

1. Dokazati jednakost:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}, \quad n \in N$$

BI. Proveravamo da li tvrdjenje važi za $n = 1$.

Kako je $1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$, zadovoljena je baza indukcije.

IH. Pretpostavimo da tvrdjenje važi za n .

IK. Dokažimo da važi i za $n + 1$.

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + (n + 1) \stackrel{\text{IH.}}{=} \frac{n \cdot (n + 1)}{2} + (n + 1) = \frac{(n + 1) \cdot (n + 2)}{2}$$

Po principu matematičke indukcije, zaključujemo da tvrdjenje važi za svaki prirodan broj n .

2. Dokazati jednakost:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2, \quad n \in N$$

BI. Proveravamo da li tvrdjenje važi za $n = 1$.

Kako je $2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2$, zadovoljena je baza indukcije.

IH. Pretpostavimo da tvrdjenje važi za n .

IK. Dokažimo da važi i za $n + 1$.

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2 \cdot (n + 1) - 1) \stackrel{\text{IH.}}{=} n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

Po principu matematičke indukcije, zaključujemo da tvrdjenje važi za svaki prirodan broj n .

3. Dokazati:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad n \in N$$

BI. Proveravamo da li tvrdjenje važi za $n = 1$.

Kako je $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, zadovoljena je baza indukcije.

IH. Pretpostavimo da tvrdjenje važi za n .

IK. Dokažimo da važi i za $n + 1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{\text{IH.}}{=} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Po principu matematičke indukcije, zaključujemo da tvrdjenje važi za svaki prirodan broj n .

4. Dokazati Bernulijevu nejednakost:

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad x > -1, n \in N$$

BI. Proveravamo da li tvrdjenje važi za $n = 1$.

Kako je $(1+x)^1 = 1 + 1 \cdot x$, zadovoljena je baza indukcije.

IH. Pretpostavimo da tvrdjenje važi za n .

IK. Dokažimo da važi i za $n + 1$.

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \stackrel{\text{IH.}}{\geq} (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq (1+x)^{n+1}$$

Po principu matematičke indukcije, zaključujemo da tvrdjenje važi za svaki prirodan broj n .

5. Dokazati jednakost:

$$-1 + 3 - 5 + \dots + (-1)^n(2n-1) = (-1)^n \cdot n$$

gde je $n \in N$.

Baza indukcije: Za $n=1$ jednakost je očigledna.

IH. Neka važi indukcijska hipoteza, odnosno neka jednakost važi za $n=k$, tj. važi

$$-1 + 3 - 5 + \dots + (-1)^k(2k-1) = (-1)^k \cdot k$$

IK. Dokažimo za $n=k+1$:

$$-1 + 3 - 5 + \dots + (-1)^k(2k-1) + (-1)^{k+1}(2(k+1)-1) =$$

$$(\text{IH}) = (-1)^k \cdot k + (-1)^{k+1}(2k+1) =$$

$$= (-1)^{k+1}(-k + 2k + 1) = (-1)^{k+1}(k+1)$$

čime je indukcijski korak dokazan, a samim tim, prema principu matematičke indukcije, jednakost važi sa svaki prirodan broj n .

6. Niz $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zadat je sa
 $F_1 = 1, F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n > 2$
Dokazati da važi nejednakost:

$$F_n \leq \varphi^{n-1}$$

za svako $n \in \mathbb{N}$, gde je $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Koristićemo *princip jake indukcije* ovde.

BI. Ispitajmo bazni slučaj $n=1$ i $n=2$:

$$F_1 = 1 = \varphi^0$$

$$F_2 = 1 < 1.6 < \varphi = \varphi^1$$

IH. Pretpostavimo da nejednakost važi za sve $n=1, 2, \dots, k-1, k$. (Dovoljno će nam biti da pretpostavimo da važi za $k-1$ i k)

Dokažimo da važi za $n=k+1$: $F_{k+1} = F_k + F_{k-1} \leq \varphi^{k-1} + \varphi^{k-2} = \varphi^{k-2}(\varphi + 1)$

Dovoljno je još dokazati da je $\varphi + 1 \leq \varphi^2$.

$$\varphi + 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\varphi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Dakle dokazali smo više:

$$\varphi + 1 = \varphi^2$$

čime je, po principu jake indukcije, nejednakost dokazana za svako $n \in \mathbb{N}$.

7. Dokazati binomnu formulu.

Podsetimo se, binomna formula glasi $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ i da važi za svaki prirodan broj n . Dokažimo to matematičkom indukcijom.

BI. Proveravamo da li tvrdjenje važi za $n=0$.

Kako je $(a+b)^0 = 1 = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^{0-k} b^k$, zadovoljena je baza indukcije.

IH. Pretpostavimo da važi $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

IK. Dokažimo da tvrdjenje važi za $n+1$, tj. $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k$

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\ &= (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k
\end{aligned}$$

Što smo i želeli da pokažemo.

Po principu matematičke indukcije, zaključujemo da binomna formula važi za svaki prirodan broj n .

8. Dokaži za je $\forall n \in N$:

$$1 + 4 + 9 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

BI. Proveravamo da li formula važi za $n = 1$

Kako je $1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$, važi.

IH. Pretpostavimo da važi $1 + 4 + 9 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

IK. Proveravamo da li formula važi za $n + 1$,

tj. da li je $1 + 4 + 9 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$$\begin{aligned}
1 + 4 + 9 + \dots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}
\end{aligned}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Što smo i želeli da pokažemo.

Pa, je prema principu matematičke indukcije, formula tačno za svaki prirodan broj n .

9. Dokazati da za svaki prirodan broj važi sledeće:

$$6|n(n+1)(2n+1)$$

BI. Za $n=1$: $n(n+1)(2n+1) = 6$, pa jednakost očigledno važi.

IH. Pretpostavimo da važi: $6|n(n+1)(2n+1)$

IK. Dokažimo da tvrdjenje važi za $n+1$:

$$\begin{aligned} (n+1)(n+2)(2(n+1)+1) &= (n+1)(n+2)(2n+3) = n(n+1)(2n+3) \\ &+ 2(n+1)(2n+3) = n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + 2(n+1)(2n+3) = \\ &n(n+1)(2n+1) + 2(n+1)(3n+3) = n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)(n+1) \end{aligned}$$

Oдавde vidimo da 6 deli prvi sabirak po induktivnoj hipotezi, a očigledno deli i drugi, pa važi:

$$6|(n+1)(n+2)(2n+3)$$

Po principu matematičke indukcije zaključujemo da tvrdjenje važi za svaki prirodan broj.

10. Dokazati da za svaki prirodan broj $n \geq 0$ važi sledeće:

$$3|5^n + 2^{n+1}$$

BI. Za $n=1$: $5^n + 2^{n+1} = 5 + 4 = 9$, pa jednakost očigledno važi.

IH. Pretpostavimo da važi: $3|5^n + 2^{n+1}$

IK. Dokažimo da tvrdjenje važi za $n+1$:

$$5^{n+1} + 2^{n+2} = 5^{n+1} - 5^n \cdot 2 + 5^n \cdot 2 + 2^{n+2} = 5^n(5 - 2) + 2(5^n + 2^{n+1}) = 3 \cdot 5^n + 2(5^n + 2^{n+1})$$

Oдавde vidimo da 3 očigledno deli prvi sabirak, a 3 deli i drugi sabirak po induktivnoj hipotezi, pa važi:

$$3|5^{n+1} + 2^{n+2}$$

Po principu matematičke indukcije zaključujemo da tvrdjenje važi za svaki prirodan broj.

11. Dokazati da za svaki prirodan broj $n \geq 5$, važi nejednakost:

$$2^n > n^2.$$

BI. Proveravamo da li tvrdjenje važi za $n = 5$.

Kako je $2^5 = 32 > 5^2 = 25$, zadovoljena je baza indukcije.

IH. Pretpostavimo da tvrdjenje važi za n .

IK. Dokažimo da važi i za $n + 1$.

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \stackrel{\text{IH.}}{>} n^2 \cdot 2 = n^2 + n^2 > n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2.$$

Po principu matematičke indukcije, zaključujemo da tvrdjenje važi za svaki prirodan broj $n \geq 5$.

Koristili smo nejednakost $n^2 > 2n + 1$ za $n > 2$, koju ćemo, takodje, dokazati koristeći matematičku indukciju.

BI. Proveravamo da li nejednakost važi za $n = 3$.

Kako je $3^2 = 9 > 2 \cdot 3 + 1 = 7$, zadovoljena je baza indukcije.

IH. Pretpostavimo da tvrdjenje važi za n .

IK. Dokažimo da važi i za $n + 1$.

$$(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 \stackrel{\text{IH.}}{>} 2n + 1 + 2n + 1 = 2 \cdot (n + 1) + 2n > 2 \cdot (n + 1) + 1$$

Po principu matematičke indukcije, zaključujemo da nejednakost važi za svaki prirodan broj $n > 2$.

12. Dokazati Moavrovu formulu.

Neka je dat kompleksan broj u trigonometrijskom obliku $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Tada se $n - ti$ stepen broja z računa po formuli:

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \tag{1}$$

BI. Formula je tačna za slučaj $n = 1$, jer

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

IH. Pretpostavimo da važi za neko n :

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

IK. Dokažimo sada tvrdjenje za $n + 1$

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= (r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta))(r(\cos\theta + i\sin\theta)) = \\ &= r^{n+1}((\cos n\theta \cos\theta - \sin n\theta \sin\theta) + i(\cos n\theta \sin\theta + \sin n\theta \cos\theta)) = \\ &= r^{n+1}(\cos(n + 1)\theta + i\sin(n + 1)\theta) = z^{n+1} \end{aligned}$$

U poslednjoj jednačini iskoristili smo odgovarajuće adicione formule.

Dakle, Moavrova formula je tačna za svaki prirodan broj n .