.

Аксиому математичке индукције ћемо користити када доказујемо да је неко тврђење тачно за све природне бројеве, што ће бити чест случај и у наставку курса.

Пример 7. Доказати да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \quad (*)$$

Доказ. Нека је

$$M = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{важи } (*)\}.$$

База индукције: $1 \in M$ јер је $1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$.

Индуктивна хипотеза: претпоставимо да $n \in M$, тј. важи $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Корак индукције: проверавамо да ли $S(n) = n + 1 \in M$. Имамо

$$\begin{aligned} \underbrace{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}_{\text{их}} + (n+1)^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{(n+1)^2[n^2 + 4(n+1)]}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}, \end{aligned}$$

што је и требало доказати. Дакле, $S(n) \in M$, па на основу аксиоме математичке индукције добијамо $M = \mathbb{N}$. $\square$

Пример 8 (Бернулијева неједнакост). *За свако $n \in \mathbb{N}$ и свако $\beta > -1$ важи*

$$(1 + \beta)^n \geq 1 + \beta n. \quad (*)$$

Доказ. Фиксирајмо произвољно $\beta > -1$ и нека је

$$M = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{важи } (*)\}.$$

База индукције: $1 \in M$ јер је $(1 + \beta)^1 = 1 + \beta \cdot 1$.

Индуктивна хипотеза: претпоставимо да $n \in M$, тј. важи $(1 + \beta)^n \geq 1 + \beta n$.

Корак индукције: проверавамо да ли $S(n) = n + 1 \in M$. Пошто је $1 + \beta > 0$, имамо

$$\begin{aligned} (1 + \beta)^{n+1} &= \underbrace{(1 + \beta)^n}_{\text{их}} (1 + \beta) \\ &\geq (1 + \beta n)(1 + \beta) \\ &= 1 + (n+1)\beta + \underbrace{n\beta^2}_{\geq 0} \\ &\geq 1 + (n+1)\beta, \end{aligned}$$

што је и требало доказати. Дакле, $S(n) \in M$, па на основу аксиоме математичке индукције добијамо $M = \mathbb{N}$. $\square$

Цели бројеви и дељивост

Скуп целих бројева је

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N}),$$

где је $-\mathbb{N} = \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Дефиниција 3. Нека су $a, b \in \mathbb{Z}$. Кажемо да a дели b , тј. b је дељив са a , и пишемо $a \mid b$ ако постоји $t \in \mathbb{Z}$ такав да је $b = at$. Природан број $p > 1$ чији су једини позитивни делιοци 1 и p је прост.

Скуп свих простих бројева $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$ је бесконачан.

Особине дељивости:

1. Транзитивност: $a \mid b$ и $b \mid c \Rightarrow a \mid c$.
2. $a \mid b$ и $a \mid c \Rightarrow a \mid b \pm c$.
3. Ако $a \mid b$, онда за свако $c \in \mathbb{Z}$ важи $a \mid bc$.
4. Ако $a \mid b_1$, $a \mid b_2$, $\dots$, $a \mid b_n$, онда за све $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{Z}$ важи $a \mid b_1c_1 + \dots + b_nc_n$.

Дефиниција 4. Највећи заједнички делилац целих бројева a и b је природан број $d = \text{NZD}(a, b)$ такав да важи:

1. $d \mid a$ и $d \mid b$ (делилац);
2. ако за $d_1 \in \mathbb{N}$ важи $d_1 \mid a$ и $d_1 \mid b$, онда $d_1 \mid d$ (највећи).

Ако је $\text{NZD}(a, b) = 1$, кажемо да су a и b узајамно прости.

Пример 9. Доказати да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи

$$9 \mid 3 \cdot 4^{n+1} + 10^{n-1} - 4. \quad (*)$$

Доказ. Нека је

$$M = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{важи } (*)\}.$$

База индукције: $1 \in M$ јер је $3 \cdot 4^2 + 10^0 - 4 = 48 + 1 - 4 = 45 = 5 \cdot 9$.

Индуктивна хипотеза: претпоставимо да $n \in M$, тј. важи $9 \mid 3 \cdot 4^{n+1} + 10^{n-1} - 4$.

Корак индукције: проверавамо да ли $S(n) = n + 1 \in M$. Имамо

$$\begin{aligned} 3 \cdot 4^{n+2} + 10^n - 4 &= 12 \cdot 4^{n+1} + 10 \cdot 10^{n-1} - 4 \\ &= \underbrace{3 \cdot 4^{n+1} + 10^{n-1} - 4}_{\text{дељиво са 9 по ИХ}} + \underbrace{9(4^{n+1} + 10^{n-1})}_{\text{дељиво са 9}}, \end{aligned}$$

па је овај израз дељив са 9, што је и требало доказати. Дакле, $S(n) \in M$, па на основу аксиоме математичке индукције добијамо $M = \mathbb{N}$. $\square$

Пример 10. Доказати да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи

$$9 \mid 4^{n+1} + 6n + 5. \quad (*)$$

Доказ. Нека је

$$M = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{важи } (*)\}.$$

База индукције: $1 \in M$ јер је $4^2 + 6 + 5 = 27 = 3 \cdot 9$.

Индуктивна хипотеза: претпоставимо да $n \in M$, тј. важи $9 \mid 4^{n+1} + 6n + 5$.

Корак индукције: проверавамо да ли $S(n) = n + 1 \in M$. Имамо

$$\begin{aligned} 4^{n+2} + 6(n+1) + 5 &= 4 \cdot 4^{n+1} + 6n + 6 + 5 \\ &= 4(4^{n+1} + 6n + 5) - 18n - 9 \\ &= 4 \underbrace{(4^{n+1} + 6n + 5)}_{\text{дељиво са 9 по ИХ}} - \underbrace{9(2n+1)}_{\text{дељиво са 9 по ИХ}}, \end{aligned}$$

па је овај израз дељив са 9, што је и требало доказати. Дакле, $S(n) \in M$, па на основу аксиоме математичке индукције добијамо $M = \mathbb{N}$.

Приметимо да смо природно могли у кораку индукције отићи и дужим путем

$$4 \cdot 4^{n+1} + 6n + 6 + 5 = \underbrace{4^{n+1} + 6n + 5}_{\text{дељиво са 9 по ИХ}} + \underbrace{3 \cdot 4^{n+1} + 6}_{9|???}$$

који би захтевао нову математичку индукцију за доказ дељивости другог члана са 9. $\square$

Пример 11 (Фибоначијев низ). *Фибоначијев низ је низ дефинисан рекурентном формулом $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, за свако $n \in \mathbb{N}$, при чему је $a_1 = 1$, $a_2 = 1$. Његови чланови су $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$.*

1) Свака два узастопна члана су узајамно проста. То јест, за свако $n \in \mathbb{N}$ важи

$$\text{NZD}(a_n, a_{n+1}) = 1. \quad (*)$$

Доказ. Нека је

$$M = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{важи } (*)\}.$$

База индукције: $1 \in M$ јер је $\text{NZD}(a_1, a_2) = \text{NZD}(1, 1) = 1$.

Индуктивна хипотеза: претпоставимо да $n \in M$, тј. важи $\text{NZD}(a_n, a_{n+1}) = 1$.

Корак индукције: проверавамо да ли $S(n) = n + 1 \in M$. Имамо

$$\begin{aligned} \text{NZD}(a_{n+1}, a_{n+2}) &= \text{NZD}(a_{n+1}, a_{n+1} + a_n) \\ &= \text{NZD}(a_{n+1}, a_n) \\ &= \underbrace{\text{NZD}(a_n, a_{n+1})}_{\text{их}} = 1, \end{aligned}$$

што је и требало доказати, при чему смо за другу једнакост користили да $\text{NZD}(a, b) = \text{NZD}(a, b - a)$. Дакле, $S(n) \in M$, па на основу аксиоме математичке индукције добијамо $M = \mathbb{N}$. $\square$

2) Сваки четврти члан низа је дељив са 3. То јест, за свако $n \in \mathbb{N}$ важи

$$3 \mid a_{4n}. \quad (**)$$

Доказ. Нека је

$$M = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{важи } (**)\}.$$

База индукције: $1 \in M$ јер је $a_{4 \cdot 1} = a_4 = 3 = 3 \cdot 1$.

Индуктивна хипотеза: претпоставимо да $n \in M$, тј. важи $3 \mid a_{4n}$.

Корак индукције: проверавамо да ли $S(n) = n + 1 \in M$. Имамо

$$\begin{aligned} a_{4(n+1)} &= a_{4n+4} = a_{4n+3} + a_{4n+2} \\ &= 2a_{4n+2} + a_{4n+1} \\ &= 2(a_{4n+1} + a_{4n}) + a_{4n+1} \\ &= 3a_{4n+1} + 2 \underbrace{a_{4n}}_{\text{их}}, \end{aligned}$$

па је овај израз дељив са 3, што је и требало доказати. Дакле, $S(n) \in M$, па на основу аксиоме математичке индукције добијамо $M = \mathbb{N}$. $\square$

Рационални и реални бројеви

Скуп рационалних бројева је

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}.$$

Теорема 1. $\sqrt{2}$ није рационалан број.

Доказ. Претпоставимо супротно, нека је $\sqrt{2}$ рационалан број. Тада је $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, где су $p, q \in \mathbb{N}$ и $\text{NZD}(p, q) = 1$ (максимално скраћен разломак). Одатле је $p^2 = 2q^2$, па је p^2 паран број, а самим тим и p је паран, тј. $p = 2m$. Следи $(2m)^2 = 4m^2 = 2q^2$, па је $q^2 = 2m^2$. Дакле, q^2 је паран, па је и q паран. Зато је $\text{NZD}(p, q) \geq 2$, што је контрадикција. $\square$

Посматрајмо сада скупове

$$A = \{q \in \mathbb{Q}^+ \mid q^2 < 2\}, \quad B = \{q \in \mathbb{Q}^+ \mid q^2 > 2\}.$$

Очигледно су A и B непразни. Приметимо да постоје рационални бројеви M (на пример $2, 3, 4, \dots$) такви да за свако $q \in A$ важи $q \leq M$. Овакве бројеве (горња ограничења) зовемо **мајоранте** скупа A . Од свих мајоранти занима нас најмања и њу, ако постоји, зовемо **супремум** скупа A и обележавамо $\sup A$. Скуп B нема мајоранте, али има **миноранте** $m \in \mathbb{Q}$ (на пример $0, \frac{1}{2}, 1, \dots$), тј. за свако $q \in B$ важи $q \geq m$. Највећу миноранту, ако постоји, зовемо **инфимум** скупа B и обележавамо је $\inf B$. У скупу $\mathbb{R}$ важи $\sup A = \inf B = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Дакле, A нема супремум у $\mathbb{Q}$, а B нема инфимум у $\mathbb{Q}$, и то је недостатак који желимо да поправимо. То решавамо тиме што скуп рационалних бројева $\mathbb{Q}$ проширујемо до скупа реалних бројева $\mathbb{R}$, у коме важи аксиома потпуности:

Сваки непразан и одозго ограничен скуп $A \subset \mathbb{R}$ има супремум у скупу $\mathbb{R}$.

Теорема 2. *Скуп $\mathbb{Q}$ је свуда густ у $\mathbb{R}$, тј. за свака два реална броја $r_1 < r_2$ постоји $q \in \mathbb{Q}$ такав да је $r_1 < q < r_2$.*

Пример 12. *Првих 16 децимала броја π .*

“Још и Грци и стари Вавилонци су казали обиме кад делиш круговим пречником добијеш неопходан нам пи.”

Бројеви слова у речима дају цифре: 3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 5, 8, 9, 7, 9, 3, 2. Одатле

$$\pi = 3,1415926535897932 \dots$$

Кардиналност скупова бројева

Нека је $S_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ скуп првих n природних бројева.

Скуп A је **коначан скуп** ако постоји бијекција $f : S_n \rightarrow A$ за неко $n \in \mathbb{N}$. На пример, скуп $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{333}\}$ са међусобно различитим елементима је коначан јер постоји бијекција $f : S_{333} \rightarrow A$ дефинисана са $f(k) = a_k$.

Скуп B је **пребројив** ако постоји бијекција $f : \mathbb{N} \rightarrow B$, тј. елементе скупа B можемо поређати у низ. То значи да B има пребројиво бесконачно елемената, као и $\mathbb{N}$.

Пример 13. *Скуп $\mathbb{Z}$ је пребројив.*

Доказ. Целе бројеве поређамо на следећи начин:

$$\begin{array}{c|cccccccc} \mathbb{Z} & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & 4 & -4 & \dots \\ \mathbb{N} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \dots \end{array}$$

Пресликавање $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$, задато са $f(1) = 0$, $f(2k) = k$ и $f(2k+1) = -k$ за $k \in \mathbb{N}$, јесте бијекција. $\square$

Пример 14. *Скуп $\mathbb{Q}$ је пребројив.*

Доказ. Посматрајмо најпре позитивне рационалне бројеве $\frac{m}{n}$, где су $m, n \in \mathbb{N}$. Можемо их поређати у таблицу:

$$\begin{array}{cccccc} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \dots \\ \frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \frac{2}{6} & \dots \\ \frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \frac{3}{6} & \dots \\ \frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & \frac{4}{4} & \frac{4}{5} & \frac{4}{6} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Таблицу обилазимо по дијагоналама, наизменично у оба смера:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \dots$$

Пошто се неки бројеви понављају, поновљена појављивања прескочимо и тако добијемо низ $s_1, s_2, s_3, \dots$. Сада можемо пребројати $\mathbb{Q}$ са $0, s_1, -s_1, s_2, -s_2, s_3, -s_3, s_4, -s_4, \dots$ $\square$

Пример 15. Скуп $\mathbb{R}$ није пребројив.

Доказ. Претпоставимо супротно, да је скуп $\mathbb{R}$ пребројив. Тада је и његов бесконачан подскуп $[0, 1)$, чије елементе ћемо представити у децималном запису, пребројив, па постоји бијекција $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1)$ дефинисана са:

$$\begin{aligned} f(1) &= 0, \boxed{a_1^1} a_2^1 a_3^1 a_4^1 a_5^1 \dots, \\ f(2) &= 0, a_1^2 \boxed{a_2^2} a_3^2 a_4^2 a_5^2 \dots, \\ f(3) &= 0, a_1^3 a_2^3 \boxed{a_3^3} a_4^3 a_5^3 \dots, \\ f(4) &= 0, a_1^4 a_2^4 a_3^4 \boxed{a_4^4} a_5^4 \dots, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Посматрајмо број $b = 0, b_1 b_2 b_3 b_4 \dots$ такав да за свако $i \in \mathbb{N}$ важи $b_i \neq a_i^i$. Број $b \in [0, 1)$ и $b \neq f(i)$, јер се ови бројеви разликују на i -том децималном месту.

Дакле, број b није у слици функције f , што је у контрадикцији са њеном сурјективношћу. Зато $[0, 1)$ није пребројив, па ни скуп $\mathbb{R}$ није пребројив. $\square$