

1. На страницама BC и AB троугла ABC дате су редом тачке P и R , такве да је $2CP = 3BP$ и $AB = 4RB$ и нека је тачка Q пресек прaviх PR и AC .

а) [4п] Одредити $\frac{AQ}{QC}$;

б) [3п] Изразити $\vec{PQ}$ као линеарну комбинацију $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$.

▲ ⑥

Р, Q, R коллинеарне $\xrightarrow{\text{Менелаж } \Delta ABC}$ $\frac{\vec{AR}}{\vec{RB}} \cdot \frac{\vec{BP}}{\vec{PC}} \cdot \frac{\vec{CQ}}{\vec{QA}} = -1$
 $= 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\vec{CQ}}{\vec{QA}} = -1 \Rightarrow \frac{\vec{CQ}}{\vec{QA}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \vec{QA} = -2\vec{CQ} \Rightarrow \boxed{\frac{AQ}{QC} = 2}$

⑤ $\vec{PQ} = \vec{PC} + \vec{CQ} = \frac{3}{5}\vec{BC} + \vec{CQ} = \frac{3}{5}(\vec{BA} + \vec{AC}) + \vec{CQ} = -\frac{3}{5}\vec{AB} + \frac{8}{5}\vec{AC}$

2. [8п] Одредити једначину равни α која је нормална на раван

$$\beta: x + 2y - 3z = 2026$$

и садржи праву

$$p: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-1}{-1}.$$

Упоредити растојање праве p од координатног почетка, са растојањем равни α од координатног почетка.

▲

1) $P(1, -3, 1) \in p \subset \alpha$
 2) $p \subset \alpha \Rightarrow \vec{n}_\alpha \perp \vec{p} = (2, 4, -1)$
 3) $\alpha \perp \beta \Rightarrow \vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_\beta = (1, 2, -3)$
 $\Rightarrow \vec{n}_\alpha = \vec{p} \times \vec{n}_\beta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-10, 5, 0) \parallel (2, -1, 0)$
 $\Rightarrow \alpha: 2(x-1) - 1(y+3) + 0(z-1) = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha: 2x - y - 5 = 0}$

$d(O, p) = \frac{\|\vec{p} \times \vec{p}\|}{\|\vec{p}\|} = \frac{\sqrt{1+9+100}}{\sqrt{4+16+1}} = \frac{\sqrt{110}}{\sqrt{21}}$
 $\vec{p} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (1, -3, -10)$
 $d(O, \alpha) = \frac{|2 \cdot 0 - 0 - 5|}{\sqrt{4+1+0}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$
 $\boxed{d(O, \alpha) < d(O, p)}$

3. [8п] Одредити једначину криве другог реда која садржи тачке $A(-3, 8)$ и $B(-7, 0)$ и којој су праве $2x + y + 4 = 0$ и $x - 2y + 7 = 0$ осе симетрије. Одредити жиже те криве.

▲

$p: 2x + y + 4 = 0 \wedge 5x + 15 = 0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow y = 2$
 $q: x - 2y + 7 = 0 \wedge + \Rightarrow p \cap q = C(-3, 2)$
 $\vec{n}_p = (2, 1) \Rightarrow \vec{p} = (1, -2) \Rightarrow \vec{F}_1 = \frac{\vec{p}}{\|\vec{p}\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2)$
 $\vec{n}_q = (1, -2) \Rightarrow \vec{q} = (2, 1) \Rightarrow \vec{F}_2 = \frac{\vec{q}}{\|\vec{q}\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -7/\sqrt{5} \\ -4/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

У НОВИМ
КООРДИНАТАМА $\Rightarrow \mathcal{U}': \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$, $A(-3, 8) \mapsto A'(-12/\sqrt{5}, 6/\sqrt{5})$
 $B(-7, 0) \mapsto B'(0, -2\sqrt{5})$

$$B' \in \mathcal{U}' \Rightarrow \frac{0}{a^2} + \frac{20}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{b^2} = \frac{1}{20} \Rightarrow b^2 = 20$$

$$A' \in \mathcal{U}' \Rightarrow \frac{144}{5a^2} + \frac{36}{5 \cdot 20} = 1 \Rightarrow \frac{144}{5a^2} = \frac{64}{100} \Rightarrow a^2 = \frac{100 \cdot 144}{5 \cdot 64} = 45$$

$$\Rightarrow \mathcal{U}': \frac{x'^2}{45} + \frac{y'^2}{20} = 1 \quad c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow F'_{1,2}(\pm 5, 0)$$

$$\Rightarrow \mathcal{U}: \frac{(x-2+7+7)^2}{225} + \frac{(2x+7+4)^2}{100} = 1 \quad F_{1,2}(-3 \pm \sqrt{5}, 2 \mp 2\sqrt{5})$$

4. Дата је површ другог реда

$$S: 6x^2 + 5y^2 + 7z^2 - 4xy + 4xz - 8x + 4y + 10z - 9 = 0.$$

а) [6п] Свести S на канонски облик изометријском трансформацијом и написати формуле те трансформације. Која је површ у питању?

б) [3п] Одредити макар једну раван која у пресеку са S даје елипсу чије су полуосе $\sqrt{2}$ и $\sqrt{6}$.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \varphi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 5-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(5-\lambda)(7-\lambda) + 0 + 0 - 4(5-\lambda) - 0 - 4(7-\lambda)$$

$$= (6-\lambda)(5-\lambda)(7-\lambda) - 4(5-\lambda + 7-\lambda) = (6-\lambda)(5-\lambda)(7-\lambda) - 4(12-2\lambda) = (6-\lambda)(5-\lambda)(7-\lambda) - 4(6-\lambda)$$

$$= (6-\lambda)[(5-\lambda)(7-\lambda) - 4] = (6-\lambda)[\lambda^2 - 12\lambda + 27]$$

$$= (6-\lambda)(\lambda-3)(\lambda-9) = -(\lambda-3)(\lambda-6)(\lambda-9)$$

$$\lambda_1 = 3 \quad \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \mathcal{U}_3 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 3a - 2b + 2c = 0 \quad -2a + 2b = 0 \Rightarrow b = a = -2c \quad 2a + 4c = 0 \Rightarrow a = -2c$$

$$\lambda_2 = 6 \quad \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \mathcal{U}_6 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow -2b + 2c = 0 \quad -2a - b = 0 \Rightarrow b = -2a \quad 2a + c = 0 \Rightarrow c = -2a$$

$$\lambda_3 = 9 \quad \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \mathcal{U}_9 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow -3a + 2b + 2c = 0 \quad -2a - 4b = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}a \quad 2a - 2c = 0 \Rightarrow c = a$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \Rightarrow S': 3x'^2 + 6y'^2 + 9z'^2 - 6x' + 12y' - 9 = 0$$

$$S': 3(x'-1)^2 + 6(y'+1)^2 + 9z'^2 = 18 \quad / : 18$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' - 1 \\ y' + 1 \\ z' \end{bmatrix} \Rightarrow S'': \frac{x''^2}{6} + \frac{y''^2}{3} + \frac{z''^2}{2} = 1 \quad \text{ЕЛИПСОИД}$$

⑤ $S'' \cap O_{x''z''}: \frac{x''^2}{6} + \frac{z''^2}{2} = 1$, ДАКЛЕ S'' У ПРЕСЕКУ СА $y'' = 0$ ДАЈЕ ТРАЖЕНУ ЕЛИПСУ

КАКО ЈЕ $y'' = y' + 1 = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + 1$, ТРАЖЕНА РАВАН ЈЕ

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + 1 = 0 \quad / \cdot 3$$

$$\boxed{-x + 2y + 2z + 3 = 0}$$

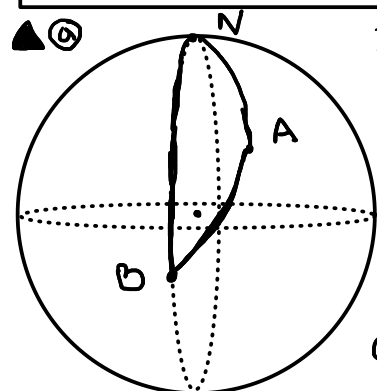
ОРТОГОНАЛНА $\Rightarrow Q^{-1} = Q^T!$

5. Ана и Бобан кренули су на пут од северног до јужног пола. Они се крећу дуж меридијана између којих је угао од 30° . У тренутку када је Ана прешла четвртину свог пута, Бобану је остала трећина пута до циља.

а) [6п] Колика је (приближна) удаљеност између Ане и Бобана у том тренутку?

б) [2п] Бобанов брат близанац Борко кренуо је од јужног пола ка северном у исто време као и Бобан. Кретао се по супротном меридијану и у сваком тренутку имао исту брзину као и Бобан. Одредити (приближно) растојање између Борка и Ане у истом тренутку као у делу под а).

Планету Земљу посматрати као сферу полупречинка 6371 km.



Претпоставимо да је $R = 1$.

Без умањења општости, можемо претп. да се Ана креће по $\theta_A = 30^\circ$, Бобан $\theta_B = 0^\circ$

$$\Rightarrow A: \widehat{NA} = \frac{\pi}{4} \text{ (тј. } \varphi_A = \varphi_N - \widehat{NA} = \frac{\pi}{4} \text{)}, \theta_A = \frac{\pi}{6}$$

$$B: \widehat{NB} = \frac{2\pi}{3} \text{ (тј. } \varphi_B = \varphi_N - \widehat{NB} = -\frac{\pi}{6} \text{)}, \theta_B = 0$$

Северни пол $N: \varphi_N = 0$, θ_N - недеф.

$$\Rightarrow \Delta \widehat{ANB} = \frac{\pi}{6}$$

КОСИНУСНА
ТЕОРЕМА
 $\triangle NAB$

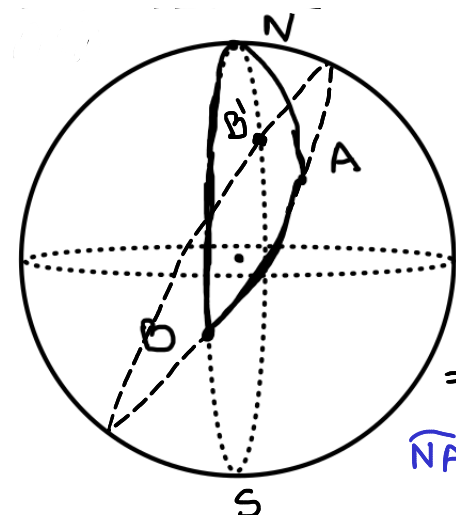
$$\Rightarrow \cos \widehat{AB} = \cos \widehat{NA} \cos \widehat{NB} + \sin \widehat{NA} \sin \widehat{NB} \cos \widehat{ANB}$$

$$\cos \widehat{AB} = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{2\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{6}$$

$$\cos \widehat{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

Применом хомотетије $\Rightarrow \widehat{AB} = 6371 \cdot \arccos \left(\frac{\sqrt{2}}{8} \right) \text{ km}$

б) Нека је B' позиција Борка



$$a) \Rightarrow A: \varphi_A = \frac{\pi}{4}, \theta_A = \frac{\pi}{6}$$

$$B': \widehat{SB'} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \widehat{NB'} = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \varphi_{B'} = \varphi_N - \widehat{NB'} = \frac{\pi}{6}, \theta_{B'} = \pi$$

КОСИНУСНА ТЕОРЕМА НА $\triangle ANB'$

$$\Rightarrow \cos \widehat{AB'} = \cos \widehat{NA} \cos \widehat{NB'} + \sin \widehat{NA} \sin \widehat{NB'} \cos \widehat{ANB'}$$

$$\widehat{NA} = \frac{\pi}{4}, \widehat{NB'} = \frac{\pi}{3}, \widehat{ANB'} = |\theta_A - \theta_{B'}| = \frac{5\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{AB'} = \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{5\pi}{6}$$

$$\cos \widehat{AB'} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{-\sqrt{2}}{8}$$

Применом хомотетије $\Rightarrow \widehat{AB'} = 6371 \cdot \arccos \left(\frac{-\sqrt{2}}{8} \right) \text{ km}$

Напомена Можемо приметити да су A, B и B' на истом великом кругу, B и B' дијаметрално супротне

$$\Rightarrow \widehat{AB'} = \pi - \widehat{AB}$$