

Предавање 1 - Скупови, функције, релације

1 Скупови

Скуп посматрамо као колекцију јасно одређених објеката. Ако је a елемент скупа A , онда пишемо $a \in A$, док ако a није елемент скупа A , пишемо $a \notin A$.

Пример 1. Нека је $A = \{3, 5, 7, 9\}$. Тада $3 \in A$, $1 \notin A$.

Редослед елемената није битан, а такође се понављање елемената не сматра новим елементом скупа. На пример,

$$\{3, 5, 7, 9\} = \{9, 3, 7, 5\} = \{3, 3, 3, 5, 7, 9, 7, 5\}.$$

Скупове задајемо на два начина:

1. пописивањем свих елемената, нпр. $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$;
2. задавањем заједничком особини, нпр. $A = \{x \mid P(x)\}$ је скуп свих елемената x који задовољавају особину $P(x)$.

Пример 2. Нека је

$$A = \{n \mid n \text{ је непаран једноцифрен природни број}\}.$$

Тада је $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

Скуп који нема елемената је празан скуп и означава се са $\emptyset$.

Број елемената скупа A означавамо са $|A|$ или са $\text{card } A$.

Пример 3. Ако је $A = \{a, b, c\}$, онда је $|A| = 3$.

Дефиниција 1. Скуп A је подскуп скупа B и пишемо $A \subseteq B$ ако је сваки елемент скупа A уједно и елемент скупа B , тј.

$$A \subseteq B \iff (\forall x) x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Дефиниција 2. Скупови A и B су једнаки ако имају исте елементе, тј.

$$A = B \iff (\forall x) x \in A \Leftrightarrow x \in B.$$

Такође важи

$$A = B \iff A \subseteq B \text{ и } B \subseteq A.$$

Скуп A је прави подскуп скупа B , и пишемо $A \subset B$, ако је $A \subseteq B$ и $A \neq B$.

Очигледно важи:

1. $A \subseteq A$;
2. ако је $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, онда је $A \subseteq C$.

Пример 4. Важи $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, јер

$$\mathbb{N} \not\subset 0 \in \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Z} \not\subset \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}, \quad \mathbb{Q} \not\subset \sqrt{2} \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{R} \not\subset \sqrt{-1} = i \in \mathbb{C}.$$

Дефиниција 3. Партитивни скуп $\mathcal{P}(A)$ скупа A је скуп свих подскупова скупа A .

Пример 5. За $A = \{3, 5\}$ имамо $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{3\}, \{5\}, \{3, 5\}\}$.

Уопштено, ако је $|A| = n$, онда је $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

Операције са скуповима

Дефиниција 4. Нека су $A, B \subseteq X$. Дефинишемо следеће операције:

Комплемент скупа A :

$$A^c = \overline{A} = \{x \in X \mid x \notin A\};$$

Унија скупова:

$$A \cup B = \{x \in X \mid x \in A \text{ или } x \in B\};$$

Пресек скупова:

$$A \cap B = \{x \in X \mid x \in A \text{ и } x \in B\};$$

Разлика скупова:

$$A \setminus B = \{x \in X \mid x \in A \text{ и } x \notin B\};$$

Симетрична разлика:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Приметимо да је $A \setminus B = A \cap B^c$, тј. разлика скупова није основна операција јер се може записати преко осталих операција.

Дефиниција 5. Скупови A и B су дисјунктни ако је $A \cap B = \emptyset$.

Пример 6. Нека је $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{3, 4, 5\}$. Тада је

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

$$A \cap B = \{3\},$$

$$A \setminus B = \{1, 2\},$$

$$B \setminus A = \{4, 5\},$$

$$A \Delta B = \{1, 2, 4, 5\}.$$

Особине операција са скуповима

1. **Комутативност** $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.
2. **Асоцијативност** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
3. **Дистрибутивност** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
4. **Неутрал** $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$, $A \cap X = X \cap A = A$.
5. **Идемпотентност** $A \cup A = A$, $A \cap A = A$.
6. **Де Морганови закони** $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Докажимо, на пример, први Де Морганов закон:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

1) $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$. Нека је $x \in (A \cup B)^c$ произвољан елемент. По дефиницији комплемента, следи $x \notin A \cup B$. То значи да $x \notin A$ и $x \notin B$, па је $x \in A^c$ и $x \in B^c$. Према дефиницији пресека, добијамо $x \in A^c \cap B^c$. Како је x био произвољан, доказали смо $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$.

2) $A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$. Нека је $x \in A^c \cap B^c$ произвољан елемент. По дефиницији пресека, следи $x \in A^c$ и $x \in B^c$. Одатле је $x \notin A$ и $x \notin B$, па $x \notin A \cup B$. Према дефиницији комплемента, добијамо $x \in (A \cup B)^c$. Како је x био произвољан, доказали смо $A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$.

Из доказаних инклузија следи тражена једнакост:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

Декартов производ скупова

Дефиниција 6. Нека су A и B скупови. Дефинишемо Декартов производ $A \times B$ као скуп свих уређених парова

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Код уређених парова битан је редослед: $(a, b) = (c, d) \iff a = c$ и $b = d$.

Уопштено, $(a, b) \neq (b, a)$ ако је $a \neq b$.

Такође важи $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Специјално, дефинишемо $A^2 = A \times A = \{(x, y) \mid x, y \in A\}$.

Пример 7. Нека је $A = \{s, p, 3\}$ и $B = \{b, 3\}$. Тада је

$$A \times B = \{(s, b), (s, 3), (p, b), (p, 3), (3, b), (3, 3)\},$$

док је

$$B \times A = \{(b, s), (b, p), (b, 3), (3, s), (3, p), (3, 3)\}.$$

Дакле, $A \times B \neq B \times A$, а $(A \times B) \cap (B \times A) = \{(3, 3)\}$.

Такође,

$$B^2 = B \times B = \{(b, b), (b, 3), (3, b), (3, 3)\}.$$

Аналогно дефинишемо Декартов производ више скупова:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}.$$

Скуп $D = \{(x, x) \mid x \in A\} \subseteq A \times A$ назива се **дијагонала** Декартовог производа $A \times A$.

2 Функције

Дефиниција 7. Нека су A и B непразни скупови. Функција $f : A \rightarrow B$ је правило пресликавања које сваком елементу $a \in A$ придружује тачно један елемент $b \in B$. Тај елемент пишемо $b = f(a)$.

Функцију можемо посматрати и као скуп $G_f \subseteq A \times B$ таквих да за сваки $a \in A$ постоји јединствено $b \in B$ за које је $(a, b) \in G_f$ и тада је $b = f(a)$.

Скуп A назива се **домен** функције f , и обележићемо га са D_f , а скуп B **кодоме**н, у ознаци K_f .

Пример 8. Нека је $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c\}$ и нека је $f : A \rightarrow B$ задата са

$$f(1) = a, \quad f(2) = c, \quad f(3) = b, \quad f(4) = a.$$

Тада функцију f можемо задати и као

$$G_f = \{(1, a), (2, c), (3, b), (4, a)\} \subseteq A \times B.$$

Скуп свих вредности функције $f : A \rightarrow B$ је **слика** функције f , тј.

$$\text{Im } f = f(A) = \{f(a) \mid a \in A\} \subseteq B.$$

Пример 9. Нека је $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функција задата са $f(x) = x^2$. Њен домен је $D_f = \mathbb{R}$, а кодоме n $K_f = \mathbb{R}$. Међутим, како је $x^2 \geq 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$ и сваки ненегативан реалан број представља квадрат неког реалног броја, слика функције је $\text{Im } f = [0, +\infty)$.

Дакле, слика функције и кодоме n не морају бити једнаки: овде је $\text{Im } f \subset K_f$.

Дефиниција 8. Функција $f : A \rightarrow B$ је **инјективна**, или $1 - 1$, ако различитим елементима домена придружује различите елементе кодоме n а, тј.

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2).$$

Еквивалентно,

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

Дефиниција 9. Функција $f : A \rightarrow B$ је **сурјективна**, или “*на*”, ако за сваки $b \in B$ постоји $a \in A$ такав да $f(a) = b$. Другим речима,

$$(\forall b \in B)(\exists a \in A) \quad f(a) = b.$$

Дефиниција 10. Функција је **бијективна** ако је истовремено инјективна и сурјективна.

Пример 10. Нека је $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функција задата са $f(x) = 2x + 1$. Испитајмо њену инјективност и сурјективност.

Инјективност. Нека су $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ такви да је $f(x_1) = f(x_2)$. Тада је $2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$, одакле следи $x_1 = x_2$. Дакле, f је инјективна.

Сурјективност. Нека је $y \in \mathbb{R}$ произвољан елемент кодомена. Тражимо $x \in \mathbb{R}$ такав да је $f(x) = y$. Из једначине $2x + 1 = y$ добијамо $x = \frac{y-1}{2} \in \mathbb{R}$. За овако изабрано x важи

$$f(x) = 2 \cdot \frac{y-1}{2} + 1 = y.$$

Дакле, сваки елемент кодомена има бар једну слику уназад, па је f сурјективна.

Како је истовремено инјективна и сурјективна, f је бијекција.

Пример 11. Нека је $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функција задата са $f(x) = x^2$. Испитајмо њену инјективност и сурјективност.

Инјективност. За различите елементе -1 и 1 домена важи $f(-1) = 1 = f(1)$. Дакле, различити елементи домена могу имати исту слику, па f није инјективна.

Сурјективност. Елемент $-1 \in \mathbb{R}$ кодомена није слика ниједног елемента домена, јер једначина $f(x) = x^2 = -1$ нема решења у $\mathbb{R}$. Дакле, f није сурјективна.

Према томе, f није ни инјективна ни сурјективна, па није бијекција.

Коначни скупови

Нека су A и B коначни скупови.

1. Ако је $|A| > |B|$, онда не постоји инјективна функција $f : A \rightarrow B$.
2. Ако је $|A| < |B|$, онда не постоји сурјективна функција $f : A \rightarrow B$.
3. Ако постоји бијекција $f : A \rightarrow B$, онда је $|A| = |B|$.

Пример 12. Нека је $A = \{1, 2, 3, 4\}$ и $B = \{a, b, c\}$.

Инјективна функција $f : A \rightarrow B$ **не постоји**, јер је $|A| = 4 > 3 = |B|$. Наиме, четири различита елемента домена не можемо пресликати у међусобно различите елементе трочланог кодомена.

Сурјективна функција $g : A \rightarrow B$ **постоји**. На пример, можемо је задати са

$$g(1) = a, \quad g(2) = b, \quad g(3) = c, \quad g(4) = a.$$

Сваки елемент кодомена је слика бар једног елемента домена, па је $g(A) = B$ и функција g је сурјективна.

Бијекција $h : A \rightarrow A$ **постоји**. На пример, можемо је задати са

$$h(1) = 2, \quad h(2) = 4, \quad h(3) = 3, \quad h(4) = 1.$$

Сваки елемент кодомена је слика тачно једног елемента домена, па је h и инјективна и сурјективна, односно бијекција.

Композиција функција

Дефиниција 11. Нека су $f : A \rightarrow B$ и $g : B \rightarrow C$ функције. Композиција функција f и g је функција $g \circ f : A \rightarrow C$ дефинисана са

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Пример 13. Нека су $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функције задате са $f(x) = 2x + 1$ и $g(x) = x^2$.
Тада је

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2 + 1, \\(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1.\end{aligned}$$

Добијене функције су различите. Дакле, $f \circ g \neq g \circ f$, што показује да композиција функција у општем случају није комутативна.

Дефиниција 12. Уколико за функцију $f : A \rightarrow B$ постоји функција $g : B \rightarrow A$ таква да је

$$(g \circ f)(x) = x \quad \text{за свако } x \in A, \quad (f \circ g)(y) = y \quad \text{за свако } y \in B,$$

онда је g инверзна функција функције f и обележавамо је са $g = f^{-1}$.

Инверзна функција f^{-1} постоји ако и само ако је f бијекција.

Пример 14. Нека је $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функција задата са $f(x) = 2x + 1$. Већ смо показали да је f бијекција, па постоји њена инверзна функција $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Из једнакости $f(f^{-1}(x)) = x$ добијамо $2f^{-1}(x) + 1 = x$, па је

$$f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{2}.$$

Заиста, за свако $x \in \mathbb{R}$ важи

$$f(f^{-1}(x)) = 2 \cdot \frac{x - 1}{2} + 1 = x, \quad f^{-1}(f(x)) = \frac{2x + 1 - 1}{2} = x.$$

Пример 15. Посматрајмо функције задате истом формулом $f(x) = x^2$, али са различитим доменима и кодоменима.

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, није ни “1 – 1” ни “на”, па нема инверзну функцију.
2. $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$, $f(x) = x^2$, није “1 – 1”, али јесте “на”. Зато ни ова функција нема инверзну функцију.
3. $f : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, $f(x) = x^2$, јесте бијекција, па има инверзну функцију

$$f^{-1} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty), \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$

Дакле, постојање инверзне функције зависи и од избора домена и кодомена, а не само од формуле којом је функција задата.

3 Релације

Дефиниција 13. Бинарна релација ρ на скупу A је било који подскуп $\rho \subseteq A \times A$. За $(a, b) \in \rho$ често пишемо $a \rho b$.

Пример 16. Релација $\leq$ је бинарна релација на скупу $\mathbb{N}$.

На пример, $2 \leq 3$ и $1 \leq 5$, док $3 \not\leq 2$.

Пример 17. Нека је $A = \{1, 2, 3\}$ и $\rho = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.
Тада је $1\rho 1$ и $2\rho 1$, али $1 \not\rho 2$.

Нека је $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Релацију ρ на скупу A можемо задати и таблично:

ρ	a_1	a_2	$\cdots$	a_n		
a_1	ρ_{11}	ρ_{12}	$\cdots$	ρ_{1n}	при чему је	$\rho_{ij} = \begin{cases} 1, & a_i \rho a_j, \\ 0, & a_i \not\rho a_j. \end{cases}$
a_2	ρ_{21}	ρ_{22}	$\cdots$	ρ_{2n}		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		
a_n	ρ_{n1}	ρ_{n2}	$\cdots$	ρ_{nn}		

Пример 18. Нека је $A = \{1, 2, 3\}$ и $\rho = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.
Таблично бисмо ову релацију задали са

ρ	1	2	3
1	1	0	0
2	1	1	0
3	0	0	1

Особине релација

Нека је ρ бинарна релација на скупу A . Особине које ћемо проверавати су:

1. **Рефлексивност (Р):** $a\rho a$ за свако $a \in A$.
2. **Симетричност (С):** $a\rho b \Rightarrow b\rho a$ за све $a, b \in A$.
3. **Антисиметричност (АС):** $(a\rho b \text{ и } b\rho a) \Rightarrow a = b$ за све $a, b \in A$.
4. **Транзитивност (Т):** $(a\rho b \text{ и } b\rho c) \Rightarrow a\rho c$ за све $a, b, c \in A$.

Дефиниција 14. Релација ρ је **релација еквиваленције** ако је рефлексивна, симетрична и транзитивна.

Дефиниција 15. Релација ρ је **релација парцијалног поретка** ако је рефлексивна, антисиметрична и транзитивна.

Пример 19. На скупу $A = \{1, 2, 3\}$ дата је релација

$$\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (2, 3)\}.$$

Испитајмо њене особине.

1. **Рефлексивност.** Важи $1\rho 1$, $2\rho 2$ и $3\rho 3$, па је $a\rho a$ за свако $a \in A$. Дакле, ρ је рефлексивна.
2. **Симетричност.** Важи $2\rho 3$, али $3 \not\rho 2$. Дакле, ρ није симетрична.
3. **Антисиметричност.** Важи $1\rho 2$ и $2\rho 1$, али је $1 \neq 2$. Дакле, ρ није антисиметрична.
4. **Транзитивност.** Важи $1\rho 2$ и $2\rho 3$, али $1 \not\rho 3$. Дакле, ρ није транзитивна.

Напоменимо да за оповргавање особине довољан је један контрапример, док је за њено доказивање потребно проверити да важи за све изборе елемената скупа.