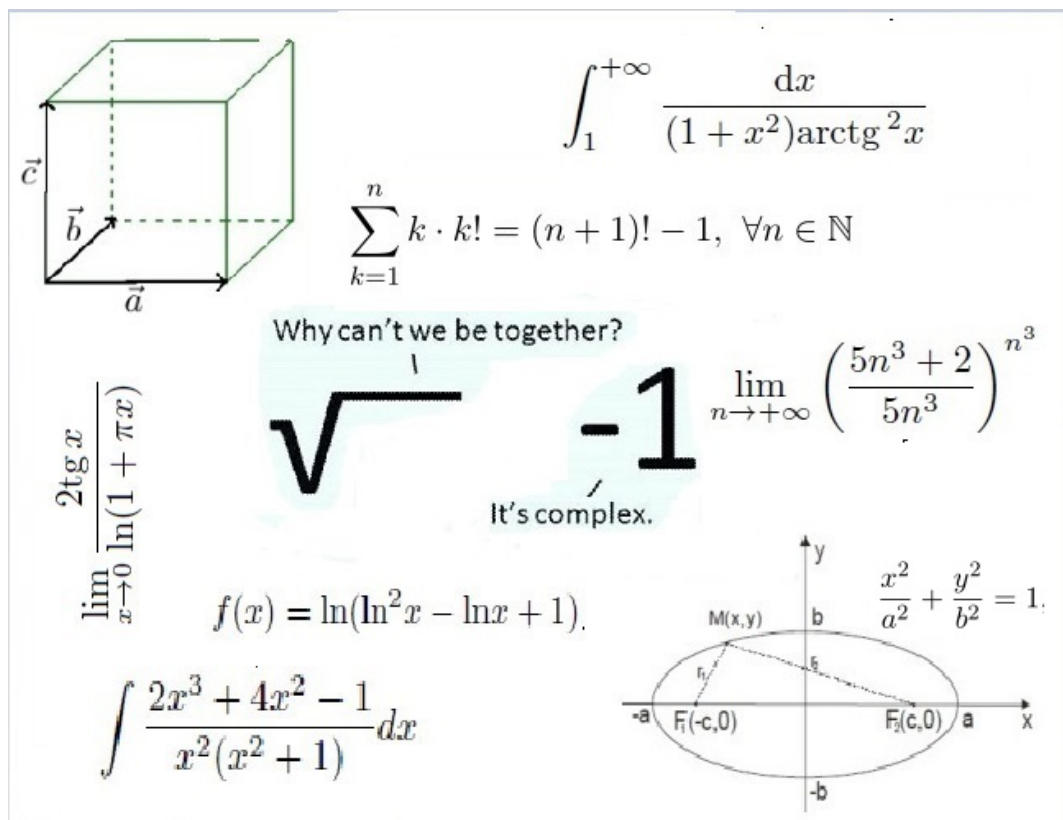


Ђорђе Коцић

Материјали за вежбе из МАТЕМАТИКЕ 1

– Физичка хемија –

Верзија: 09.02.2019.



Београд

Садржај

1	Математичка индукција	3
2	Комплексни бројеви	8
3	Криве другог реда	14
4	Аналитичка геометрија у простору	21
4.1	Вектори у $\mathbb{R}^3$	21
4.2	Тачке, праве и равни у $\mathbb{R}^3$	23
5	Низови	28
6	Лимеси функција и непрекидност	31
6.1	Лимеси функција	31
6.2	Непрекидност функција	35
7	Извод функције	38
8	Испитивање тока и скицирање графика функције	43
9	Неодређени интеграли	53
10	Одређени интеграли	63
11	Несвојствени интеграли	70

Предговор

Како не постоји нека збирка која би испратила све области које радимо на вежбама из Математике 1 на факултету за Физичку хемију, ово је неки покушај такве „скриптице” која ће, надам се, олакшати полагање овог испита. Ова скрипта ће се стално допуњавати и мењати у току године/а и датум последње измене ће писати на почетној страници. Уколико уочите неку грешку (штампарску, или још битније грешку у рачуну) или ако имате неку примедбу шта би требало лепше објаснити итд, напишите ми меил на djordje.kocic@matf.bg.ac.rs.

У неким задацима се, након броја задатка, у загради налази нпр. (Јан, 2018.) или слично. То значи да је тај задатак био на писменом испиту из Математике 1 на факултету за Физичку хемију у јануарском року 2018. године.

People think they don't understand math, but it's all about how you explain it to them. If you ask a drunkard what number is larger, $2/3$ or $3/5$, he won't be able to tell you. But if you rephrase the question: what is better, 2 bottles of vodka for 3 people or 3 bottles of vodka for 5 people, he will tell you right away: 2 bottles for 3 people, of course.

—Israel Gelfand

1 Математичка индукција

Математичка индукција је поступак који се користи када неку тврдњу желимо да докажемо за сваки природан број (или за сваки природан број почев од неког). Доказ математичком индукцијом се састоји из следећих корака:

- (1) база индукције (БИ) - проверавамо да ли дато тврђење важи за $n = 1$ (или за најмање n из тврдње);
- (2) индуктивна хипотеза (ИХ) - претпостављамо да тврђење важи за све бројеве мање или једнаке од $n - 1$;
- (3) корак индукције (КИ) - користећи индуктивну хипотезу проверавамо да ли дато тврђење важи за n .

На основу овога вероватно није баш најјасније шта се заправо ради, али биће јасно након пар провежбаних задатака. У првом задатку ћемо детаљно објаснити поступак математичке индукције, а касније ћемо изостављати кораке који би требало да су јасни.

Задатак 1.1 Доказати да за све природне бројеве n важи

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Решење:

(БИ) Како се тврди да важи за свако n , у бази индукције ћемо проверити да ли је тачно за $n = 1$. У тврђењу са леве стране имамо суму n сабирака, па за $n = 1$ имамо „суму” једног сабирка, тј. само први члан, док у израз на десној страни заменимо $n = 1$. Дакле, питамо се да ли је

$$1 = \frac{1(1+1)}{2},$$

што јесте тачно.

(ИХ) У индуктивној хипотези претпостављамо да је тврђење тачно за $n - 1$, тј. да важи

$$1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}.$$

Значи, на левој страни имамо суму $n - 1$ сабирака, а у израз на десној страни уместо n убацимо $n - 1$.

(КИ) У овом кораку доказујемо да тврдња важи за суму првих n бројева, тј. баш једнакост која је дата у задатку. То ћемо урадити користећи (ИХ) на следећи начин:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n &= \underbrace{1 + 2 + \dots + (n-1)}_{\text{из (ИХ) ово} = \frac{(n-1)n}{2}} + n \\ &= \frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{(n-1)n + 2n}{2} \\ &= \frac{n^2 - n + 2n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}, \end{aligned}$$

што је и требало доказати.

На основу математичке индукције, тврђење важи за све природне бројеве. ■

Ово је задатак који је готово увек први пример за индукцију. Сада прелазимо на мало озбиљније задатке:

Задатак 1.2 (Сеп-3, 2018.) Доказати да за све природне бројеве n важи

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}.$$

Решење:

(БИ) Проверавамо да ли важи за $n = 1$. Дакле, на левој страни имамо само први члан, а у десну убацимо $n = 1$, и добијамо

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{4} - \frac{2 \cdot 1 + 3}{4 \cdot 3^1} = \frac{3}{4} - \frac{5}{12} = \frac{9-5}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3},$$

што је тачно.

(ИХ) Претпостављамо да тврђење важи за $n - 1$, тј. да важи

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{n-1}{3^{n-1}} = \frac{3}{4} - \frac{2n+1}{4 \cdot 3^{n-1}}.$$

(КИ) Проверавамо да ли је тачно за n , тј. управо тврдњу из задатка:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{n}{3^n} &= \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{n-1}{3^{n-1}}}_{=\frac{3}{4} - \frac{2n+1}{4 \cdot 3^{n-1}} \text{ због (ИХ)}} + \frac{n}{3^n} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{2n+1}{4 \cdot 3^{n-1}} + \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4} - \frac{3(2n+1) - 4n}{4 \cdot 3^n} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}, \end{aligned}$$

што је и требало доказати.

На основу математичке индукције, тврђење важи за све природне бројеве. ■

Пре наставка, једна битна напомена - при сређивању израза у (КИ) увек треба обратити пажњу на то шта заправо желимо да добијемо на крају сређивања и трудити се да те делове који су већ у реду не компликујемо. Конкретно, при сређивању израза у претходном задатку нисмо доводили под заједнички именилац и $\frac{3}{4}$ зато што је то део који је и у поставци задатка издвојен.

Задатак 1.3 (1.кол, 2017.) Доказати да за све природне бројеве n важи

$$\left(1 - \frac{9}{2^2}\right) \left(1 - \frac{9}{5^2}\right) \dots \left(1 - \frac{9}{(3n-1)^2}\right) = -\frac{3n+2}{2(3n-1)}.$$

Решење:

(БИ) Проверавамо да ли је тачно за $n = 1$. У овом задатку на левој страни имамо производ n чланова, па за $n = 1$ узимамо само први члан из тог производа, а на десној само заменимо $n = 1$. Дакле, проверавамо да ли је

$$1 - \frac{9}{2^2} = -\frac{3 \cdot 1 + 2}{2(3 \cdot 1 - 1)} = -\frac{5}{4},$$

што јесте тачно.

(ИХ) Претпостављамо да је тврђење тачно за $n - 1$, тј. да важи

$$\left(1 - \frac{9}{2^2}\right) \left(1 - \frac{9}{5^2}\right) \dots \left(1 - \frac{9}{(3n-4)^2}\right) = -\frac{3n-1}{2(3n-4)}.$$

(КИ) Проверавамо да ли је тачно за n , тј. управо тврдњу из задатка:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{9}{2^2}\right) \left(1 - \frac{9}{5^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{9}{(3n-1)^2}\right) \\ &= \underbrace{\left(1 - \frac{9}{2^2}\right) \left(1 - \frac{9}{5^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{9}{(3n-4)^2}\right)}_{=-\frac{3n-1}{2(3n-4)} \text{ због (ИХ)}} \cdot \left(1 - \frac{9}{(3n-1)^2}\right) \\ &= -\frac{3n-1}{2(3n-4)} \cdot \frac{(3n-1)^2 - 9}{(3n-1)^2} = -\frac{3n-1}{2(3n-4)} \cdot \frac{9n^2 - 6n - 8}{(3n-1)^2} \\ &= -\frac{3n-1}{2(3n-4)} \cdot \frac{(3n-4)(3n+2)}{(3n-1)^2} = -\frac{3n+2}{2(3n-1)}, \end{aligned}$$

што је и требало доказати.

На основу математичке индукције, тврдње важи за све природне бројеве. ■

У претходним задацима смо користећи индукцију доказивали неке **једнакости** и, у суштини, то је најједноставнији тип задатака. Математичка индукција се може примењивати и за друге ствари, као што је на пример доказивање **дељивости**. Запис $6 \mid 24$ се чита као „6 дели 24” (што значи да је 24 дељиво са 6, јер важи $24 = 6 \cdot 4$). Наредни задатак је таквог типа:

Задатак 1.4 (Феб, 2018.) *Математичком индукцијом доказати да за сваки природан број $n \geq 0$ важи*

$$59 \mid 5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1}.$$

Решење:

(БИ) Како се у задатку тврди за свако $n \geq 0$, у бази индукције ћемо проверити да ли важи за $n = 0$ (наравно, није грешка ни ако се провери за $n = 1$, али бисмо ту имали мало више рачуна, а нема потребе за тим). Дакле, проверавамо да ли

$$59 \mid 5^2 + 26 \cdot 5^0 + 8^1 = 25 + 26 + 8 = 59,$$

што јесте тачно.

(ИХ) Претпоставимо да тврдње важи за $n - 1$, тј.

$$59 \mid 5^{n+1} + 26 \cdot 5^{n-1} + 8^{2n-1}.$$

(КИ) Доказујемо да је тврдње тачно за n . Кренућемо од десне стране и намештати израз тако да можемо да искористимо (ИХ):

$$\begin{aligned} 5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1} &= 5 \cdot 5^{n+1} + 26 \cdot 5 \cdot 5^{n-1} + 8^2 \cdot 8^{2n-1} \\ &= 5 \cdot \underbrace{(5^{n+1} + 26 \cdot 5^{n-1} + 8^{2n-1})}_{59 \mid \text{ово због (ИХ)}} + 59 \cdot 8^{2n-1}. \end{aligned}$$

Први сабирак је дељив са 59 због (ИХ), а други је облика 59 пута нешто, па је очигледно дељив са 59. Дакле, важи $59 \mid 5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1}$.

На основу математичке индукције, тврдње важи за све природне бројеве. ■

Задатак 1.5 (Јан, 2017.) *Доказати да за све природне бројеве n важи*

$$17 \mid 6^{2n} + 19^n - 2^{n+1}.$$

Решење:

(БИ) Проверавамо да ли је тврдња тачна за $n = 1$. Проверавамо да ли

$$17 \mid 6^{2 \cdot 1} + 19^1 - 2^{1+1} = 36 + 19 - 4 = 51 = 3 \cdot 17,$$

што јесте тачно.

(ИХ) Претпоставимо да тврђење важи за $n - 1$, тј. да важи

$$17 \mid 6^{2n-2} + 19^{n-1} - 2^n.$$

(КИ) Проверавамо да ли важи за n , тј. управо тврдњу из поставке задатка. Кренемо са леве стране и намештамо на (ИХ):

$$\begin{aligned} 6^{2n} + 19^n - 2^{n+1} &= 36 \cdot 6^{2n-2} + 19 \cdot 19^{n-1} - 2 \cdot 2^n \\ &= 2 \underbrace{(6^{2n-2} + 19^{n-1} - 2^n)}_{17 \mid \text{ због (ИХ)}} + \underbrace{34 \cdot 6^{2n-2}}_{17 \mid} + \underbrace{17 \cdot 19^{n-1}}_{17 \mid}, \end{aligned}$$

па је тврђење тачно и за n .

На основу математичке индукције, тврђење важи за све природне бројеве. ■

Приказаћемо још један тип задатака у којима се користи индукција, а то је доказивање **неједнакости**. Код овог типа се у (КИ) обично користи нека додатна неједнакост, која је или очигледна, или се и она доказује индукцијом.

Задатак 1.6 (1.кол-2014.) Доказати да за све природне бројеве n важи

$$n! \leq n^n.$$

Решење:

(БИ) За $n = 1$ добијамо $1 \leq 1^1$ што важи.

(ИХ) Претпоставимо да тврђење важи за $n - 1$, тј. $(n - 1)! \leq (n - 1)^{n-1}$.

(КИ) Доказујемо да важи за n . Крећемо од леве стране и намештамо на (ИХ):

$$n! = n \cdot (n - 1)! \underset{\text{(ИХ)}}{\leq} n \cdot (n - 1)^{n-1} \underset{n-1 < n}{\leq} n \cdot n^{n-1} = n^n,$$

што је и требало доказати.

На основу математичке индукције, тврђење важи за све природне бројеве. ■

Задатак 1.7 (1.кол, 2012.) Математичком индукцијом показати да за све природне бројеве $n \geq 8$ важи $\sqrt{3^n} > n^2$.

Решење:

(БИ) Како се тврди за све бројеве $n \geq 8$, за базу индукције смемо узети најмање $n = 8$ (не можемо $n = 1$ као обично!!!). Проверавамо да ли важи

$$\sqrt{3^8} = 81 > 64 = 8^2,$$

што јесте тачно.

(ИХ) Претпоставимо да је тврђење тачно за $n - 1$, тј. да важи

$$\sqrt{3^{n-1}} > (n - 1)^2.$$

(КИ) Проверавамо да ли је тачно за n , тј. баш тврдњу из задатка. Крећемо од леве стране и користимо (ИХ) (и још неку неједнакост вероватно) да наместимо на десну страну тврдње:

$$\sqrt{3^n} = \sqrt{3}\sqrt{3^{n-1}} \underset{(ИХ)}{>} \sqrt{3}(n-1)^2 = \sqrt{3}(n^2 - 2n + 1) \overset{?}{>} n^2.$$

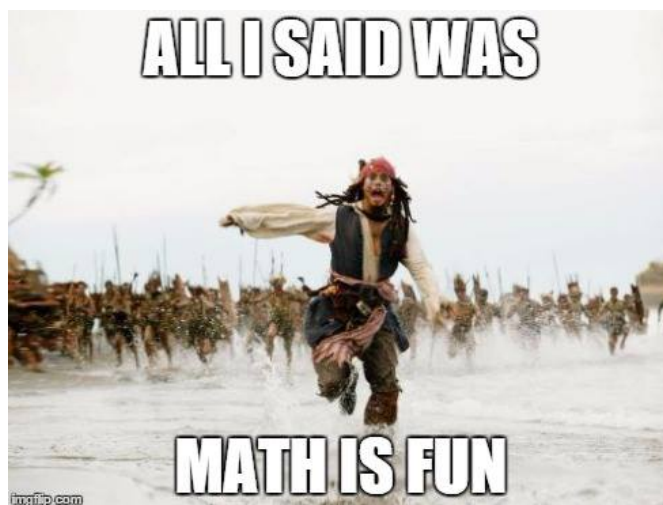
Остаје да проверимо још да ли важи ова друга неједнакост. Ако то важи, онда можемо да уклонимо упитник и решили смо задатак. Проверавамо да ли важи $\sqrt{3}(n^2 - 2n + 1) > n^2$, а то је еквивалентно са $(\sqrt{3} - 1)n^2 - 2\sqrt{3}n + \sqrt{3} > 0$. Значи, идеја је да решимо ову квадратну једначину по n и да докажемо да нема нула за $n \geq 8$ и да је ту позитивна. Решења ове квадратне једначине су

$$\begin{aligned} n_{1/2} &= \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 4 \cdot (\sqrt{3} - 1) \cdot \sqrt{3}}}{2(\sqrt{3} - 1)} \\ n_{1/2} &= \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{12 - 12 + 4\sqrt{3}}}{2(\sqrt{3} - 1)} \\ n_1 &= \frac{\sqrt{3} - \sqrt[4]{3}}{\sqrt{3} - 1}, \quad n_2 = \frac{\sqrt{3} + \sqrt[4]{3}}{\sqrt{3} - 1}. \end{aligned}$$

Сада треба некако (без дигитрона) проценити отприлике n_1 и n_2 . Знамо да је $\sqrt{2} \approx 1,4$ и $\sqrt{3} \approx 1,7$ (знамо да су између $\sqrt{1} = 1$ и $\sqrt{4} = 2$, а користе се често па смо их запамтили ваљда). Како је $\sqrt[4]{3} = \sqrt{\sqrt{3}} \approx \sqrt{1,7}$, важи $1 < \sqrt{1,7} < \sqrt{2} \approx 1,4$ (битније нам је n_2 овде, па је битнија горња граница за $\sqrt[4]{3}$). Сада можемо проценити n_1 и n_2 са

$$n_1 = \frac{\sqrt{3} - \sqrt[4]{3}}{\sqrt{3} - 1} \approx \frac{1.7 - 1.4}{0.7} \approx \frac{1}{2}, \quad n_2 = \frac{\sqrt{3} + \sqrt[4]{3}}{\sqrt{3} - 1} \leq \frac{1.7 + 1.4}{0.7} \approx \frac{4.1}{0.7} \approx 6.$$

Како је коефицијент уз n^2 једнак $\sqrt{3} - 1 > 0$, имамо „срећну” параболу, па је она негативна само између n_1 и n_2 , што значи да је за $n > n_2 \approx 6$ позитивна, па специјално добијамо да је $(\sqrt{3} - 1)n^2 - 2\sqrt{3}n + \sqrt{3} > 0$ за $n \geq 8$, што значи да можемо уклонити упитник и тиме смо решили овај задатак. ■



2 Комплексни бројеви

Ако посматрамо једначину $x^2 + 1 = 0$, она у скупу реалних бројева $\mathbb{R}$ нема решења, јер би решења била $x_1 = \sqrt{-1}$ и $x_2 = -\sqrt{-1}$, а то није дефинисано у $\mathbb{R}$. Због тога се уводе комплексни бројеви како би ова, а и све остале квадратне једначине, имале решења. Уводимо имагинарну јединицу i као $i = \sqrt{-1}$.

Комплексан број z је број облика

$$z = x + iy, \quad (1)$$

где $x, y \in \mathbb{R}$. Скуп свих комплексних бројева обележавамо са $\mathbb{C}$. Запис комплексног броја у облику (1) се назива **алгебарски запис** и тада се x назива реални део, а y имагинарни део комплексног броја z и пишемо $x = \operatorname{Re} z$ и $y = \operatorname{Im} z$. Број $\bar{z} = x - iy$ се назива **конјугат** комплексног броја $z = x + iy$.

Комплексан број $z = x + iy$ можемо записати у **тригонометријском облику**

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta), \quad (2)$$

где је $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$ **модуо** комплексног броја z , а θ се рачуна из услова $\cos \theta = \frac{x}{\rho}$, $\sin \theta = \frac{y}{\rho}$ и назива се **аргумент** комплексног броја z . Обратите пажњу да $\theta \neq \arctg \frac{y}{x}$ (нпр. из $\cos \theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ и $\sin \theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ добијамо **тачну вредност** $\theta = \frac{5\pi}{4}$, док из $\theta = \arctg \frac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = \arctg 1$ добијамо **погрешно** $\theta = \frac{\pi}{4}$!!!)

Ојлеров или **експоненцијални** запис комплексног броја z је запис облика

$$z = \rho e^{i\theta}, \quad (3)$$

где су ρ и θ модуо и аргумент комплексног броја z .

Може се логично поставити питање - зашто имамо оволико записа једног истог комплексног броја? Па, сваки од ових записа има неке своје предности. На пример, алгебарски запис је погодан за операције сабирања и одузимања комплексних бројева, док је доста компликовано множење и дељење комплексних бројева у алгебарском запису. Ту наступа тригонометријски запис у ком је доста једноставно множење и дељење. Због тога ћемо написати формуле за сабирање и одузимање комплексних бројева у алгебарском запису, а за множење и дељење у тригонометријском. Ојлеров и тригонометријски запис су у суштини „једно те исто” је

Нека су $z_1 = x_1 + iy_1 = \rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ и $z_2 = x_2 + iy_2 = \rho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ два комплексна броја. Тада је

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\ z_1 - z_2 &= (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \\ z_1 \cdot z_2 &= \rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot \rho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = \rho_1 \rho_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)) \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)}{\rho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)) \end{aligned}$$

Логично, и множење и кореновање комплексног броја је једноставније у тригонометријском облику. Ако је $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$, тада је

$$z^n = \rho^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)). \quad (4)$$

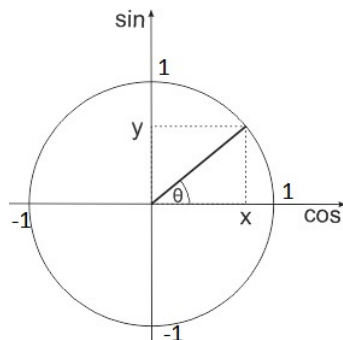
Постоје тачно n различитих корена комплексног броја z , тј. $\sqrt[n]{z} \in \{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}\}$, где је

$$u_k = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), \text{ за } k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (5)$$

Одређивање углова са тригонометријског круга

Нека су $x, y \in [0, 1]$ бројеви такви да је $x^2 + y^2 = 1$. Разликоваћемо четири случаја у зависности од тога у ком квадранту је тражени угао θ :

(1) **Први квадрант**, $\cos \theta = x$, $\sin \theta = y$:



Ово је случај у коме морамо напамет да знамо вредности синуса и косинуса за три позната угла $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{3}$, и све остале углове ћемо онда моћи да видимо са тригонометријског круга користећи та три угла. Дакле, треба запамтити

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

а онда из овога знамо и вредности косинуса због $\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$, па је

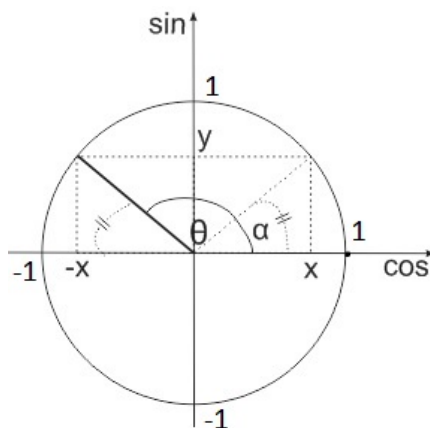
$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Вредности косинуса су на реалној оси, а вредности синуса на имагинарној. Са круга можемо очитати да је

$$\cos 0 = 1, \quad \sin 0 = 0, \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

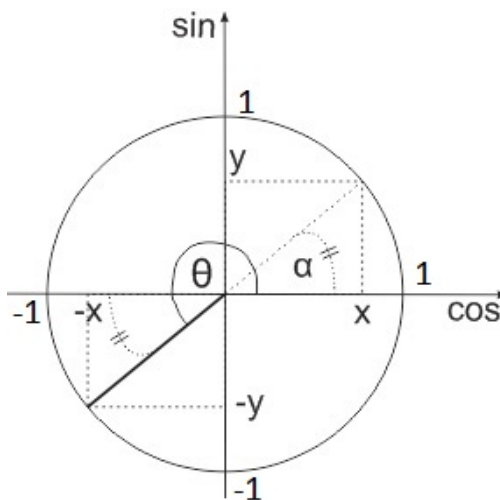
Дакле, знамо вредности за све познате углове $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

(2) **Други квадрант**, $\cos \theta = -x$, $\sin \theta = y$:



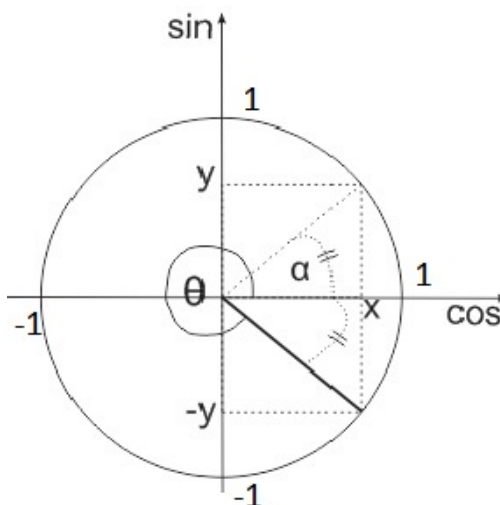
Најпре ћемо одредити угао α који је у првом квадранту и који има $\cos \alpha = x$ и $\sin \alpha = y$ (први случај), а затим ћемо тражени угао θ добити као $\theta = \pi - \alpha$ (видети слику).

(3) **Трећи квадрант**, $\cos \theta = -x$, $\sin \theta = -y$:



Најпре ћемо одредити угао α који је у првом квадранту и који има $\cos \alpha = x$ и $\sin \alpha = y$ (први случај), а затим ћемо тражени угао θ добити као $\theta = \pi + \alpha$ (видети слику).

(4) **Четврти квадрант**, $\cos \theta = x$, $\sin \theta = -y$:



Најпре ћемо одредити угао α који је у првом квадранту и који има $\cos \alpha = x$ и $\sin \alpha = y$ (први случај), а затим ћемо тражени угао θ добити као $\theta = 2\pi - \alpha$ (видети слику).

Дакле, ако имамо познате вредности $\sin \theta$ и $\cos \theta$, онда угао θ одређујемо на основу једног од ова четири случаја.

Аналогно, ако имамо дат угао θ , вредности $\sin \theta$ и $\cos \theta$ можемо истом логиком одредити - нађемо одговарајући угао $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, за њега знамо вредности синуса и косинуса (први случај), и онда у зависности од тога у ком је квадранту θ додамо + или - на вредности $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$.

Задатак 2.1 Одредити реални и имагинарни део комплексног броја $z = \frac{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

Решење: Како је $z\bar{z} = \rho^2 \in \mathbb{R}$, идеја је да „рационалишемо” z на следећи начин:

$$z = \frac{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^2}{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \frac{(\frac{1}{2})^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}i + (i\frac{\sqrt{3}}{2})^2}{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

па добијамо $\operatorname{Re} z = -\frac{1}{2}$ и $\operatorname{Im} z = \frac{\sqrt{3}}{2}$. ■

Задатак 2.2 (Септ-1, 2018.) Одредити реални и имагинарни део комплексног броја

$$z = \left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i} \right)^7.$$

Решење: Видели смо да је за степеновање доста погоднији тригонометријски запис, па је идеја да степењујемо у тригонометријском запису.

Означимо $z_1 = 1 - i$ и $z_2 = \sqrt{3} + i$. Тада је $z = \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^7$. Ако на исти начин као у претходном задатку покушамо да „рационалишемо” $\frac{z_1}{z_2}$, па да тад пребацимо у тригонометријски запис, нећемо добити неке „лепе” бројеве. Значи, мораћемо некако другачије. Па, приметимо да важи

$$z = \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^7 = \frac{z_1^7}{z_2^7},$$

и приметимо да z_1 и z_2 можемо лепо да пребацимо у тригонометријски запис. Значи, пребацићемо z_1 и z_2 у тригонометријски запис, онда степеновати појединачно, и на крају поделити. Добићемо тригонометријски запис броја z и онда ћемо одредити реални и имагинарни део.

Најпре посматрамо $z_1 = 1 - i$. Тада је $\rho = \sqrt{2}$, $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ па је $\theta = \frac{7\pi}{4}$. Дакле, $z_1 = \sqrt{2}(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4})$.

Исто радимо и за $z_2 = \sqrt{3} + i$. Добијамо $\rho = 2$, $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\sin \theta = \frac{1}{2}$ па је $\theta = \frac{\pi}{6}$. Дакле, $z_2 = 2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$.

Сада добијамо да је

$$\begin{aligned} z &= \frac{(\sqrt{2}(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}))^7}{(2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}))^7} = \frac{\sqrt{2}^7 (\cos \frac{49\pi}{4} + i \sin \frac{49\pi}{4})}{2^7 (\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6})} \\ &= \frac{1}{8\sqrt{2}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}} = -\frac{1+i}{8(\sqrt{3}+i)} = -\frac{(1+i)(\sqrt{3}-i)}{8(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} \\ &= -\frac{\sqrt{3}+1+(\sqrt{3}-1)i}{32}, \end{aligned}$$

па је $\operatorname{Re} z = -\frac{\sqrt{3}+1}{32}$ и $\operatorname{Im} z = -\frac{\sqrt{3}-1}{32}$. ■

Задатак 2.3 (Септ-2, 2018.) Решити једначину $z^5 - \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i = 1$.

Решење: Најпре пребацимо на једну страну све бројеве и добијемо једначину $z^5 = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$. Ако означимо $z_0 = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$, тада заправо решавамо $z^5 = z_0$, па су решења ове једначине $z = \sqrt[5]{z_0}$. Решења ћемо добити из формуле (5), али је пре тога потребно да z_0 пребацимо у тригонометријски запис.

Како је $z_0 = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$, добијемо $\rho_0 = \sqrt{9} = 3$, $\cos \theta_0 = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2}$ и $\sin \theta_0 = \frac{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, па је $\theta_0 = \frac{5\pi}{3}$, тј.

$$z_0 = 3\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right).$$

Сада користећи (5) добијемо да су решења једначине $z^5 = 3\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right)$ дата са

$$\begin{aligned} u_0 &= \sqrt[5]{3}\left(\cos \frac{\frac{5\pi}{3} + 0\pi}{5} + i \sin \frac{\frac{5\pi}{3} + 0\pi}{5}\right) = \sqrt[5]{3}\left(\cos \frac{5\pi}{15} + i \sin \frac{5\pi}{15}\right), \\ u_1 &= \sqrt[5]{3}\left(\cos \frac{\frac{5\pi}{3} + 2\pi}{5} + i \sin \frac{\frac{5\pi}{3} + 2\pi}{5}\right) = \sqrt[5]{3}\left(\cos \frac{11\pi}{15} + i \sin \frac{11\pi}{15}\right), \\ u_2 &= \sqrt[5]{3}\left(\cos \frac{\frac{5\pi}{3} + 4\pi}{5} + i \sin \frac{\frac{5\pi}{3} + 4\pi}{5}\right) = \sqrt[5]{3}\left(\cos \frac{17\pi}{15} + i \sin \frac{17\pi}{15}\right), \\ u_3 &= \sqrt[5]{3}\left(\cos \frac{\frac{5\pi}{3} + 6\pi}{5} + i \sin \frac{\frac{5\pi}{3} + 6\pi}{5}\right) = \sqrt[5]{3}\left(\cos \frac{23\pi}{15} + i \sin \frac{23\pi}{15}\right), \\ u_4 &= \sqrt[5]{3}\left(\cos \frac{\frac{5\pi}{3} + 8\pi}{5} + i \sin \frac{\frac{5\pi}{3} + 8\pi}{5}\right) = \sqrt[5]{3}\left(\cos \frac{29\pi}{15} + i \sin \frac{29\pi}{15}\right). \end{aligned}$$

Дакле, постоји 5 решења дате једначине.

Приметимо да су сва решења на кругу полупречника $\sqrt[5]{3}$ (сва решења имају исти модуо) и симетрична су (разлика аргумената било која два суседна решења је $\frac{6\pi}{15}$). Дакле, кад одредимо прва два решења, онда остала не морамо „поступно” рачунати јер знамо да имају исти модуо, а аргумент добијемо тако што само додајемо разлику аргумената прва два решења. ■

Задатак 2.4 (Феб, 2018.) Одреди реални и имагинарни део комплексног броја

$$z = e^{e + \frac{\pi(-1 - i\sqrt{3})}{6}i}.$$

Решење: Идеја је да све што је реално избацимо испред, и да затим применимо формулу $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$. Добијемо

$$\begin{aligned} z &= e^{e + \frac{\pi(-1 - i\sqrt{3})}{6}i} = e^{e + \frac{\sqrt{3}\pi}{6} - i\frac{\pi}{6}} = e^{e + \frac{\sqrt{3}\pi}{6}} \cdot e^{-i\frac{\pi}{6}} \\ &= e^{e + \frac{\sqrt{3}\pi}{6}} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = e^{e + \frac{\sqrt{3}\pi}{6}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right), \end{aligned}$$

$$\text{па је } \operatorname{Re} z = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot e^{e + \frac{\sqrt{3}\pi}{6}} \text{ и } \operatorname{Im} z = -\frac{1}{2} \cdot e^{e + \frac{\sqrt{3}\pi}{6}}. \quad \blacksquare$$

Задатак 2.5 (Јан, 2018.) Решити једначину $z^3 = 1 + \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$.

Решење:

1. начин — зашто лако кад може компликовано:

Означимо $z_0 = 1 + \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$, затим ћемо z_0 записати у тригонометријском облику и онда решења добијамо из формуле (5). Овај поступак пребацивања броја који је облика z_0 из алгебарског у тригонометријски запис је стандардни поступак који се може применити за било који угао (у овом случају имамо угао $\frac{\pi}{3}$). Користећи формуле за половину угла, $\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1+\cos \alpha}{2}}$ и $\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{2}}$, добијамо да је

$$\begin{aligned}\rho_0 &= \sqrt{(1 + \cos \frac{\pi}{3})^2 + \sin^2 \frac{\pi}{3}} = \sqrt{1 + 2 \cos \frac{\pi}{3} + \underbrace{\cos^2 \frac{\pi}{3} + \sin^2 \frac{\pi}{3}}_{=1}} \\ &= 2 \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{3}}{2}} = 2 \cdot \cos \frac{\pi}{6} \\ \cos \theta_0 &= \frac{1 + \cos \frac{\pi}{3}}{2 \cdot \cos \frac{\pi}{6}} = \frac{2 \cdot \cos^2 \frac{\pi}{6}}{2 \cdot \cos \frac{\pi}{6}} = \cos \frac{\pi}{6}, \\ \sin \theta_0 &= \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{2 \cdot \cos \frac{\pi}{6}} = \frac{2 \cdot \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{6}}{2 \cdot \cos \frac{\pi}{6}} = \sin \frac{\pi}{6},\end{aligned}$$

па добијамо да је $\theta_0 = \frac{\pi}{6}$, тј.

$$z_0 = 2 \cdot \cos \frac{\pi}{6} (\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}).$$

Сада су решења једначине $z^3 = z_0$ једнака $z = \sqrt[3]{z_0}$ и дата су са

$$\begin{aligned}u_0 &= \sqrt[3]{2 \cdot \cos \frac{\pi}{6}} (\cos \frac{\frac{\pi}{6} + 0\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{6} + 0\pi}{3}) = \sqrt[3]{2 \cdot \cos \frac{\pi}{6}} (\cos \frac{\pi}{18} + i \sin \frac{\pi}{18}), \\ u_1 &= \sqrt[3]{2 \cdot \cos \frac{\pi}{6}} (\cos \frac{\frac{\pi}{6} + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{6} + 2\pi}{3}) = \sqrt[3]{2 \cdot \cos \frac{\pi}{6}} (\cos \frac{13\pi}{18} + i \sin \frac{13\pi}{18}), \\ u_2 &= \sqrt[3]{2 \cdot \cos \frac{\pi}{6}} (\cos \frac{\frac{\pi}{6} + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{6} + 4\pi}{3}) = \sqrt[3]{2 \cdot \cos \frac{\pi}{6}} (\cos \frac{25\pi}{18} + i \sin \frac{25\pi}{18}).\end{aligned}$$

2. начин — лако:

Означимо $z_0 = 1 + \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$, затим ћемо z_0 записати у тригонометријском облику и онда решења добијамо из формуле (5). Приметимо да заправо имамо „познат” угао, тј. важи $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ и $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, па је $z_0 = 1 + \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$. Сада добијамо $\rho_0 = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$, $\cos \theta_0 = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\sin \theta_0 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$, па је $\theta_0 = \frac{\pi}{6}$. Дакле, добијамо да је

$$z_0 = \sqrt{3} (\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}),$$

па су решења једнака $z = \sqrt[3]{z_0}$, и дата су са

$$\begin{aligned}u_0 &= \sqrt[3]{\sqrt{3}} (\cos \frac{\frac{\pi}{6} + 0\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{6} + 0\pi}{3}) = \sqrt[6]{3} (\cos \frac{\pi}{18} + i \sin \frac{\pi}{18}), \\ u_1 &= \sqrt[3]{\sqrt{3}} (\cos \frac{\frac{\pi}{6} + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{6} + 2\pi}{3}) = \sqrt[6]{3} (\cos \frac{13\pi}{18} + i \sin \frac{13\pi}{18}), \\ u_2 &= \sqrt[3]{\sqrt{3}} (\cos \frac{\frac{\pi}{6} + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{6} + 4\pi}{3}) = \sqrt[6]{3} (\cos \frac{25\pi}{18} + i \sin \frac{25\pi}{18}).\end{aligned}$$

Дакле, ова једначина има три решења. ■

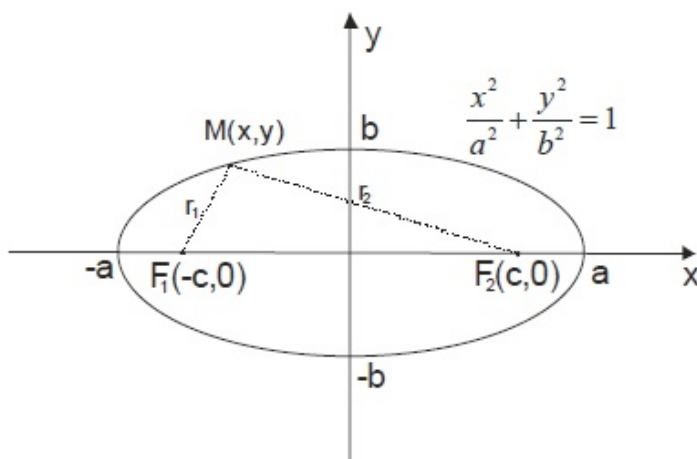
3 Криве другог реда

(1) Елипса

Елипса је скуп тачака у равни са особином да је збир растојања ма које тачке од двеју датих тачака (жижа) константан број. Канонска једначина елипсе је

$$E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (6)$$

где су $a, b > 0$ и $a > b$. Тада је a велика полуоса елипсе, мала полуоса је b , линеарни ексцентрицитет елипсе је број $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, жиже су тачке $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ и нумерички ексцентрицитет је $e = \frac{c}{a} < 1$.



Једначина тангенте на елипсу E у тачки $A(x_0, y_0) \in E$ је дата формулом $t : \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$. Значи, ако тачка припада елипси, онда једначину тангенте у тој тачки добијамо тако што у једначини елипсе $E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ заменимо по једно x и y са координатама тачке x_0 и y_0 у којој тражимо тангенту. Ово важи и када није елипса у канонском облику.

Ако тачка $A(x_0, y_0)$ не припада елипси, онда из те тачке постоје две тангенте на елипсу (ако се тачка не налази унутар елипсе). Права $t : y = kx + n$ је тангента на елипсу E из тачке A уколико важи **услов додира праве и елипсе** који гласи

$$a^2 k^2 + b^2 = n^2. \quad (7)$$

Значи, у зависности од тога да ли A припада или не елипси, једначину тангенте добијамо или директно, или преко услова додира.

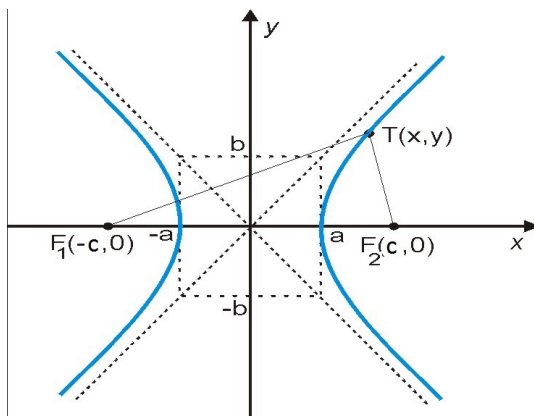
(2) Хипербола

Хипербола је скуп тачака у равни са особином да је разлика растојања ма које тачке од двеју датих тачака (жижа) константан број. Канонска једначина хиперболе је

$$H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (8)$$

где су $a, b > 0$ и $a > b$. Тада је a реална полуоса хиперболе, имагинарна полуоса је b , линеарни ексцентрицитет хиперболе је број $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, жиже су тачке

$F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ и нумерички ексцентрицитет је $e = \frac{c}{a} > 1$. Асимптоте хиперболе H су праве $a_{1/2} : y = \pm \frac{b}{a}x$.



Једначина тангенте на хиперболу H у тачки $A(x_0, y_0) \in H$ је дата формулом $t : \frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$. Значи, ако тачка припада хиперболи, онда једначину тангенте у тој тачки добијамо тако што у једначини хиперболе $H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ заменимо по једно x и y са координатама тачке x_0 и y_0 у којој тражимо тангенту. Ово важи и када није хипербола у канонском облику.

Ако тачка $A(x_0, y_0)$ не припада хиперболи, онда из те тачке постоје две тангенте на хиперболу. Права $t : y = kx + n$ је тангента на хиперболу H из тачке A уколико важи **услов додира праве и хиперболе** који гласи

$$a^2 k^2 - b^2 = n^2. \quad (9)$$

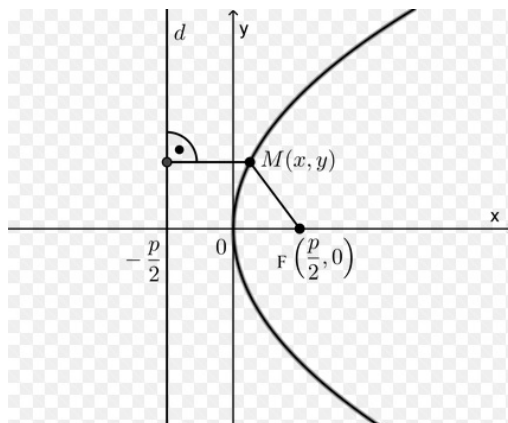
Значи, у зависности од тога да ли A припада или не хиперболи, једначину тангенте добијамо или директно, или преко услова додира. Приметимо да је све аналогно као за елипсу, само су обрнути знакови $+$ и $-$, као и у канонским једначинама.

(3) Парабола

Парабола је скуп тачака у равни које имају особину да су једнако удаљене од директрисе и жиже. Канонска једначина параболе је

$$P : y^2 = 2px. \quad (10)$$

Тада је p параметар параболе, директриса је права $d : x = -\frac{p}{2}$ и жижа је тачка $F(\frac{p}{2}, 0)$.



Једначина тангенте на параболу P у тачки $A(x_0, y_0) \in P$ је дата формулом $t : yy_0 = p(x + x_0)$. Значи, ако тачка припада параболи, онда једначину тангенте у тој тачки добијамо тако што у једначини параболе $P : yy = p(x + x)$ заменимо по једно x и y са координатама тачке x_0 и y_0 у којој тражимо тангенту. Ово важи и када није параболу у канонском облику.

Ако тачка $A(x_0, y_0)$ не припада параболи, онда из те тачке постоје две тангенте на параболу. Права $t : y = kx + n$ је тангента на параболу P из тачке A уколико важи **услов додира праве и параболе** који гласи

$$p = 2kn. \quad (11)$$

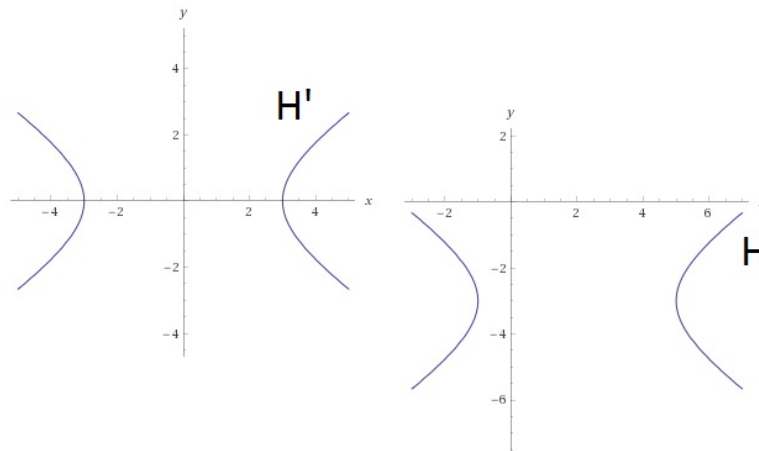
Значи, у зависности од тога да ли A припада или не параболи, једначину тангенте добијамо или директно, или преко услова додира.

Сада смо спремни да радимо задатке:

Задатак 3.1 Наћи полуосе, ексцентрицитет, жиже и асимптоте хиперболе

$$H : \frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{4} = 1.$$

Решење: За све шта се тражи већ имамо формуле у уводном делу, али је све то за хиперболу у канонском облику. Ова хипербола није у канонском облику па је потребно да је транслирамо до координатног почетка. То ћемо урадити транслацијом $x' = x - 2$, $y' = y + 3$. Када заменимо ово у једначини H , добијамо транслирану хиперболу $H' : \frac{x'^2}{9} - \frac{y'^2}{4} = 1$ која јесте у канонском облику.



Како је транслација изометрија (не мења величину хиперболе), велика и мала полуоса $a = 3$ и $b = 2$ остају исте, као и ексцентрицитет $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13}$. Жиже хиперболе H' у канонском облику су дате са $F'_1(-\sqrt{13}, 0)$ и $F'_2(\sqrt{13}, 0)$, док су асимптоте $a'_{1/2} : y' = \pm \frac{2}{3}x'$. Нама треба ово за хиперболу H , па је потребно да транслирамо назад (тј. да се вратимо у координате x и y). Дакле, асимптоте хиперболе H су $a_{1/2} : y + 3 = \pm \frac{2}{3}(x - 2)$ (само смо вратили назад $x' = x - 2$ и $y' = y + 3$). Исто је потребно да урадимо и за жиже. Како је $x' = x - 2$ и $y' = y + 3$, онда је $x = x' + 2$ и $y = y' - 3$. Жиже $F'_1(-\sqrt{13}, 0)$ и $F'_2(\sqrt{13}, 0)$ су у (x', y') координатама, а нама требају (x, y) координате, па је $F_1(-\sqrt{13} + 2, -3)$ и $F_2(\sqrt{13} + 2, -3)$. Да покупимо све на једном месту: полуосе хиперболе H су $a = 3$ и $b = 2$, ексцентрицитет је $c = \sqrt{13}$, жиже су $F_1(-\sqrt{13} + 2, -3)$ и $F_2(\sqrt{13} + 2, -3)$ и асимптоте су $a_1 : y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$ и $a_2 : y = \frac{2}{3}x - \frac{13}{3}$. ■

Задатак 3.2 (1.кол, 2017.) Наћи једначине тангенти на елипсу $2(x-3)^2 + 8(y+1)^2 = 32$ у пресечним тачкама са правом $x - 2y - 1 = 0$.

Решење: Како тражимо једначине тангенти на елипсу $E : 2(x-3)^2 + 8(y+1)^2 = 32$ у пресечним тачкама са правом $p : x - 2y - 1 = 0$, логично је да прво тражимо пресечне тачке елипсе E и праве p . То радимо тако што решавамо систем једначина који чине једначине праве p и елипсе E (Зашто? Па, једначина праве p је заправо скуп свих тачака чије координате задовољавају $x - 2y - 1 = 0$, док је једначина елипсе E скуп свих тачака чије координате задовољавају једначину $2(x-3)^2 + 8(y+1)^2 = 32$. Ако је тачка $A(x, y)$ у пресеку p и E , онда њене координате задовољавају обе једначине, тј. њене координате су решење система те две једначине):

$$x - 2y - 1 = 0$$

$$2(x-3)^2 + 8(y+1)^2 = 32$$

$$x = 2y + 1$$

$$2(2y+1-3)^2 + 8(y+1)^2 = 32$$

$$x = 2y + 1$$

$$16y^2 = 16$$

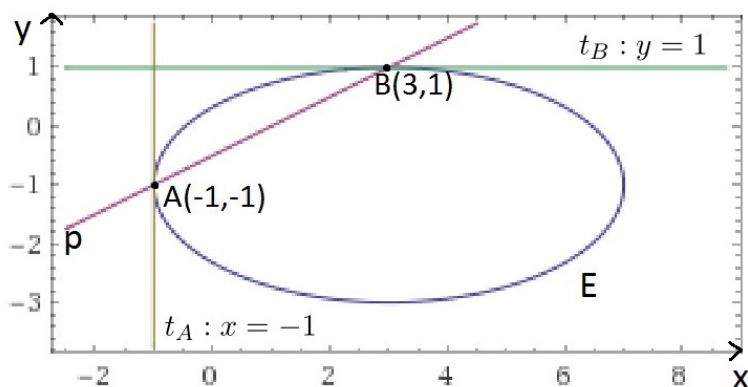
$$y_1 = -1 \Rightarrow x_1 = 2 \cdot (-1) + 1 = -1,$$

$$y_2 = 1 \Rightarrow x_2 = 2 \cdot 1 + 1 = 3.$$

Дакле, пресечне тачке су $A(-1, -1)$ и $B(3, 1)$. Други део задатка је да нађемо тангенте на E у овим тачкама. Како су ове тачке у пресеку p и E , онда оне припадају E па једначине тангенти можемо добити директном заменом координата ових тачака уместо по једног x и y из једначине E . Дакле, тангенте су

$$t_A : 2(x-3)(-1-3) + 8(y+1)(-1+1) = 32 \Rightarrow t_A : x = -1;$$

$$t_B : 2(x-3)(3-3) + 8(y+1)(1+1) = 32 \Rightarrow t_B : y = 1.$$



Тангента у тачки A је $t_A : x = -1$, а тангента у тачки B је $t_B : y = 1$. ■

Задатак 3.3 (Јан, 2017.) Одредити једначине тангенти на елипсу $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$ које садрже жижу параболе $y^2 = 8x$.

Решење: Елипса $E : x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$ није у канонском облику (јер је $a = 1 < b = 3$, тј. имамо „усправну“ елипсу), док је парабола $P : y^2 = 8x$ у канонском облику. Први корак је да нађемо жижу F параболе P , а затим ћемо тражити тангенте на елипсу E из тачке F .

Како је P у канонском облику (10), онда је параметар параболе P једнак $p = 4$ па је жижа $F(2, 0)$ и тиме је готов први део задатка.

У уводном делу смо видели да начин на који тражимо тангенте на елипсу зависи од тога да ли F припада или не елипси. Дакле, најпре требамо проверити да ли F припада или не елипси E . То ћемо урадити тако што убацимо координате тачке F у једначину елипсе и видимо да ли је једнакост задовољена или не. Убацавањем F у E добијамо

$$2^2 + \frac{0^2}{9} = 1,$$

што није тачно па тачка F не припада елипси E , што значи да ћемо тангенте тражити преко услова додира (7). Није битно што елипса E није у канонском облику, за услов додира можемо користити $a = 1$ и $b = 3$ (видети напомену након овог задатка). Тангента ће бити права $t : y = kx + n$, а да бисмо одредили k и n биће нам потребне две једначине (пошто имамо две непознате). Прву једначину ћемо добити из чинјенице да тражимо тангенте из тачке F , па тачка F припада правој t . Када убацимо координате тачке F у једначину праве t добијамо

$$0 = k \cdot 2 + n, \text{ тј. } n = -2k.$$

Другу једначину добијамо из услова додира заменом $a = 1$ и $b = 3$

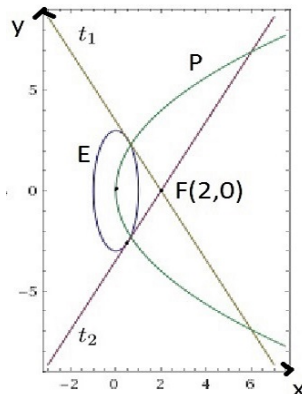
$$k^2 + 9 = n^2.$$

Решавањем овог система

$$\begin{aligned} n &= -2k, \\ k^2 + 9 &= n^2, \end{aligned}$$

добијамо решења $(n_1, k_1) = (-\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ и $(n_2, k_2) = (\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$. Дакле, постоје две тангенте из тачке F на елипсу E и то су

$$t_1 : y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}, \quad t_2 : y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}.$$



■

Напомена 3.1 У претходном задатку смо имали елипсу $E : x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$ која није у канонском облику јер је $a < b$ (имамо усправну елипсу, канонска је водоравна). Да бисмо је довели у канонски облик, морамо да је ротирамо за 90° . Формуле ротације за 90° гласе $x' = -y$ и $y' = x$ (јер су формуле ротације за угао θ дате са $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, тј. $x' = \cos \theta x - \sin \theta y$, $y' = \sin \theta x + \cos \theta y$) па кад заротирамо E добијамо $E' : \frac{x'^2}{9} + y'^2 = 1$ која јесте у канонском облику јер је $a' = 3$ и $b' = 1$. У претходном задатку смо радили директно са E и добили једначине тангенти. За вежбу проверити да се добија исто ако заротирамо до E' , затим нађемо тангенте на E' из тачке $F'(0, 2)$ (морамо заротирати и тачку F онда), и онда заротирамо назад до E , тј. вратимо смену $x' = -y$ и $y' = x$. Ко за вежбу одради овако, требало би да добије $t'_1 : y' = -\frac{1}{\sqrt{3}}x' + 2$ и $t'_2 : y' = \frac{1}{\sqrt{3}}x' + 2$, па кад се заротира назад добију се тангенте као у претходном задатку. $\square$

Сврха ове напомене? Битно је запамтити формуле ротације за 90° , тј. како да од усправне елипсе-хиперболе-параболе добијемо канонску. Дакле, то радимо сменама $x' = -y$ и $y' = x$. Битно је да приметимо како гласе формуле асимптота ако је хипербола усправна. За канонску (водоравну) хиперболу су асимптоте $a_{1/2} : y = \pm \frac{b}{a}x$, па ротацијом добијамо да су асимптоте усправне хиперболе дате са $a'_{1/2} : y' = \mp \frac{a}{b}x'$. То ће нам бити потребно за наредни задатак:

Задатак 3.4 (Окт, 2014.) *Написати једначину хиперболе чије су асимптоте праве $p : y = 2x$ и $q : y = -2x$, а права $t : 6x - 5y + 8 = 0$ је њена тангента.*

Решење: Како се p и q секу у координатном почетку, онда је центар (пресек асимптота) хиперболе H тачка $(0, 0)$, па је њена једначина

$$H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

за неке a и b које треба одредити из услова задатка. У претходној напомени смо видели да су асимптоте хиперболе дате са $a_{1/2} : y = \pm \frac{b}{a}x$ или $a'_{1/2} : y' = \mp \frac{a}{b}x'$, па из услова да су праве p и q асимптоте добијамо да је или $\frac{b}{a} = 2$ или $\frac{a}{b} = 2$, тј. важи $b = 2a$ или $a = 2b$ (a и b морају бити позитивни, па не смо узети $b = -2a$ или $a = -2b$). Други услов који треба искористити је то да је права t тангента на хиперболу. Праву t ћемо записати у облику $t : y = \frac{6}{5}x + \frac{8}{5}$, па сада видимо да је $k = \frac{6}{5}$ и $n = \frac{8}{5}$. Пошто је t тангента, онда задовољава услов додира (9) па је то друга једначина коју ћемо користити да одредимо a и b .

Ако за прву једначину узмемо $b = 2a$, заменом у (9), и користећи $k = \frac{6}{5}$ и $n = \frac{8}{5}$, добијамо

$$\frac{36}{25}a^2 - 4a^2 = \frac{64}{25}.$$

Решавањем добијамо $-64a^2 = 64$, па је $a^2 = -1$, што је немогуће.

Дакле, прва једначина је $a = 2b$. Сада заменом у услов додира добијамо

$$\frac{36}{25}4b^2 - b^2 = \frac{64}{25},$$

па решавањем имамо $b^2 = \frac{64}{119}$ и $a^2 = 4b^2 = \frac{256}{119}$. Сада имамо да је једначина хиперболе дата са

$$H : \frac{x^2}{\frac{256}{119}} - \frac{y^2}{\frac{64}{119}} = 1, \text{ тј. } H : 119x^2 - 476y^2 = 256.$$

■

Задатак 3.5 Одредити једначине тангенти на параболу $P : y^2 = 12x$ из тачке $A(-1, -2)$.

Решење: Прво што проверавамо је то да ли тачка A припада параболу јер нам од тога зависи да ли одмах можемо да напишемо једначину тангенте, или ћемо морати да користимо услов додира. Заменом координата тачке A у једначину P добијамо

$$4 = 12 \cdot (-1),$$

што није тачно па $A \notin P$. Дакле, користимо услов додира. Права $t : y = kx + n$ је тангента на параболу P из тачке A ако задовољава услов додира који за P гласи

$$6 = 2kn.$$

Другу једначину добијамо из чињенице да тражимо тангенту из тачке A , па $A \in t$. Када убацимо координате тачке A у једначину тангенте t добијамо $-2 = -1 \cdot k + n$, тј. $n = k - 2$. Дакле, k и n су решења система

$$3 = kn$$

$$n = k - 2.$$

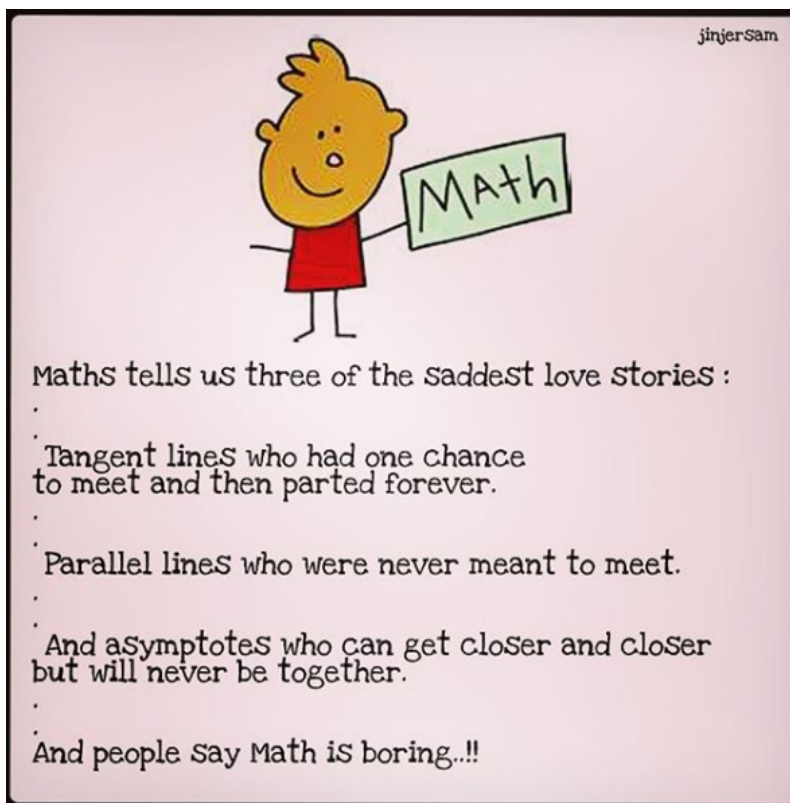
Када заменимо n у прву једначину добијамо $3 = k(k - 2)$, па решавамо квадратну једначину

$$k^2 - 2k - 3 = 0.$$

Решења су $k_1 = -1$ и $k_2 = 3$, па су $n_1 = k_1 - 2 = -1 - 2 = -3$ и $k_2 = 3$ и $n_2 = k_2 - 2 = 3 - 2 = 1$. Дакле, једначине тангенти из тачке A на параболу P су

$$t_1 : y = -x - 3, \quad t_2 : y = 3x + 1.$$

■



4 Аналитичка геометрија у простору

4.1 Вектори у $\mathbb{R}^3$

Пошто ћемо се бавити аналитичком геометријом у простору $\mathbb{R}^3$, све формуле ћемо писати у 3-координатном систему i, j и k (или x, y и z), тј. писаћемо $\vec{x} = x_1i + x_2j + x_3k = (x_1, x_2, x_3)$, где су $x_i \in \mathbb{R}$ координате вектора $\vec{x}$.

Скаларни производ вектора $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ је број

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Норма вектора $\vec{x}$ је број $\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Угао између вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$ ћемо обележавати са $\angle(\vec{x}, \vec{y}) \in [0, \pi]$ и рачунаћемо га из

$$\cos \angle(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}.$$

Специјално, ако је $\angle(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\pi}{2}$ кажемо да су $\vec{x}$ и $\vec{y}$ **ортогонални** и пишемо $\vec{x} \perp \vec{y}$. Приметимо да ако је $\vec{x} \perp \vec{y}$, онда је $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$. **Скалар-пројекција** вектора $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ на вектор $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ дата је формулом

$$\text{pr}_{\vec{y}} \vec{x} = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{y}\|} = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}.$$

Векторски производ вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$ је вектор $\vec{x} \times \vec{y}$ који има следећа својства:

- (1) Норма му је $\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \sin \angle(\vec{x}, \vec{y})$. Приметимо да норма вектора $\vec{x} \times \vec{y}$ заправо представља површину паралелограма разапетог са $\vec{x}$ и $\vec{y}$.
- (2) Правац му је такав да је ортогоналан на сваки од вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$
- (3) Смер му је такав да је уређена тројка $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y})$ позитивно оријентисана.

Ако посматрамо у координатама, векторски производ вектора $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ и $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ рачунамо као

$$\begin{aligned} \vec{x} \times \vec{y} &= \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \\ &= (x_2y_3 - x_3y_2)i - (x_1y_3 - x_3y_1)j + (x_1y_2 - x_2y_1)k \\ &= (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1). \end{aligned}$$

Мешовити производ вектора $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$ је број

$$[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = (\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}.$$

Апсолутна вредност мешовитог производа $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]$ једнака је запремини паралелепипеда разапетог векторима $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$. Ако је $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = 0$, кажемо да су $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$ **копланарни** (налазе се у истој равни па не разапињу паралелепипед, тј. запремина је нула). Ако посматрамо у координатама, мешовити производ вектора $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ и $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3)$ рачунамо као

$$\begin{aligned} [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] &= \det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} \\ &= (x_2y_3 - x_3y_2)z_1 - (x_1y_3 - x_3y_1)z_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)z_3. \end{aligned}$$

Наредни задатак је један од лепших из ове области па, како ћемо векторе користити и у наредном потпоглављу, овај задатак ће бити једини у овом делу:

Задатак 4.1 (1.кол, 2017.) Дати су вектори $\vec{a} = (7, 6, -6)$, $\vec{b} = (6, 2, 9)$ и $\vec{c} = (-6, 9, 2)$.

- а) Испитати да ли су ови вектори копланарни.
 б) Наћи запремину паралелепипеда конструисаног над ова три вектора.
 в) Да ли је тај паралелепипед коцка?

Решење:

- а) Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ су копланарни ако је $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$. Дакле, рачунамо

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] &= \det \begin{bmatrix} 7 & 6 & -6 \\ 6 & 2 & 9 \\ -6 & 9 & 2 \end{bmatrix} \\ &= 7 \cdot 2 \cdot 2 + 6 \cdot 9 \cdot (-6) + (-6) \cdot 6 \cdot 9 - (-6) \cdot 2 \cdot (-6) - 9 \cdot 9 \cdot 7 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \\ &= 28 - 324 - 324 - 72 - 567 - 72 = -1331 \neq 0, \end{aligned}$$

па $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ нису копланарни.

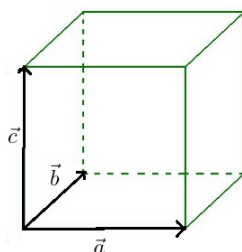
- б) Запремина паралелепипеда разапетог са $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ је $V = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = 1331$.
 в) Коцка је паралелепипед који има све једнаке и међусобно ортогоналне стране.
 Најпре ћемо проверити да ли су све стране једнаке:

$$\begin{aligned} \|\vec{a}\| &= \sqrt{(7, 6, -6) \cdot (7, 6, -6)} = \sqrt{49 + 36 + 36} = \sqrt{121} = 11, \\ \|\vec{b}\| &= \sqrt{(6, 2, 9) \cdot (6, 2, 9)} = \sqrt{36 + 4 + 81} = \sqrt{121} = 11, \\ \|\vec{c}\| &= \sqrt{(-6, 9, 2) \cdot (-6, 9, 2)} = \sqrt{36 + 81 + 4} = \sqrt{121} = 11. \end{aligned}$$

Како је $\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| = \|\vec{c}\| = 11$, све стране су једнаке и имају дужину 11. Сада проверавамо да ли су међусобно ортогоналне:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (7, 6, -6) \cdot (6, 2, 9) = 7 \cdot 6 + 6 \cdot 2 + (-6) \cdot 9 = 0, \text{ па је } a \perp b, \\ \vec{a} \cdot \vec{c} &= (7, 6, -6) \cdot (-6, 9, 2) = 7 \cdot (-6) + 6 \cdot 9 + (-6) \cdot 2 = 0, \text{ па је } a \perp c, \\ \vec{b} \cdot \vec{c} &= (6, 2, 9) \cdot (-6, 9, 2) = 6 \cdot (-6) + 2 \cdot 9 + 9 \cdot 2 = 0, \text{ па је } b \perp c. \end{aligned}$$

Дакле, све стране су једнаке и међусобно ортогоналне па овај паралелепипед јесте коцка.



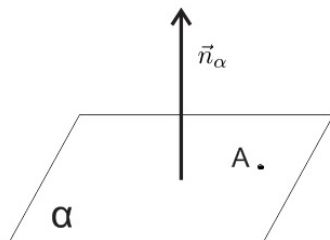
Приметимо да смо у делу под в) доказали да је овај паралелепипед заправо коцка чија је страница дужине 11. Знамо да је запремина коцке чија је страница 11 једнака $V = 11^3 = 1331$, што се слаже са делом под б). Дакле, мешовити производ заиста мери запремину паралелепипеда. ■

4.2 Тачке, праве и равни у $\mathbb{R}^3$

Општа једначина равни α у $\mathbb{R}^3$ гласи

$$\alpha : ax + by + cz + d = 0 \quad (12)$$

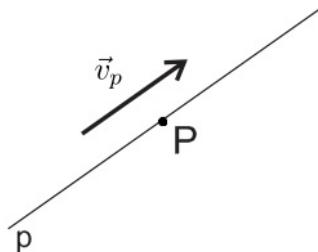
и из ње можемо прочитати вектор нормале на раван α који је $\vec{n}_\alpha = (a, b, c)$. Раван α је јединствено одређена ако знамо њен вектор нормале $\vec{n}_\alpha$ и једну тачку $A \in \alpha$.



Канонска једначина праве p у $\mathbb{R}^3$ гласи

$$p : \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad (13)$$

и из ње можемо прочитати да је вектор правца праве p једнак $\vec{v}_p = (a, b, c)$ и једну тачку P са праве p која има координате $P(x_0, y_0, z_0)$. Права p је јединствено одређена ако знамо њен вектор правца $\vec{v}_p$ и једну тачку $P \in p$.



Ако у једначини (13) изједначимо све са $t \in \mathbb{R}$ и одвојено запишемо све три једнакости, добијамо **параметарску једначину праве** p која гласи

$$\begin{aligned} x &= at + x_0, \\ p : y &= bt + y_0, \quad t \in \mathbb{R} \\ z &= ct + z_0. \end{aligned} \quad (14)$$

Одавде вектор правца $\vec{v}_p = (a, b, c)$ читамо као коефицијенте уз t , а тачку $P(x_0, y_0, z_0)$ као коефицијенте уз 1, тј. слободне чланове.

Трећи начин како можемо задати праву p , то је као **пресек две равни** $\alpha : a_1x + b_1y + c_1z + d = 0$ и $\beta : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, тј.

$$p : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \quad (15)$$

Одавде не можемо директно прочитати ни $\vec{v}_p$ ни P . Једначину (15) можемо пребацити у параметарски облик (14) тако што ћемо (15) решити по x , y и z (имамо две једначине и три непознате па ће се зато појавити параметар t).

Задатак 4.2 (Сеп-3, 2018.)

- а) Да ли су тачке $A(0, 1, 2)$, $B(2, 1, 0)$, $C(2, 1, 2)$ и $D(1, 2, 1)$ копланарне?
 б) У каквом се међусобном положају налазе праве AB и CD ?

Решење:

а) Знамо да су вектори копланарни ако им је мешовити производ једнак нули. Тачке A , B , C и D су копланарне је еквивалентно томе да су вектори $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ и $\vec{AD}$ копланарни. Вектор $\vec{AB}$ добијамо тако што од координата тачке B одузмемо координате тачке A , тј. $\vec{AB} = B - A$, па добијамо да су

$$\vec{AB} = (2, 0, -2), \quad \vec{AC} = (2, 0, 0), \quad \vec{AD} = (1, 1, -1).$$

Како је

$$[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 0 + 0 + (-4) - 0 - 0 - 0 = -4 \neq 0,$$

добијамо да $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ и $\vec{AD}$ нису копланарни, па тачке A , B , C и D нису копланарне.

б) Видели смо да је права јединствено одређена вектором правца и једном тачком. Како права AB садржи тачке A и B , за вектор правца можемо узети вектор $\vec{AB}$, а за тачку можемо узети A (или B , свеједно је). Дакле, права AB је одређена са $\vec{v}_{AB} = \vec{AB} = (2, 0, -2)$ и $A(0, 1, 2) \in AB$, па је њена једначина

$$AB: \frac{x-0}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-2}{-2}.$$

Аналогно, CD је одређена са $\vec{v}_{CD} = \vec{CD} = (-1, 1, -1)$ и $C(2, 1, 2) \in CD$, па је њена једначина

$$CD: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}.$$

Како је $\vec{v}_{AB} \neq k \cdot \vec{v}_{CD}$, праве AB и CD нису паралелне. Проверавамо да ли се секу. У параметарском облику имамо

$$\begin{aligned} x &= 2t, & x &= -s + 2, \\ AB: y &= 1, & t &\in \mathbb{R}, & CD: y &= s + 1, & s &\in \mathbb{R}, \\ z &= -2t + 2, & z &= -s + 2. \end{aligned}$$

Изједначавањем y координата за AB и CD добијамо да је $s = 0$, па када изједначимо x координате и заменимо $s = 0$ добијамо $t = 1$. Остаје још да проверимо да ли је задовољена једнакост када изједначимо z координате за ове вредности $s = 0$ и $t = 1$: добијамо $0 = 2$, што није тачно. Дакле, овај систем нема решења па немамо пресечну тачку, тј. праве AB и CD се не секу. Како нису паралелне и не секу се, онда важи да су AB и CD мимоилазне. ■

Задатак 4.3 (Сеп-2, 2018.) *Одредити једначину заједничке нормале, као и растојање између мимоилазних правих $p : \frac{x}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{1}$ и $q : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}$.*

Решење: Овај задатак се може решити на више начина. Урадићемо на начин који је мало дужи за рачунање али нам даје у исто време и растојање и једначину заједничке нормале. Најпре ћемо пребацили једначине правих p и q у параметарски облик:

$$\begin{aligned} x &= 2t, & x &= s + 1, \\ p : y &= -t + 3, & t &\in \mathbb{R}, & q : y &= s + 2, & s &\in \mathbb{R}, \\ z &= t + 1, & z &= s. \end{aligned}$$

Произвољна тачка са праве p је тачка $P(2t, -t+3, t+1)$, а произвољна тачка са праве q је тачка $Q(s+1, s+2, s)$. Ми ћемо тражити конкретне тачке $P_0(2t_0, -t_0+3, t_0+1)$ са праве p и $Q_0(s_0+1, s_0+2, s_0)$ са праве q за које је вектор $P_0\vec{Q}_0$ ортогоналан и на $\vec{v}_p$ и на $\vec{v}_q$ (дакле треба одредити конкретне вредности бројева t_0 и s_0 тако да важи ово). Када одредимо те тачке, онда ће заједничка нормала бити управо права P_0Q_0 , а растојање између p и q ће бити норма вектора $P_0\vec{Q}_0$.

Добијамо да је $P_0\vec{Q}_0 = (s_0 - 2t_0 + 1, s_0 + t_0 - 1, s_0 - t_0 - 1)$. Вредности за t_0 и s_0 ћемо добити из услова $P_0\vec{Q}_0 \perp \vec{v}_p$ и $P_0\vec{Q}_0 \perp \vec{v}_q$. Из једначина правих p и q можемо прочитати да је $\vec{v}_p = (2, -1, 1)$ и $\vec{v}_q = (1, 1, 1)$. Дакле,

$$\begin{aligned} P_0\vec{Q}_0 \perp \vec{v}_p &\Leftrightarrow (s_0 - 2t_0 + 1, s_0 + t_0 - 1, s_0 - t_0 - 1) \cdot (2, -1, 1) = 0 \Leftrightarrow s_0 - 3t_0 + 1 = 0, \\ P_0\vec{Q}_0 \perp \vec{v}_q &\Leftrightarrow (s_0 - 2t_0 + 1, s_0 + t_0 - 1, s_0 - t_0 - 1) \cdot (1, 1, 1) = 0 \Leftrightarrow 3s_0 - 2t_0 - 1 = 0, \end{aligned}$$

Из прве једначине добијамо да је $s_0 = 3t_0 - 1$ па заменом у другу имамо

$$9t_0 - 3 - 2t_0 - 1 = 0,$$

па је

$$t_0 = \frac{4}{7}, \quad s_0 = \frac{5}{7},$$

и добијамо

$$P_0\left(\frac{8}{7}, \frac{17}{7}, \frac{11}{7}\right), \quad Q_0\left(\frac{12}{7}, \frac{19}{7}, \frac{5}{7}\right), \quad P_0\vec{Q}_0 = \left(\frac{4}{7}, \frac{2}{7}, \frac{-6}{7}\right) = \frac{2}{7}(2, 1, -3).$$

За вектор правца заједничке нормале n можемо узети вектор $\vec{v}_n = (2, 1, -3)$ јер је он ортогоналан и на $\vec{v}_p$ и на $\vec{v}_q$, а за тачку са нормале можемо узети P_0 (или Q_0), па је једначина заједничке нормале

$$n : \frac{x - \frac{8}{7}}{2} = \frac{y - \frac{17}{7}}{1} = \frac{z - \frac{11}{7}}{-3}.$$

Међусобно растојање d је норма вектора $P_0\vec{Q}_0$ па добијамо

$$d = \|P_0\vec{Q}_0\| = \sqrt{\left(\frac{4}{7}\right)^2 + \left(\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{-6}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{56}{49}} = \sqrt{\frac{8}{7}}.$$

■

Задатак 4.4 (Јул, 2018.) *Одреди једначину праве q која садржи тачку $Q(0, -1, -4)$ и сече праву $p: x + y + z - 3 = 0, 2y - z - 14 = 0$ под углом $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Одредити затим раван α која садржи праве p и q .*

Решење: Као што смо рекли у уводном делу, из овог облика праве p не можемо директно прочитати ништа корисно. Зато ћемо праву p записати у параметарском облику, а њега добијамо тако што решимо по x, y и z систем који чине једначине равни у чијем је пресеку права p . Имамо две једначине, а три непознате па ће једна непозната бити параметар. Ми ћемо овде узети да је $y = t$ параметар и онда из друге једначине добијамо да је $z = 2t - 14$. Заменом y и z у прву једначину добијамо $x = -3t + 17$. Дакле, параметарска једначина праве p је

$$\begin{aligned} x &= -3t + 17, \\ p: \quad y &= t, & t \in \mathbb{R} \\ z &= 2t - 14. \end{aligned}$$

Из овога можемо прочитати да је $\vec{v}_p = (-3, 1, 2)$ и произвољна тачка са праве p је облика $P_0(-3t_0 + 17, t_0, 2t_0 - 14)$.

Тражимо једначину праве q која гради угао $\frac{\pi}{2}$ са правом p . Како $Q \in q$, за вектор правца праве q ћемо узети вектор $\vec{P_0Q}$ за тачку P_0 за коју је $\vec{v}_p \perp \vec{P_0Q}$. Како је $\vec{P_0Q} = (3t_0 - 17, -1 - t_0, 10 - 2t_0)$ из $\vec{v}_p \cdot \vec{P_0Q} = 0$ добијамо

$$\begin{aligned} 0 &= (-3, 1, 2) \cdot (3t_0 - 17, -1 - t_0, 10 - 2t_0) \\ &= -9t_0 + 51 - 1 - t_0 + 20 - 4t_0 = 70 - 14t_0, \end{aligned}$$

па је $t_0 = 5$. Дакле, пресечна тачка је $P_0(2, 5, -4)$, а вектор правца праве q је $\vec{P_0Q} = (-2, -6, 0) = -2(1, 3, 0)$. Сада користећи да је $\vec{v}_q = (1, 3, 0)$ и $Q(0, -1, -4) \in q$ добијамо да је једначина праве q

$$q: \quad \frac{x}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+4}{0}.$$

За једначину равни α ће нам требати $\vec{n}_\alpha$ и искористићемо да $P_0(2, 5, -4)$ припада α (раван α треба да садржи и p и q , па специјално садржи њихову пресечну тачку). Како α садржи праве p и q , онда је специјално $\vec{n}_\alpha \perp \vec{v}_p$ и $\vec{n}_\alpha \perp \vec{v}_q$ па можемо узети

$$\begin{aligned} \vec{n}_\alpha &= \vec{v}_p \times \vec{v}_q = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \\ &= 2j - 9k - k - 6i = (-6, 2, -10) = -2(3, -1, 5). \end{aligned}$$

Из $\vec{n}_\alpha = (3, -1, 5)$ знамо да је $\alpha: 3x - y + 5z + d = 0$, па из $P_0(2, 5, -4) \in \alpha$ добијамо $6 - 5 - 20 + d = 0$, тј. $d = 19$. Дакле, једначина равни α је

$$\alpha: 3x - y + 5z + 19 = 0.$$

■

Задатак 4.5 (Јун, 2018.) *Одреди једначину нормале из пресечне тачке правих $p : x + y - z = 0$, $y + 2z = 7$ и $q : \frac{x+6}{1} = \frac{y+7}{2} = \frac{z+3}{1}$ на раван $\alpha : 2x - 3y + z - 1 = 0$.*

Решење: Први корак је да одредимо пресечну тачку правих p и q . Када праву q пребацимо у параметарски облик, добијамо да је

$$\begin{aligned} x &= t - 6, \\ p : y &= 2t - 7, & t \in \mathbb{R} \\ z &= t - 3. \end{aligned}$$

У овом задатку нам је најлакше да пресечну тачку добијемо тако што ћемо ове координате x , y и z из параметарске једначине праве q да заменимо у једначину праве p и да добијемо конкретну вредност за t (други начин је да пребацимо и праву p у параметарски облик и да онда изједначимо x , y и z координате праве p и праве q). Заменом q у једначину праве p добијамо

$$\begin{aligned} (t - 6) + (2t - 7) - (t - 3) &= 0, \\ (2t - 7) + 2(t - 3) &= 7, \end{aligned}$$

па је $t = 5$. Дакле, пресечну тачку добијамо тако што у параметарску једначину праве q убацимо $t = 5$, па је пресечна тачка правих p и q тачка $A(-1, 3, 2)$.

Други корак је да одредимо једначину нормале n на раван α из тачке A . Из једначине равни α видимо да је $\vec{n}_\alpha = (2, -3, 1)$ и, како тражимо нормалу на α , можемо узети да је то њен вектор правца. Сада из чињеница да $A(-1, 3, 2) \in n$ и $\vec{v}_n = (2, -3, 1)$ добијамо да је

$$n : \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-2}{1}.$$

■

Задатак 4.6 (Сеп-1, 2017.) *Одредити једначину равни α која садржи праву $p : \frac{x-4}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+2}{2}$ и нормална је на раван $\beta : 3x - z + 2017 = 0$.*

Решење: За једначину равни α потребно нам је да одредимо $\vec{n}_\alpha$ и једну тачку $A \in \alpha$. Како α садржи праву p , онда је $\vec{n}_\alpha \perp \vec{v}_p = (1, -1, 2)$ и, како је $\alpha \perp \beta$, онда је $\vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_\beta = (3, 0, -1)$. Дакле добијамо

$$\vec{n}_\alpha = \vec{v}_p \times \vec{n}_\beta = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} = i + 6j + 3k + j = (1, 7, 3).$$

Из једначине праве p видимо да $A(4, -1, -2) \in p$, па како α садржи праву p , специјално важи и $A \in \alpha$.

Како је $\vec{n}_\alpha = (1, 7, 3)$ знамо да је $\alpha : x + 7y + 3z + d = 0$ и из $A \in \alpha$ добијамо $4 - 7 - 6 + d = 0$, тј. $d = 9$. Дакле, једначина равни α је

$$\alpha : x + 7y + 3z + 9 = 0.$$

■

5 Низови

Низ реалних бројева је функција $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, где ћемо са $a(n) = a_n$ означавати n -ти члан. Низ се обично означава са (a_n) , а задаје се преко n -тог члана. На пример, низ (a_n) који је дат са $a_n = \frac{1}{n}$ је заправо

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$$

Дефиниција 5.1 Број $b \in \mathbb{R}$ је **гранична вредност** или **лимес низа** (a_n) ако

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \text{ такво да } n > n_0 \Rightarrow |a_n - b| < \epsilon.$$

Ако низ (a_n) има граничну вредност b , кажемо да је (a_n) **конвергентан** и пишемо $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = b$. Уколико не постоји гранична вредност или је једнака $\pm\infty$, кажемо да је низ (a_n) **дивергентан**.

Дефиниција 5.2 Низ (a_n) је **ограничен** ако постоји број $M \in \mathbb{R}$ такав да је $|a_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Дефиниција 5.3 Низ (a_n) је:

- (1) **растући** ако важи $a_n \leq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
- (2) **строго растући** ако важи $a_n < a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
- (3) **оппадајући** ако важи $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
- (4) **строго опадајући** ако важи $a_n > a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Једним именом ове низове зовемо **монотони** низови.

Сада ћемо навести пар ставова и теорема које ћемо користити за задатке:

Став 5.1 Ако је (a_n) конвергентан, онда је (a_n) ограничен.

Став 5.2 Ако су (a_n) и (b_n) конвергентни, тј. важи $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b$, тада је:

- (1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$,
- (2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$,
- (1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, ако је $b_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ и $b \neq 0$.

Теорема 5.1 (Теорема о два полицајца)

Ако је $a_n \leq b_n \leq c_n$, $\forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}$, и $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = a$, тада је и $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = a$.

Теорема 5.2 (Штолцова теорема)

Нека је (a_n) произвољан низ, низ (b_n) строго растући (почев од неког члана) такав да је $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$ и нека постоји $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = a$. Тада постоји и $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n}$ и важи

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = a.$$

Задатак 5.1 (Јан, 2018.) *Израчунати* $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n^2 + 1}{2n - 3} - \frac{n^2 + \frac{1}{2}}{n - 2} \right)$.

Решење: Овде имамо разлику два низа, међутим оба су дивергентна (проверити) па не можемо применити Став 5.2 јер бисмо добили $\infty - \infty$ што је неодређено. Идеја је да доведемо на заједнички именилац, и то ће нас довести до решења:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n^2 + 1}{2n - 3} - \frac{n^2 + \frac{1}{2}}{n - 2} \right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n^2 + 1)(n - 2) - (n^2 + \frac{1}{2})(2n - 3)}{(2n - 3)(n - 2)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n^3 - 4n^2 + n - 2) - (2n^3 - 3n^2 + n - \frac{3}{2})}{2n^2 - 7n + 6} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n^2 - \frac{1}{2}}{2n^2 - 7n + 6} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2(-1 - \frac{1}{2n^2})}{n^2(2 - \frac{7}{n} + \frac{6}{n^2})} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

■

Задатак 5.2 (1.кол, 2017.) *Израчунати* $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5n^3 + 2}{5n^3} \right)^{n^3}$.

Решење: Овде имамо облик 1^∞ па је идеја да користимо $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$. Дакле, добијамо

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5n^3 + 2}{5n^3} \right)^{n^3} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{5n^3} \right)^{n^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{5n^3}{2}} \right)^{\frac{5n^3}{2} \cdot \frac{2}{5n^3} \cdot n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^3}{5n^3} = e^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{e^2}. \end{aligned}$$

■

Задатак 5.3 (Сеп-3, 2018.) *Израчунати*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{2n^2} + \frac{n+1}{2(n^2+1)} + \frac{n+1}{2(n^2+2)} + \dots + \frac{n+1}{2(n^2+n)} \right).$$

Решење: Имамо $n+1$ сабирака који теже нули и који су поређани по величини. Ово можемо природно ограничити са два низа – ова сума ће бити већа од суме коју добијемо тако што уместо сваког члана заменимо најмањи члан из суме, а биће мања од суме коју добијемо када уместо сваког члана заменимо највећи. Дакле, $\forall n \in \mathbb{N}$ важи

$$(n+1) \cdot \frac{n+1}{2(n^2+n)} \leq \frac{n+1}{2n^2} + \frac{n+1}{2(n^2+1)} + \frac{n+1}{2(n^2+2)} + \dots + \frac{n+1}{2(n^2+n)} \leq (n+1) \cdot \frac{n+1}{2n^2}.$$

Како је

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) \cdot \frac{n+1}{2(n^2+n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) \cdot \frac{n+1}{2n^2} = \frac{1}{2},$$

на основу теореме о два полицајца добијамо

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{2n^2} + \frac{n+1}{2(n^2+1)} + \frac{n+1}{2(n^2+2)} + \dots + \frac{n+1}{2(n^2+n)} \right) = \frac{1}{2}.$$

■

Задатак 5.4 (Феб, 2018.) Израчунати $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 4 + 9 + \dots + n^2}{n^3}$.

Решење: Овде имамо низ облика $\frac{a_n}{b_n}$ па је идеја да применимо Штолцову теорему. Нека је $a_n = 1 + 4 + \dots + n^2$, низ $b_n = n^3$ јесте строго растући и важи $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$. Како је

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 4 + 9 + \dots + n^2 - (1 + 4 + 9 + \dots + (n-1)^2)}{n^3 - (n-1)^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^3 - (n^3 - 3n^2 + 3n - 1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{3n^2 - 3n + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n^2(3 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2})} = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

испуњени су сви услови из Штолцове теореме па на основу ње важи

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 4 + 9 + \dots + n^2}{n^3} = \frac{1}{3}.$$

■

Задатак 5.5 (Феб, 2017.) Израчунати $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2 + 1} + \frac{2}{n^2 + 1} + \dots + \frac{n-1}{n^2 + 1} \right)$.

Решење: Како сви чланови у суми имају исти именилац, заправо добијамо

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2 + 1} + \frac{2}{n^2 + 1} + \dots + \frac{n-1}{n^2 + 1} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2 + \dots + (n-1)}{n^2 + 1},$$

па тражимо лимес низа облика $\frac{a_n}{b_n}$, што нас вуче на Штолцову теорему. Означимо $a_n = 1 + 2 + \dots + (n-1)$, низ $b_n = n^2 + 1$ јесте строго растући и важи $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$. Како је

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2 + \dots + (n-1) - (1 + 2 + \dots + (n-2))}{n^2 + 1 - ((n-1)^2 + 1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{n^2 + 1 - (n^2 - 2n + 1) - 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{2n-1} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

на основу Штолцове теореме добијамо да је

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2 + 1} + \frac{2}{n^2 + 1} + \dots + \frac{n-1}{n^2 + 1} \right) = \frac{1}{2}.$$

■

Напомена 5.1 На основу претходна три задатка можемо уочити да ако тражимо лимес неког низа који је сума разломака, онда ћемо примењивати или Теорему о два полицајца или Штолцову теорему. Уколико сви разломци из суме имају исти именилац, онда иде Штолцова теорема, а уколико је исти бројилац свуда, онда иде Теорема о два полицајца (обратити пажњу на овај детаљ у претходна три задатка!).

6 Лимеси функција и непрекидност

6.1 Лимеси функција

Дефиниција 6.1 Нека је $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ функција. Број $b \in \mathbb{R}$ је **гранична вредност** или **лимес** функције f у тачки $a \in D$ ако је f дефинисана у некој околини тачке a , осим евентуално у a и важи

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon.$$

Другим речима, ако је x довољно близу тачке a , онда је $f(x)$ довољно близу тачке b .

Дефиниција 6.2 Дефинишемо **леви** и **десни лимес** функције f у тачки a са

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = b \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) x \in (a - \delta, a) \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon,$$

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = b \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) x \in (a, a + \delta) \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon.$$

Став 6.1 Нека је $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$. Тада је:

- (1) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = b \pm c;$
- (2) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c;$
- (3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}, c \neq 0$ и $g(x) \neq 0$ на околини a .

Теорема 6.1 (Теорема о два полицајца)

Нека је $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Ако постоји $\delta > 0$ такво да за неку функцију h важи

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x), \quad \forall x \in (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta),$$

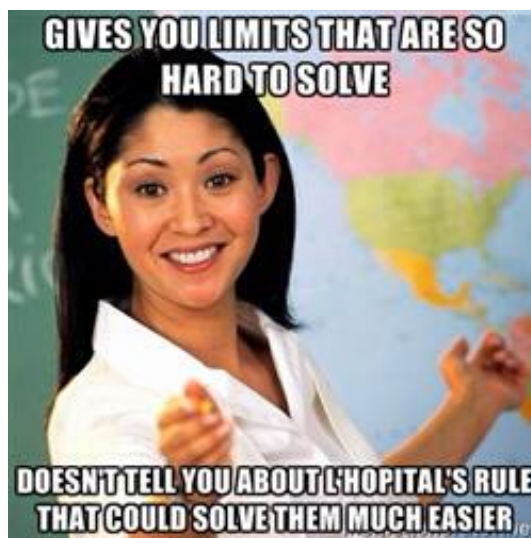
онда је $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$.

Сада ћемо навести неке лимесе које ћемо користити у задацима:

Став 6.2 Важни лимеси:

- | | |
|--|--|
| 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$ | 2) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e,$ |
| 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} = \alpha,$ | 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$ |
| 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1 + x)}{x} = \log_a,$ | 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1.$ |

Како још увек не знамо за Лопиталова правила (њих ћемо радити у наредном поглављу), граничне вредности функција ћемо углавном рачунати тако што ћемо намештати на лимесе из претходног става.



Задатак 6.1 (1.кол, 2017.) Израчунавати $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3-2x+x^2} - \sqrt{x^2-x+1}}{2x-x^2}$.

Решење: Ако одмах заменимо вредност $x = 2$ у функцију, добијамо облик $\frac{0}{0}$ што је неодређено. Дакле, мораћемо да средимо мало и да покушамо да скратимо нешто како бисмо дошли до одређеног облика. То можемо на следећи начин:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3-2x+x^2} - \sqrt{x^2-x+1}}{2x-x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3-2x+x^2} - \sqrt{x^2-x+1}}{2x-x^2} \cdot \frac{\sqrt{3-2x+x^2} + \sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt{3-2x+x^2} + \sqrt{x^2-x+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3-2x+x^2 - (x^2-x+1)}{x(2-x)(\sqrt{3-2x+x^2} + \sqrt{x^2-x+1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{x(2-x)(\sqrt{3-2x+x^2} + \sqrt{x^2-x+1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x(\sqrt{3-2x+x^2} + \sqrt{x^2-x+1})} = \frac{1}{2(\sqrt{3-2 \cdot 2 + 2^2} + \sqrt{2^2-2+1})} = \frac{1}{4\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

■

Задатак 6.2 (Јан, 2018.) Одредити граничну вредност $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin 3x)}{(1+x)^2-1}$.

Решење:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin 3x)}{(1+x)^2-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\ln(1+\sin 3x)}{\sin 3x}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{\sin 3x}{3x}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{x}{(1+x)^2-1}}_{\rightarrow \frac{1}{2}} \cdot 3 = \frac{3}{2}.$$

Прва два лимеса су директна примена лимеса из Става 6.2, док за трећи можда треба мало објашњење. Видели смо да је $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^2-1}{x} = 2$, па је онда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(1+x)^2-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{(1+x)^2-1}{x}} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^2-1}{x}} = \frac{1}{2}.$$

Овај поступак ћемо често користити и у наредним задацима. ■

Задатак 6.3 (Сеп-1, 2017.) *Одредити граничну вредност* $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\operatorname{tg} x}{\ln(1 + \pi x)}$.

Решење:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\operatorname{tg} x}{\ln(1 + \pi x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{\cos x \cdot \ln(1 + \pi x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{2}{\cos x}}_{\rightarrow 2} \cdot \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{\pi x}{\ln(1 + \pi x)}}_{\rightarrow 1} \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

Задатак 6.4 (Јул, 2016.) *Одредити граничну вредност* $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \frac{1}{2} \sin x)}{2x}$.

Решење:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \frac{1}{2} \sin x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\ln(1 + \frac{1}{2} \sin x)}{\frac{1}{2} \sin x}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\rightarrow 1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Задатак 6.5 (Феб, 2015.) *Одредити граничне вредности:*

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{3 - x + x^2} - \sqrt{2 + 5x + x^2})$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{\sin \frac{2x}{5}}.$

Решење:

а) Прва битна чињеница на коју треба обратити пажњу је то да $x \rightarrow -\infty$, па пошто је x негативно, онда је $\sqrt{x^2} = -x > 0$!!! Решење изгледа поприлично компликовано због многобројних заграда, а заправо се добија из поприлично једноставне идеје: из оба корена извучемо највећи члан $\sqrt{x^2}$ и остало намештамо на познати лимес $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ (кад извучемо $\sqrt{x^2}$ добићемо $(1 + \text{нешто})^{\frac{1}{2}}$, где нешто $\rightarrow 0$, па се уклапа у претходни лимес без обзира што је у задатку $x \rightarrow -\infty$).

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{3 - x + x^2} - \sqrt{2 + 5x + x^2}) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \left(\left(1 + \left(\frac{3}{x^2} - \frac{1}{x}\right)\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 + \left(\frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\left(\left(1 + \left(\frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}\right)\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) + \left(1 - \left(1 + \left(\frac{3}{x^2} - \frac{1}{x}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\underbrace{\left(\frac{(1 + (\frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}))^{\frac{1}{2}} - 1}{\frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}} \right)}_{\rightarrow \frac{1}{2}} \left(\frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}\right) + \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\underbrace{\left(\frac{1 - (1 + (\frac{3}{x^2} - \frac{1}{x}))^{\frac{1}{2}}}{\frac{3}{x^2} - \frac{1}{x}} \right)}_{\rightarrow -\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{x^2} - \frac{1}{x}\right) \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}\right) - \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\frac{3}{x^2} - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{\left(5 + \frac{2}{x}\right)}_{\rightarrow 0} - \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{\left(\frac{3}{x} - 1\right)}_{\rightarrow 0} \\ &= \frac{5}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 3. \end{aligned}$$

б)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{\sin \frac{2x}{5}} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1 - e^x}{x}}_{\rightarrow -1} \cdot \underbrace{\frac{\frac{2x}{5}}{\sin \frac{2x}{5}}}_{\rightarrow 1} \cdot \frac{5}{2} = -\frac{5}{2}.$$

Задатак 6.6 (Сеп-3, 2013.) *Одредити граничну вредност* $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}.$

Решење:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{\cos x \cdot \sin^3 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{1 - \cos x}{x^2}}_{\rightarrow \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\frac{x^3}{\sin^3 x}}_{\rightarrow 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Задатак 6.7 (1.кол, 2008.) *Одредити граничну вредност* $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - 1}{e^{x^2} - 1}.$

Решење:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - 1}{e^{x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{(1 + x \sin x)^{\frac{1}{2}} - 1}{x \sin x}}_{\rightarrow \frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{e^{x^2} - 1}}_{\rightarrow 1} = \frac{1}{2}.$$

Задатак 6.8 *Одредити граничну вредност* $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \operatorname{tg} \frac{x\pi}{2}.$

Решење: Овде имамо да $x \rightarrow 1$, што се не уклапа у случаје из Става 6.2. У оваквим ситуацијама постоје две могућности - или да се мало сређује функција како би се скратио тај проблематичан део, или да се уведе нека смена која би свела лимес на нешто из Става 6.2. С обзиром да овде не можемо никако да скратимо тај проблематичан део сређивањем функције, увешћемо смену $x = t + 1$ која ће пребацивати $x \rightarrow 1$ на $t \rightarrow 0$ и онда ћемо намештати на неки познати лимес. Добијамо

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \operatorname{tg} \frac{x\pi}{2} = \lim_{t \rightarrow 0} (-t) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi t}{2} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} (-t) (-\operatorname{ctg} \frac{\pi t}{2}) = \lim_{t \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\frac{\pi t}{2}}{\sin \frac{\pi t}{2}}}_{\rightarrow 1} \cdot \frac{2}{\pi} \underbrace{\cos \frac{\pi t}{2}}_{\rightarrow 1} = \frac{2}{\pi}.$$

6.2 Непрекидност функција

Дефиниција 6.3 Функција $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ је **непрекидна** у тачки $a \in D$ ако важи да је $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Ако f није непрекидна у a , кажемо да f има **прекид** у тачки a .

Дефиниција 6.4 Функција f у тачки a има:

- (1) **отклоњив прекид** ако постоје $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$, али нису једнаки са $f(a)$ или f није дефинисана у тачки a ;
- (2) **прекид прве врсте** ако постоје леви и десни лимеси функције f у тачки a али нису једнаки, тј. $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$
- (3) **прекид друге врсте** ако или не постоји бар један од $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$, или је једнак $\pm\infty$.

Задатак 6.9 (Феб, 2018.) *Одредити константе a и b тако да је функција $f(x)$ непрекидна*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{x}, & x < 0; \\ a \cos(\pi x) + b, & 0 \leq x \leq 1; \\ \frac{6x^4 - 6}{x^2 + 2x - 3}, & x > 1. \end{cases}$$

Решење: Функција f је непрекидна на $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ као композиција непрекидних функција, па остаје још да испитамо непрекидност у $x = 0$ и $x = 1$.

(1) непрекидност у $x = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{2 \cos x \sin x}{x} = 2, \\ \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} a \cos(\pi x) + b = a + b, \\ f(0) &= a + b. \end{aligned}$$

Да би функција f била непрекидна у $x = 0$ мора да важи $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = f(0)$, па добијамо да је $a + b = 2$.

(2) непрекидност у $x = 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} a \cos(\pi x) + b = -a + b, \\ \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{6x^4 - 6}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{6(x^2 + 1)(x + 1)}{x + 3} = 6, \\ f(1) &= -a + b. \end{aligned}$$

Да би функција f била непрекидна у $x = 1$ мора да важи $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = f(1)$, па добијамо да је $-a + b = 6$.

Дакле, f ће бити непрекидна на целом $\mathbb{R}$ ако је $a + b = 2$ и $-a + b = 6$, па решавањем овог система добијамо да је $a = -2$ и $b = 4$. ■

Задатак 6.10 (Сеп-3, 2017.) *Одредити константе a и b тако да је функција $h(x)$ непрекидна*

$$h(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{x}, & x < 0; \\ a \cos x + b, & 0 \leq x \leq \pi; \\ \frac{1}{\pi^3} \frac{x^4 - \pi^4}{x - \pi}, & x > \pi. \end{cases}$$

Решење: Функција f је непрекидна на $\mathbb{R} \setminus \{0, \pi\}$ као композиција непрекидних.

(1) непрекидност у $x = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \underbrace{\frac{e^{2x} - 1}{2x}}_{\rightarrow 1} \cdot 2 + \underbrace{\frac{e^{-2x} - 1}{-2x}}_{\rightarrow 1} \cdot 2 = 4, \\ \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} a \cos x + b = a + b, \\ f(0) &= a + b. \end{aligned}$$

Да би функција f била непрекидна у $x = 0$ мора да важи $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = f(0)$, па добијамо да је $a + b = 4$.

(2) непрекидност у $x = \pi$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pi-} a \cos x + b = -a + b, \\ \lim_{x \rightarrow \pi+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pi+} \frac{1}{\pi^3} \frac{x^4 - \pi^4}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi+} \frac{1}{\pi^3} (x^2 + \pi^2)(x + \pi) = 4, \\ f(\pi) &= -a + b. \end{aligned}$$

Да би функција f била непрекидна у $x = \pi$ мора да важи $\lim_{x \rightarrow \pi-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi+} f(x) = f(\pi)$, па добијамо да је $-a + b = 4$.

Дакле, f ће бити непрекидна на целом $\mathbb{R}$ ако је $a + b = 4$ и $-a + b = 4$, па решавањем овог система добијамо да је $a = 0$ и $b = 4$. ■

Задатак 6.11 (Сеп-1, 2018.) *Испитати непрекидност и одредити тип прекида функције*

$$f(x) = \frac{1}{e^{\frac{2x}{3x+9}} - 1}.$$

Решење: Функција f је непрекидна на $\mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$ као композиција непрекидних. Како f није дефинисана у $x = -3$ и $x = 0$, у тим тачкама ће имати прекиде.

(1) прекид у $x = -3$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -3-} \frac{1}{e^{\frac{2x}{3x+9}} - 1} = 0, \\ \lim_{x \rightarrow -3+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -3+} \frac{1}{e^{\frac{2x}{3x+9}} - 1} = -1. \end{aligned}$$

Како постоје $\lim_{x \rightarrow -3-} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow -3+} f(x)$ али је $\lim_{x \rightarrow -3-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -3+} f(x)$, закључујемо да f у $x = -3$ има прекид прве врсте.

(2) прекид у $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0_-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0_-} \frac{1}{e^{\frac{2x}{3x+9}} - 1} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{1}{e^{\frac{2x}{3x+9}} - 1} = +\infty.$$

Како је $\lim_{x \rightarrow 0_-} f(x) = -\infty$ (или $\lim_{x \rightarrow 0_+} f(x) = +\infty$, свеједно), закључујемо да f у $x = 0$ има прекид друге врсте.

Дакле, f је непрекидна на $\mathbb{R} \setminus \{-3, 0\}$, у $x = -3$ има прекид прве врсте и у $x = 0$ има прекид друге врсте. ■

After explaining to a student through various lessons and examples that:

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{x-8} = \infty$$

I tried to check if she really understood that, so I gave her a different example.

This was the result:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x-5} = \infty$$

7 Извод функције

Дефиниција 7.1 Ако је $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ функција и $x_0 \in (a, b)$, тада ако постоји број

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

називамо га **изводом** функције f у тачки x_0 . Такође, кажемо да је f **диференцијабилна** у тачки x_0 .

Теорема 7.1 Нека су функције $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ диференцијабилне на D , тада за свако $x \in D$ важи:

- (1) $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$;
- (2) $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$;
- (3) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, ако је $g(x) \neq 0$.

Теорема 7.2 (Извод композиције функција)

Нека је функција f дефинисана у тачки x и g дефинисана у тачки $f(x)$, тада је функција $g \circ f$ дефинисана у тачки x и важи

$$[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Теорема 7.3 (Извод инверзне функције)

Нека су f и f^{-1} узајамно инверзне и непрекидне функције у тачкама x_0 и $f(x_0)$. Ако је функција f диференцијабилна у x_0 и $f'(x_0) \neq 0$, тада је и функција f^{-1} диференцијабилна у тачки $f(x_0)$ и важи

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Пример 7.1 (Извод имплицитно задате функције)

Ако је функција имплицитно задата својом једначином $F(x, y) = 0$, њен извод тражимо тако што једну променљиву посматрамо као функцију оне друге променљиве (обично у посматрамо као функцију по x , тј. $y = y(x)$) и применимо правила за диференцирање из претходних теорема.

Нпр. одредити извод имплицитно задате функције $y = y(x)$ где је $x^2 + y^2 = 1$. Диференцирањем по x и применом претходних теорема добијамо $2x + 2yy' = 0$, па је $y' = -\frac{x}{y}$.

Теорема 7.4 (Извод параметарске функције)

Нека су $x = \phi(t)$ и $y = \psi(t)$ параметарски задате функције. Тада је

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}.$$

Пример 7.2 (Логаритамски извод)

Ако имамо функцију облика $h(x) = f(x)^{g(x)}$, њен извод тражимо на следећи начин: логаритмовањем обе стране добијамо $\ln(h(x)) = g(x) \ln(f(x))$, затим диференцирањем по x добијамо

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = g'(x) \ln(f(x)) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)},$$

па је

$$(f(x)^{g(x)})' = f(x)^{g(x)} \left(g'(x) \ln(f(x)) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right).$$

Пример 7.3 (Изводи елементарних функција)

	Функција $f(x)$	Извод $f'(x)$		Функција $f(x)$	Извод $f'(x)$
1.	c – константа	0	9.	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
2.	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	10.	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
3.	a^x	$a^x \ln a$	11.	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
4.	e^x	e^x	12.	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
5.	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	13.	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
6.	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	14.	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
7.	$\sin x$	$\cos x$			
8.	$\cos x$	$-\sin x$			

Теорема 7.5 (Лопиталово правило)

Нека су дате функције $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ које су диференцијабилне на (a, b) и $g'(x) \neq 0$ на (a, b) , где је $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Нека је $x_0 \in (a, b)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ (или

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$). Ако постоји (коначан или бесконачан) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \alpha$,

тада постоји и $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ и важи $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$.

Girl: I like adventurous men.

Me: [Trying to impress her]
I don't check for the $0/0$ or ∞/∞
before applying L'Hospital



Лопиталово правило се директно примењује за рачунање лимеса облика $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$, а може се примењивати и на остале неодређене облике 1^∞ , $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty \dots$

Теорема 7.6 (Тејлорова формула)

Нека је f $(n+1)$ -пута диференцијабилна функција у околини тачке x_0 . Тада је

$$f(x) = T_n(x; x_0) + R_n(x; x_0),$$

где је

$$T_x(x; x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Тејлоров полином функције f у околини тачке x_0 а $R_n(x; x_0)$ **n -ти остатак**. Специјално, за $x_0 = 0$ добијамо **Маклоренову формулу**

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x).$$

Maclaurin: "Can I copy your homework?"

Taylor: "Sure, just change it up a bit so it doesn't look obvious that you copied."

Maclaurin: "Ok."

 /IloveMathematics91

Taylor Series

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

Maclaurin Series

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Задатак 7.1 (2.кол, 2011.) Наћи извод функције:

а) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1+e^x}{1-e^x}$; б) $g(x) = \sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x$.

Решење:

$$\begin{aligned} \text{а) } f'(x) &= \left(\operatorname{arctg} \frac{1+e^x}{1-e^x} \right)' = \frac{1}{1 + \left(\frac{1+e^x}{1-e^x} \right)^2} \cdot \left(\frac{1+e^x}{1-e^x} \right)' \\ &= \frac{1}{\frac{(1-e^x)^2 + (1+e^x)^2}{(1-e^x)^2}} \cdot \frac{(1+e^x)'(1-e^x) - (1+e^x)(1-e^x)'}{(1-e^x)^2} \\ &= \frac{(1-e^x)^2}{1-2e^x+e^{2x}+1+2e^x+e^{2x}} \cdot \frac{e^x(1-e^x) - (1+e^x)(-e^x)}{(1-e^x)^2} \\ &= \frac{(1-e^x)^2}{2+2e^{2x}} \cdot \frac{2e^x}{(1-e^x)^2} = \frac{e^x}{1+e^{2x}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } g'(x) &= (\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x)' = (\sqrt{1-x^2})' \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \cdot (\arcsin x)' \\ &= \frac{(1-x^2)'}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot \arcsin x + 1 = 1 - \frac{x \cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

■

Задатак 7.2 (2.кол, 2018.)

а) Израчунати извод функције $f(x) = x^{\sin x}$.

б) Израчунати извод имплицитно задате функције $y = y(x)$ ако је $5y^2 + \cos x \sin^2 y = (3x+5)^2$.

Решење:

- а) Логаритмовањем обе стране у $f(x) = x^{\sin x}$ добијамо $\ln f(x) = \sin x \ln x$. Сада диференцирањем по x добијамо $\frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$, па је

$$f'(x) = x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right).$$

- а) Диференцирањем по x обе стране у $5y^2 + \cos x \sin^2 y = (3x + 5)^2$ и коришћењем претходних теорема добијамо $10yy' - \sin x \sin^2 y + 2 \cos x \sin y \cos y \cdot y' = 6(3x + 5)$, па је

$$y' = \frac{6(3x + 5) + \sin x \sin^2 y}{10y + 2 \cos x \sin y \cos y}.$$

■

Задатак 7.3 (Феб, 2014.) *Одредити извод (по x) параметарски дате функције $x(t) = 3t - \sqrt{2} \sin 2t$, $y(t) = \frac{3}{2} - \sqrt{2} \cos 2t$.*

Решење: Означимо $x(t) = 3t - \sqrt{2} \sin 2t = \phi(t)$ и $y(t) = \frac{3}{2} - \sqrt{2} \cos 2t = \psi(t)$. Сада је

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)} = \frac{2\sqrt{2} \sin 2t}{3 - 2\sqrt{2} \cos 2t}.$$

■

Задатак 7.4 (Јан, 2018.) *Израчунати $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x e^{\frac{10}{x+1}} - x \right)$.*

Решење: Овај лимес ћемо записати мало другачије како бисмо могли да применимо Лопиталово правило:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\left(x e^{\frac{10}{x+1}} - x \right)}_{\infty - \infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{x \left(e^{\frac{10}{x+1}} - 1 \right)}_{\infty \cdot 0} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{e^{\frac{10}{x+1}} - 1}{\frac{1}{x}}}_{\frac{0}{0}}.$$

Сада су испуњени услови из теореме, па како постоји

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(e^{\frac{10}{x+1}} - 1 \right)'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{10}{x+1}} \cdot \frac{-10}{(x+1)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 10 \underbrace{e^{\frac{10}{x+1}}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{(x+1)^2}}_{\rightarrow 1} = 10,$$

применом Лопиталовог правила добијамо да је и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x e^{\frac{10}{x+1}} - x \right) = 10$.

■

Задатак 7.5 (Сеп-1, 2009.) *Развити функцију $f(x) = \ln((1-x)(1+2x))$ у Тејлоров полином 4. степена у околини тачке $x_0 = 0$.*

Решење: Тејлоров полином степена 4 у околини $x_0 = 0$ функције f је полином

$$T_4(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4.$$

Дакле, треба израчунати изводе до 4. реда функције f и за полином нам требају вредности тих извода у $x_0 = 0$. Након мало дужег и не тако занимљивог рачуна добијамо:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln((1-x)(1+2x)) \Rightarrow f(0) = 0; \\ f'(x) &= \frac{-(1+2x) + 2(1-x)}{(1-x)(1+2x)} = \frac{1-4x}{-2x^2+x+1} \Rightarrow f'(0) = 1; \\ f''(x) &= \frac{-4(-2x^2+x+1) - (1-4x)^2}{(-2x^2+x+1)^2} = \frac{-8x^2+4x-5}{(-2x^2+x+1)^2} \Rightarrow f''(0) = -5; \\ f^{(3)}(x) &= \frac{2(1-4x)(4x^2-2x+7)}{(-2x^2+x+1)^3} \Rightarrow f^{(3)}(0) = 14; \\ f^{(4)}(x) &= \frac{6(32x^4-32x^3+120x^2-56x+17)}{(-2x^2+x+1)^4} \Rightarrow f^{(4)}(0) = 102. \end{aligned}$$

Заменом ових вредности у формулу изнад добијамо да Тејлоров полином степена 4 функције f у околини $x_0 = 0$ гласи

$$T_4(x) = x - \frac{5}{2!}x^2 + \frac{14}{3!}x^3 + \frac{102}{4!}x^4.$$

■

Me: wow I finally understand math
moves on to next question



8 Испитивање тока и скицирање графика функције

Код испитивања функција увек ћемо имати следеће кораке:

(1) Домен функције:

$D_f = \{x \mid f \text{ је дефинисана у } x\}$. Код одређивања домена углавном треба обратити пажњу на пар ствари- не смео делити нулом, парни корени су дефинисани само за ненегативне бројеве, функција $\ln(x)$ је дефинисана само за строго позитивне бројеве,... У суштини, треба знати када су дефинисане основне елементарне функције.

(2) Нуле, знак, парност, периодичност:

Нуле функције су све тачке x такве да је $f(x) = 0$.

За знак функције посматрамо интервале у домену на којима је $f(x) > 0$ и/или $f(x) < 0$.

За испитивање парности проверавамо да ли је $f(-x) = f(x)$ (f је парна) или $f(-x) = -f(x)$ (f је непарна) или ако не важи ниједно од ова два кажемо да f није ни парна ни непарна. Уколико домен функције f није симетричан у односу на 0, одмах можемо закључити да f није ни парна ни непарна.

Функција f је периодична ако за неко $T \in \mathbb{R}$ важи $f(x+T) = f(x)$. За период функције се узима најмање такво T .

(3) Асимптоте:

вертикалне асимптоте: Права $x = x_0$ је вертикална асимптота функције f уколико важи $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = \infty$ или $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \infty$. Вертикалне асимптоте тражимо само у коначним тачкама које су границе домена.

хоризонталне асимптоте: Права $y = y_0$ је хоризонтална асимптота функције f уколико важи $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$ или $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$

косе асимптоте: Права $y = kx + n$ је коса асимптота функције f ако $k, n \in \mathbb{R}$ и $k \neq 0$, где је

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx)$$

или

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx).$$

Од домена функције зависи које лимесе ћемо посматрати за асимптоте. На пример, ако је $D_f = (1, +\infty)$, за вертикалну асимптоту бисмо посматрали само $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)$ зато што је то једина коначна тачка са границе домена и функција није дефинисана за бројеве мање од 1 па не смео посматрати леви лимес. Такође, за косу и хоризонталну асимптоту бисмо посматрали само лимесе за $+\infty$ јер f није дефинисана за $-$. Уколико f има косу, не може имати хоризонталну асимптоту у истој бесконачности, и обрнуто, уколико има хоризонталну не може имати косу.

(4) Монотоност и екстремне тачке:

У овом кораку испитујемо где функција расте или опада и у којим тачкама ће имати екстремне вредности тј. локални минимум или максимум. Ово ћемо одређивати на основу првог извода функције f . Ако за свако $x \in (a, b) \subset D_f$

важи да $f'(x)$ постоји и

$$\begin{aligned} f'(x) > 0, \text{ онда } f \text{ расте } (f \nearrow) \text{ на } (a, b), \\ f'(x) < 0, \text{ онда } f \text{ опада } (f \searrow) \text{ на } (a, b). \end{aligned}$$

Ако је f дефинисана у некој околини тачке x_0 у којој достиже екстремну вредност, онда је $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не постоји. Тачке у којима је $f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не постоји називамо **критичним тачкама** и оне представљају могуће тачке у којима f достиже екстремну вредност.

Нека је f непрекидна у x_0 и диференцијабилна у некој околини U тачке x_0 осим евентуално у x_0 .

Ако је $f'(x) > 0$ за $x \in U \cap (-\infty, x_0)$ (тј. f расте до x_0) и $f'(x) < 0$ за $x \in U \cap (x_0, +\infty)$ (тј. f опада након x_0), онда f има **локални максимум** у x_0 .

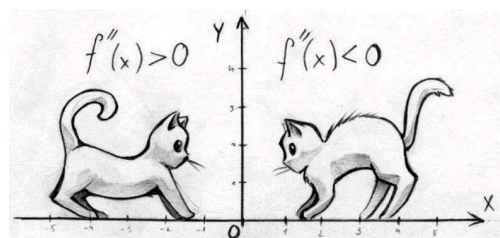
Ако је $f'(x) < 0$ за $x \in U \cap (-\infty, x_0)$ (тј. f опада до x_0) и $f'(x) > 0$ за $x \in U \cap (x_0, +\infty)$ (тј. f расте након x_0), онда f има **локални минимум** у x_0 .

Другим речима, да би се у критичној тачки заиста постигла екстремна вредност потребно је да f' мења знак у околини те тачке.

(5) Конвексност и превојне тачке:

У овом кораку испитујемо где је f конвексна/конкавна и где су превојне тачке. Ово ћемо одређивати на основу другог извода функције f . Ако за свако $x \in (a, b) \subset D_f$ важи да $f''(x)$ постоји и

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 &\Rightarrow f \text{ конвексна } (\cup) \text{ на } (a, b), \\ f''(x) < 0 &\Rightarrow f \text{ конкавна } (\cap) \text{ на } (a, b). \end{aligned}$$



Потенцијалне превојне тачке су тачке x_0 у којима је $f''(x_0) = 0$. Да би x_0 била превојна тачка, потребно је да f'' мења знак у околини x_0 , тј. да функција прелази из конвексне у конкавну или из конкавне у конвексну након те тачке.

На основу ових корака можемо скицирати график функције. Сада ћемо видети како све ово изгледа за пар конкретних примера:

Задатак 8.1 (Сеп-3, 2018.)

Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \ln(\ln^2 x - \ln x + 1)$.

Решење:

(1) Домен функције:

Како је $\ln$ дефинисан само за строго позитивне бројеве, мора бити испуњено $\ln^2 x - \ln x + 1 > 0$ и $x > 0$. За овај први услов заправо имамо квадратну једначину, па ако обележимо $t = \ln x$, добијамо $t^2 - t + 1 > 0$. Решавањем ове једначине добијамо да она нема реалне нуле, па како је коефицијент уз t^2 позитиван добијамо да је услов $\ln^2 x - \ln x + 1 > 0$ увек испуњен (график ове квадратне једначине је парабола $\cup$ која је увек позитивна јер нема реалне нуле). Дакле, $D_f = (0, +\infty)$.

(2) Нуле, знак, парност, периодичност:

$$f(x) = \ln(\ln^2 x - \ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow \ln^2 x - \ln x + 1 = 1 \Leftrightarrow \ln x(\ln x - 1) = 0,$$

па добијамо да је $f(x) = 0$ за $\ln x = 0$ или $\ln x = 1$, па су нуле функције f тачке $x = 1$ и $x = e$. Такође, можемо видети да је $f(x) > 0$ за $x \in (0, 1) \cup (e, +\infty)$ и $f(x) < 0$ за $x \in (1, e)$. Домен није симетричан у односу на 0 па f није ни парна ни непарна. Такође, f није периодична.

(3) Асимптоте:

вертикалне: На рубу домена је једино 0 коначна тачка, па проверавамо да ли је $x = 0$ вертикална асимптота. Како је

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \ln(\underbrace{\ln^2 x}_{\rightarrow +\infty} - \underbrace{\ln x}_{\rightarrow -\infty} + 1) = , \ln +\infty" = +\infty,$$

добијамо да $x = 0$ јесте вертикална асимптота.

хоризонталне:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\ln^2 x - \ln x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\underbrace{\ln^2 x}_{\rightarrow +\infty} \left(1 - \underbrace{\frac{1}{\ln x}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{1}{\ln^2 x}}_{\rightarrow 0} \right) \right) = +\infty,$$

па f нема хоризонталне асимптоте.

косе: Како је

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{\ln(\ln^2 x - \ln x + 1)}{x}}_{\frac{\infty}{\infty}} \stackrel{\text{Л}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2 \ln x - 1}{x(\ln^2 x - \ln x + 1)}}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x (2 - \frac{1}{\ln x})}{x \ln x (\ln x - 1 + \frac{1}{\ln x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{\ln x}}{x (\ln x - 1 + \frac{1}{\ln x})} = , \frac{2}{\infty}" = 0, \end{aligned}$$

добијамо да f нема ни косу асимптоту.

(4) Монотоност и екстремне тачке:

Како је

$$f'(x) = \frac{\frac{2 \ln x}{x} - \frac{1}{x}}{\ln^2 x - \ln x + 1} = \frac{2 \ln x - 1}{x(\ln^2 x - \ln x + 1)},$$

добијамо $f'(x) = 0$ ако је $2 \ln x - 1 = 0$, тј. $x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$. Посматрајући знак првог извода (делове који су увек позитивни не морамо убацивати у табелу јер не утичу на знак, али писаћу и њих да буде јасније)

	$(0, \sqrt{e})$	$(\sqrt{e}, +\infty)$
$2 \ln x - 1$	—	+
x	+	+
$\ln^2 x - \ln x + 1$	+	+
$f'(x)$	—	+
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

добиамо да f опада на $(0, \sqrt{e})$, расте на $(\sqrt{e}, +\infty)$ и има локални минимум у тачки $\sqrt{e}$.

(5) **Конвексност и превојне тачке:**

Како је

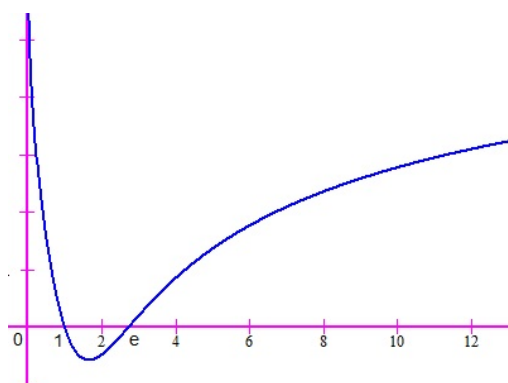
$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\frac{2}{x}x(\ln^2 x - \ln x + 1) - (2\ln x - 1)(\ln^2 x - \ln x + 1 + x(\frac{2\ln x}{x} - \frac{1}{x}))}{x^2(\ln^2 x - \ln x + 1)^2} \\ &= \frac{2(\ln^2 x - \ln x + 1) - (2\ln x - 1)(\ln^2 x + \ln x)}{x^2(\ln^2 x - \ln x + 1)^2} \\ &= \frac{2\ln^2 x - 2\ln x + 2 - 2\ln^3 x - 2\ln^2 x + \ln^2 x + \ln x}{x^2(\ln^2 x - \ln x + 1)^2} \\ &= \frac{-2\ln^3 x + \ln^2 x - \ln x + 2}{x^2(\ln^2 x - \ln x + 1)^2} = \frac{(1 - \ln x)(2\ln^2 x + \ln x + 2)}{x^2(\ln^2 x - \ln x + 1)^2}, \end{aligned}$$

добиамо да је $f''(x) = 0$ акко је $(1 - \ln x)(2\ln^2 x + \ln x + 2) = 0$, тј. $\ln x = 1$ или $2\ln^2 x + \ln x + 2 = 0$. Како квадратна једначина $2t^2 + t + 2 = 0$ нема реална решења, добијамо да је $2\ln^2 x + \ln x + 2 > 0$ за све $x \in D_f$, па је нула другог извода једино тачка $x = e$. Посматрајући знак другог извода

	$(0, e)$	$(e, +\infty)$
$1 - \ln x$	+	-
$2\ln^2 x + \ln x + 2$	+	+
$(x(\ln^2 x - \ln x + 1))^2$	+	+
$f''(x)$	+	-
$f(x)$	$\cup$	$\cap$

добиамо да је f конвексна на $(0, e)$, конкавна на $(e, +\infty)$ и тачка $x = e$ је превојна тачка.

На основу свега овога добијамо да је график функције $f(x) = \ln(\ln^2 x - \ln x + 1)$ дат са



■

Задатак 8.2 (Јан, 2018.)

Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \arctg \frac{x+1}{x}$.

Решење:

(1) Домен функције:

Функција $\arctg x$ је дефинисана на целом $\mathbb{R}$, тако да ту немамо никаквих проблема. Међутим, како имамо део $\frac{x+1}{x}$, а не смемо делити нулом, добијамо да мора да важи $x \neq 0$ и то је једини услов. Дакле, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(2) Нуле, знак, парност, периодичност:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \arctg \frac{x+1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0,$$

па је $x = -1$ једина нула функције f . Како је

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \arctg \frac{x+1}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} > 0$$

и

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, +\infty)$
$x+1$	—	+	+
x	—	—	+
$\frac{x+1}{x}$	+	—	+

добијамо да је $f(x) > 0$ за $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ и $f(x) < 0$ за $x \in (-1, 0)$. Функција f није ни парна ни непарна, а такође није ни периодична.

(3) Асимптоте:

вертикалне: Једина коначна тачка на рубу домена је 0, и овде је функција дефинисана и лево и десно од нуле па ћемо посматрати и леви и десни лимес у нули. Како је

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \arctg \frac{x+1}{x} = , , \arctg -\infty = -\frac{\pi}{2}$$

и

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \arctg \frac{x+1}{x} = , , \arctg +\infty = \frac{\pi}{2},$$

добијамо да f нема вертикалне асимптоте.

хоризонталне: Како је

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg \frac{x+1}{x} = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$$

и

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg \frac{x+1}{x} = \arctg 1 = \frac{\pi}{4},$$

добијамо да је $y = \frac{\pi}{4}$ хоризонтална асимптота и у $-\infty$ и у $+\infty$.

косе: Како f има хоризонталне асимптоте, одмах можемо закључити да нема косе.

(4) Монотоност и екстремне тачке:

Како је

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+1}{x}\right)^2} \cdot \frac{x - (x+1)}{x^2} = \frac{x^2}{x^2 + (x+1)^2} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{2x^2 + 2x + 1}$$

добијамо да је $f'(x) \neq 0$ за све $x \in D_f$. Посматрајући знак првог извода

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
-1	$-$	$-$
$2x^2 + 2x + 1$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$-$
f	$\searrow$	$\searrow$

добиамо да функција f опада на $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

(5) **Конвексност и превојне тачке:**

Како је

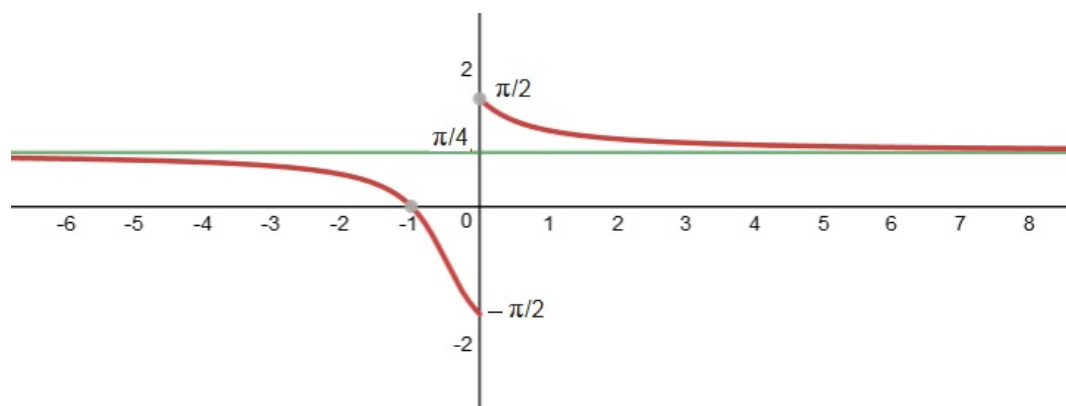
$$f''(x) = \frac{4x + 2}{(2x^2 + 2x + 1)^2},$$

добиамо да је $f''(x) = 0$ акко је $x = -\frac{1}{2}$. Посматрајући знак другог извода

	$(-\infty, -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}, 0)$	$(0, +\infty)$
$4x + 2$	$-$	$+$	$+$
$(2x^2 + 2x + 1)^2$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cup$

добиамо да је f конвексна на $(-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, +\infty)$, конкавна на $(-\infty, -\frac{1}{2})$ и $x = -\frac{1}{2}$ је превојна тачка.

На основу свега овога закључујемо да је график функције $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x}$ дат са



Знамо да је arctg функција која је ограничена са $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$ па график функције f не сме прелазити те вредности на y оси, а тако смо и добили цртањем графика. ■

Задатак 8.3 (Јул, 2018.)

Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = (x+1)^3 \sqrt[3]{x^2}$.

Решење:

(1) Домен функције: $D_f = \mathbb{R}$

(2) Нуле, знак, парност, периодичност:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \text{ или } x = 0,$$

па су нуле функције f тачке $x = -1$ и $x = 0$. На знак функције f утиче само члан $(x+1)^3$ па је $f(x) \leq 0$ на $(-\infty, -1)$ и $f(x) \geq 0$ на $(-1, +\infty)$. Функција f није ни парна ни непарна, а такође није ни периодична.

(3) Асимптоте:

вертикалне: Како је $D_f = \mathbb{R}$, f нема вертикалне асимптоте.

хоризонталне:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{(x+1)^3}_{\rightarrow -\infty} \underbrace{\sqrt[3]{x^2}}_{\rightarrow +\infty} = -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{(x+1)^3}_{\rightarrow +\infty} \underbrace{\sqrt[3]{x^2}}_{\rightarrow +\infty} = +\infty, \end{aligned}$$

па f нема ни хоризонталне асимптоте.

косе: Како је

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty,$$

добивамо да f нема ни косе асимптоте.

(4) Монотоност и екстремне тачке:

$$f'(x) = 3(x+1)^2 \sqrt[3]{x^2} + (x+1)^3 \cdot \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{9(x+1)^2 x + 2(x+1)^3}{3 \sqrt[3]{x}} = \frac{(x+1)^2 (11x+2)}{3 \sqrt[3]{x}},$$

па је $f'(x) = 0$ ако $x = -1$ или $x = -\frac{2}{11}$. Такође, можемо приметити да $f'(0)$ не постоји, па је и $x = 0$ критична тачка. Посматрајући знак првог извода

	$(-\infty, -1)$	$(-1, -\frac{2}{11})$	$(-\frac{2}{11}, 0)$	$(0, +\infty)$
$(x+1)^2$	+	+	+	+
$11x+2$	-	-	+	+
$\sqrt[3]{x}$	-	-	-	+
$f'(x)$	+	+	-	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

добивамо да f расте на $(-\infty, -\frac{2}{11}) \cup (0, +\infty)$, f опада на $(-\frac{2}{11}, 0)$, $x = -1$ није екстремна тачка док f у $x = -\frac{2}{11}$ има локални максимум и у $x = 0$ има локални минимум.

(5) Конвексност и превојне тачке:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(2(x+1)(11x+2) + 11(x+1)^2) 3 \sqrt[3]{x} - (x+1)^2 (11x+2) \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}}{(3 \sqrt[3]{x})^2} \\ &= \frac{(x+1)((2(11x+2) + 11(x+1))3x - (x+1)(11x+2))}{9 \sqrt[3]{x^4}} \end{aligned}$$

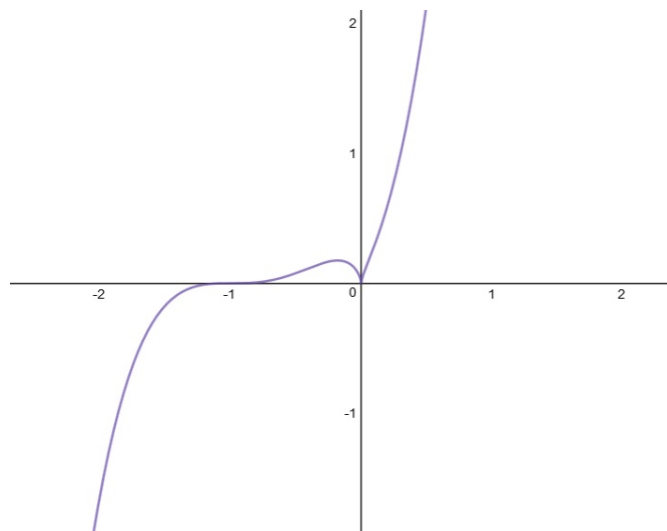
$$\begin{aligned}
&= \frac{(x+1)(3x(33x+15) - (11x^2 + 13x + 2))}{9\sqrt[3]{x^4}} \\
&= \frac{(x+1)(99x^2 + 45x - 11x^2 - 13x - 2)}{9\sqrt[3]{x^4}} = \frac{2(x+1)(44x^2 + 16x - 1)}{9\sqrt[3]{x^4}},
\end{aligned}$$

па је $f''(x) = 0$ акко $x = -1$ или $44x^2 + 16x - 1 = 0$. Решавањем ове квадратне једначине добијамо $x_1 = \frac{-16 - \sqrt{432}}{88}$ и $x_2 = \frac{-16 + \sqrt{432}}{88}$. Требаће нам да отприлике проценимо ове тачке како бисмо знали редослед нула другог извода. Како је $20 = \sqrt{400} < \sqrt{432} < \sqrt{441} = 21$, можемо узети $\sqrt{432} \approx 21$ (ближе је до 21, али може и 20 јер је приближна процена), па је $x_1 \approx -\frac{37}{88}$ и $x_2 \approx \frac{5}{88}$. Посматрајући знак другог извода

	$(-\infty, -1)$	$(-1, x_1)$	(x_1, x_2)	$(x_2, +\infty)$
$x + 1$	—	+	+	+
$44x^2 + 16x - 1$	+	+	—	+
$f''(x)$	—	+	—	+
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

добијамо да је f конвексна на $(-1, x_1) \cup (0, +\infty)$, конкавна на $(-\infty, -1) \cup (x_1, x_2)$ и да су -1 , x_1 и x_2 превојне тачке.

На основу свега овога закључујемо да је график функције $f(x) = (x+1)^3\sqrt[3]{x^2}$ дат са



■

Задатак 8.4 (Феб, 2018.)

Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+2)^2}$.

Решење:

(1) **Домен функције:**

Како делимо са $(x+2)^2$, мора бити $(x+2)^2 \neq 0$, тј. $x \neq -2$, и како је то једини проблематичан део функције, добијамо да је $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$.

(2) Нуле, знак, парност, периодичност:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^3 = 0 \Leftrightarrow x = 1,$$

па је $x = 1$ једина нула функције f . Такође, $f(x) < 0$ на $(-\infty, -2) \cup (-2, -1)$ и $f(x) > 0$ на $(-1, +\infty)$. Домен није симетричан у односу на нулу па можемо закључити да f није ни парна ни непарна, а такође није ни периодична.

(3) Асимптоте:

вертикалне: Једина коначна тачка са рубом домена је -2 , па проверавамо да ли је права $x = -2$ вертикална асимптота. Функција f је дефинисана и с леве и с десне стране -2 , па посматрамо и леви и десни лимес. Како је

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2-} \frac{(x-1)^3}{(x+2)^2} = , , \frac{-27}{0+} = -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -2+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{(x-1)^3}{(x+2)^2} = , , \frac{-27}{0+} = -\infty,\end{aligned}$$

добивамо да је $x = -2$ вертикална асимптота с обе стране.

хоризонталне: Како је

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)^3}{(x+2)^2} = -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)^3}{(x+2)^2} = +\infty,\end{aligned}$$

(16)

добивамо да f нема хоризонталне асимптоте.

косе: За косе ћемо посматрати лимесе и у $-\infty$ и у $+\infty$. Како је

$$\begin{aligned}k &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)^3}{x(x+2)^2} = 1, \\ n &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{(x-1)^3}{(x+2)^2} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)^3 - x(x+2)^2}{(x+2)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - x^3 - 4x^2 - 4x}{x^2 + 4x + 4} = -7,\end{aligned}$$

добивамо да је $y = x - 7$ коса асимптота кад $x \rightarrow -\infty$. Аналогно

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = -7,$$

па је $y = x - 7$ коса асимптота и кад $x \rightarrow +\infty$.

(4) Монотоност и екстремне тачке:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{3(x-1)^2(x+2)^2 - 2(x-1)^3(x+2)}{(x+2)^4} \\ &= \frac{(x+2)(x-1)^2(3(x+2) - 2(x-1))}{(x+2)^4} = \frac{(x-1)^2(x+8)}{(x+2)^3},\end{aligned}$$

па је $f'(x) = 0$ акко $x = -8$ или $x = 1$. Посматрајући знак првог извода

	$(-\infty, -8)$	$(-8, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, +\infty)$
$x + 8$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x + 2)^3$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

добивамо да f расте на $(-\infty, -8) \cup (-2, +\infty)$, f опада на $(-8, -2)$, у тачки $x = -8$ достиже локални максимум док $x = 1$ није екстремна тачка.

(5) **Конвексност и превојне тачке:**

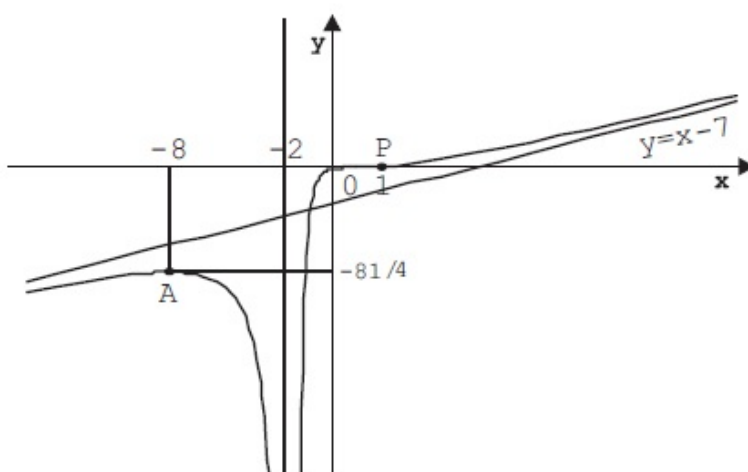
$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \frac{(2(x-1)(x+8) + (x-1)^2)(x+2)^3 - (x-1)^2(x+8)3(x+2)^2}{(x+2)^6} \\
 &= \frac{(x-1)((3x+15)(x+2) - (3x+24)(x-1))}{(x+2)^4} \\
 &= \frac{(x-1)(3x^2 + 21x + 30 - 3x^2 - 21x + 24)}{(x+2)^4} = \frac{54(x-1)}{(x+2)^4},
 \end{aligned}$$

па је $f''(x) = 0$ акко $x = 1$. Посматрајући знак другог извода

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, +\infty)$
$x - 1$	$-$	$-$	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cap$	$\cup$

добивамо да је f конвексна на $(1, +\infty)$, конкавна на $(-\infty, -2) \cup (-2, 1)$ и $x = 1$ је превојна тачка.

На основу свега овога добијамо да је график функције $f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+2)^2}$ дат са



9 Неодређени интеграли

Дефиниција 9.1 Функција $F(x)$ за коју важи $F'(x) = f(x)$ зове се **примитивна функција** функције $f(x)$. Са $\int f(x)dx$ означавамо скуп свих примитивних функција функције f и зовемо га **неодређени интеграл** функције f . Дакле,

$$\int f(x)dx = \{F(x) + C \mid C \in \mathbb{R}\} = (\text{или краће пишемо}) = F(x) + C.$$

1. Основна својства

- (а) $d\left(\int f(x) dx\right) = f(x) dx$
- (б) $\int df(x) = f(x) + C$
- (в) $\int \lambda f(x) dx = \lambda \int f(x) dx, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- (г) $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

2. Таблица основних интеграла

- | | |
|--|--|
| (а) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$ | (е) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$ |
| (б) $\int \frac{dx}{x} = \ln c + C$ | (ж) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$ |
| (в) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$ | (з) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ |
| (г) $\int e^x dx = e^x + C$ | (и) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$ |
| (д) $\int \sin x dx = -\cos x + C$ | (ј) $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left \frac{x-1}{x+1} \right + C$ |
| (ђ) $\int \cos x dx = \sin x + C$ | (к) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right + C$ |

Примери:

- 1) $\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx = \int (\sqrt{x^3} + 1) dx = \int x^{3/2} dx + \int dx = \frac{2}{5}x^{5/2} + x + C$
- 2) $\int (6x^2 + 8x + 3) dx = 6 \int x^2 dx + 8 \int x dx + 3 \int dx = 2x^3 + 4x^2 + 3x + C$

3. Смена променљивих

Ако је $\int f(x) dx = F(x) + C, x \in X$ и $x = \varphi(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t)dt$, где је $\varphi : Y \rightarrow \mathbb{R}$ непрекидна и диференцијабилна функција, тада је

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C.$$

Специјално,

$$\int f(ax+b) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена:} \\ ax+b=t \\ adx=dt \end{array} \right\} = \int \frac{f(t)}{a} dt = \frac{1}{a} F(t) + C = \frac{1}{a} F(ax+b) + C.$$

У следећим примерима свуда имамо линеарну смену претходног облика којом ћемо доћи до табличног интеграла па се свуда примењује исти поступак.

Примери:

- 1) $\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C$
- 2) $\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \frac{(x-a)^{1-n}}{1-n} + C$
- 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
- 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{(\frac{x}{a})^2 \pm 1}} = \ln \left| x + \sqrt{(\frac{x}{a})^2 \pm 1} \right| + C$
- 5) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1+(\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$
- 6) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{(\frac{x}{a})^2-1} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$

4. Парцијална интеграција

Ако су u и v диференцијабилне функције, тада важи

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Примери:

- 1) Када имамо $\ln$ углавном увек то узимамо за u а све остало иде у dv :

$$\int x \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

- 2) Када имамо полином пута $\sin$ или $\cos$, за u узимамо тај полином јер се диференцирањем смањује степен полинома па ће тај полином нестати након парцијалних интеграција, а за dv узимамо то остало јер свакако знамо да интегралимо $\sin$ или $\cos$:

$$\begin{aligned} \int x \sin x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x \end{array} \right\} \\ &= -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C \end{aligned}$$

- 3) Ово је интеграл кружног типа јер се након две поновљене парцијалне интеграције враћамо на почетни интеграл. Овде је свеједно шта ћемо узети за u а шта за dv , али је битно да се и код друге примене парцијалне интеграције придржавамо истог одабира јер би нам се иначе све пократило:

$$\begin{aligned} I &= \int e^x \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{array} \right\} \\ &= e^x \cos x + \int e^x \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{array} \right\} \\ &= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x (\cos x + \sin x) - I \\ \Rightarrow 2I &= e^x (\cos x + \sin x) \Rightarrow I = \frac{e^x}{2} (\cos x + \sin x) + C \end{aligned}$$

- 4) Овде можемо израчунати I_1 методом смене променљивих, а за $n \geq 1$ ћемо добити рекурентну везу интеграла:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \\
 I_n &= \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} \Rightarrow du = \frac{-2nx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right\} \\
 &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx \\
 &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} - 2na^2 \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} \\
 &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1} \\
 \Rightarrow I_{n+1} &= \frac{1}{2na^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} I_n, \quad n \geq 1.
 \end{aligned}$$

5. Интеграција рационалних функција $\int R(x)dx$

Нека је $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}$, где су P, Q, T, r полиноми и $\deg r < \deg Q$ (степен полинома r је строго мањи од степена полинома Q). Ако је $\deg Q = n$, онда Q има тачно n -нула (простих или вишеструких, реалних или комплексних) па га можемо раставити на просте факторе у облику

$$Q(x) = \lambda(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2} \dots (x-a_p)^{k_p}(x^2+b_1x+c_1)^{l_1}(x^2+b_2x+c_2)^{l_2} \dots (x^2+b_qx+c_q)^{l_q},$$

где је $k_1 + k_2 + \dots + k_p + 2(l_1 + l_2 + \dots + l_q) = n$.

Просте рационалне функције су функције облика $R_1(x) = \frac{A}{(x-a)^k}$ или $R_2(x) = \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^l}$, и при наведеним условима функцију $\frac{r(x)}{Q(x)}$ можемо раставити на суму простих рационалних функција на следећи начин:

$$\begin{aligned}
 \frac{r(x)}{Q(x)} &= \left(\frac{A_{11}}{x-a_1} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x-a_1)^{k_1}} \right) + \dots \\
 &+ \left(\frac{A_{p1}}{x-a_p} + \frac{A_{p2}}{(x-a_p)^2} + \dots + \frac{A_{pk_p}}{(x-a_p)^{k_p}} \right) \\
 &+ \left(\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+b_1x+c_1} + \dots + \frac{B_{1l_1}x+C_{1l_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{l_1}} \right) + \dots \\
 &+ \left(\frac{B_{ql_q}x+C_{ql_q}}{x^2+b_qx+c_q} + \dots + \frac{B_{ql_q}x+C_{ql_q}}{(x^2+b_qx+c_q)^{l_q}} \right).
 \end{aligned}$$

Дакле, уколико у имениоцу имамо члан $(x-a)^k$ (полином првог степена на $k > 0$), за бројилац ћемо узети неку константу A (полином нултог степена) а уколико је у имениоцу члан облика $(x^2+bx+c)^l$ (полином другог степена на $l > 0$) за именилац узимамо $Bx+C$ (полином првог степена). Како интеграл пролази кроз суму и како није тешко израчунати интеграле простих рационалних функција, када смо $R(x)$ раставили на овај начин уз мало рачуна лако можемо израчунати $\int R(x)dx$. Иако овај општи случај на први поглед изгледа застрашујуће, интеграл овог типа се рачуна шаблонски и поприлично једноставно. Због тога ће нам циљ код свих наредних типова интеграла бити да их сведемо на интеграл рационалне функције.

Примери:

$$1) \int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} dx = \int \frac{x^3-5x^2+6x+5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x} dx = \int \left(1 + \frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}\right) dx$$

Сада $\frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}$ треба написати као суму простих рационалних функција, а за то нам је пре свега потребно да $x^3 - 5x^2 + 6x$ раставимо на просте факторе. Како је $x^3 - 5x^2 + 6x = x(x-2)(x-3)$, на основу претходног знамо да $\frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}$ можемо раставити на следећи начин:

$$\frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x} = \frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3},$$

где су $A, B, C \in \mathbb{R}$ бројеви које треба одредити. Када ово са десне стране доведемо на заједнички именилац, добијамо

$$\begin{aligned} \frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x} &= \frac{A(x^2-5x+6) + B(x^2-3x) + C(x^2-2x)}{x(x-2)(x-3)} \\ &= \frac{(A+B+C)x^2 + (-5A-3B-2C)x + 6A}{x^3-5x^2+6x} \end{aligned}$$

Изједначавањем коефицијената уз $1, x, x^2$ у бројиоцима с леве и десне стране добијамо

$$\begin{aligned} A + B + C &= 5 \\ 5A + 3B + 2C &= 6 \\ 6A &= 1 \end{aligned} \Rightarrow A = \frac{1}{6}, B = -\frac{9}{2}, C = \frac{28}{3}.$$

Сада имамо да је

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} dx &= \int \left(1 + \frac{1}{6x} - \frac{9}{2(x-2)} + \frac{28}{3(x-3)}\right) dx \\ &= x + \frac{1}{6} \ln|x| - \frac{9}{2} \ln|x-2| + \frac{28}{3} \ln|x-3| + C. \end{aligned}$$

$$2) \int \frac{x}{x^3-3x+2} dx$$

Понављамо исти поступак као у претходном примеру:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^3-3x+2} &= \frac{x}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2} \\ &= \frac{A(x^2+x-2) + B(x+2) + C(x^2-2x+1)}{(x-1)^2(x+2)} \\ &= \frac{(A+C)x^2 + (A+B-2C)x + (-2A+2B+C)}{x^3-3x+2} \end{aligned}$$

Изједначавањем коефицијената у имениоцима добијамо

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ A + B - 2C &= 1 \\ -2A + 2B + C &= 0 \end{aligned} \Rightarrow A = \frac{2}{9}, B = \frac{1}{3}, C = -\frac{2}{9}.$$

Сада имамо да је

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^3-3x+2} dx &= \frac{2}{9} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(x-1)^2} - \frac{2}{9} \int \frac{dx}{x+2} \\ &= \frac{2}{9} \ln|x-1| - \frac{1}{3(x-1)} - \frac{2}{9} \ln|x+2| + C. \end{aligned}$$

$$3) \int \frac{dx}{x^3 + 1}$$

Понављањем истог поступка добијамо

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3 + 1} &= \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 - x + 1} = \frac{(A + B)x^2 + (-A + B + C)x + (A + C)}{x^3 + 1} \\ \Rightarrow A &= \frac{1}{3}, \quad B = -\frac{1}{3}, \quad C = \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

па је

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3 + 1} &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x + 1} - \frac{1}{3} \int \frac{x - 2}{x^2 - x + 1} dx \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x + 1} - \frac{1}{6} \int \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} dx + \frac{1}{3} \int \frac{\frac{3}{2} dx}{x^2 - x + 1} \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x + 1} - \frac{1}{6} \int \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \begin{array}{l} \text{смена:} \\ x + 1 = t \\ dx = dt \end{array} \right\} - \frac{1}{6} \left\{ \begin{array}{l} \text{смена:} \\ x^2 - x + 1 = p \\ (2x - 1)dx = dp \end{array} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \text{смена:} \\ x - \frac{1}{2} = q \\ dx = dq \end{array} \right\} \\ &= \frac{1}{3} \ln |x + 1| - \frac{1}{6} \ln |x^2 - x + 1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C \end{aligned}$$

6. Интеграли облика $I_{mn} = \int \sin^m x \cos^n x dx$, $m, n \in \mathbb{N}$

1) Ако је $m = 2k + 1$, $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} I_{mn} &= \int \sin^{2k} x \cdot \cos^n x \cdot \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x)^k \cdot \cos^n x \cdot \sin x dx \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{смена:} \\ \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right\} = - \int (1 - t^2)^k t^n dt = \dots \end{aligned}$$

Аналогно за $n = 2k + 1$, $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} I_{mn} &= \int \sin^m x \cdot \cos^{2k} x \cdot \cos x dx = \int \sin^m x \cdot (1 - \sin^2 x)^k \cdot \cos x dx \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \text{смена:} \\ \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right\} = \int t^m (1 - t^2)^k dt = \dots \end{aligned}$$

Пример:

$$\begin{aligned} \int \sin^{10} x \cos^3 x dx &= \int \sin^{10} x (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена:} \\ \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right\} \\ &= \int t^{10} (1 - t^2) dt = \int t^{10} dt - \int t^{12} dt = \frac{t^{11}}{11} - \frac{t^{13}}{13} + C = \frac{\sin^{11} x}{11} - \frac{\sin^{13} x}{13} + C \end{aligned}$$

2) $m = 2k$, $n = 2l$

Трансформације:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

Пример:

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \cos^2 x \, dx &= \int (\cos x \sin x)^2 \sin^2 x \, dx = \int \frac{1}{4} \sin^2 2x \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx \\ &= \frac{1}{8} \int (\sin^2 2x - \sin^2 2x \cos 2x) \, dx = \frac{1}{8} \int \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} - \sin^2 2x \cos 2x \right) \, dx \\ &= \frac{1}{16} \int dx - \frac{1}{16} \int \cos 4x \, dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x \, dx \\ &= \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C \end{aligned}$$

7. **Интеграли облика** $\int R(\sin x, \cos x) \, dx$, $R = R(u, v)$ рационална функција

1) Ако је $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) \Rightarrow$ смена: $t = \cos x$

Пример:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} \, dx = \int \frac{-dt}{1 - t^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + C$$

2) Ако је $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) \Rightarrow$ смена: $t = \sin x$

Пример:

$$\int \frac{\cos x}{\sin^4 x} \, dx = \int \frac{dt}{t^4} = -\frac{1}{3} t^{-3} + C = -\frac{1}{3 \sin^3 x} + C$$

3) Ако је $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) \Rightarrow$ смена: $t = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

При овој смени је $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$

Пример:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} &= \int \frac{\frac{1}{1+t^2} dt}{\frac{t^4}{(1+t^2)^2} \cdot \frac{1}{1+t^2}} = \int \frac{(1+t^2)^2}{t^4} dt = \int (t^{-4} + 2t^{-2} + 1) dt \\ &= -\frac{1}{3} t^{-3} - 2t^{-1} + t + C = -\frac{1}{3 \operatorname{tg}^3 x} - \frac{2}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x + C \end{aligned}$$

4) Уколико не важи ништа од претходних случајева, имамо општу смену

$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $x \in (-\pi, \pi)$. Тада је $dx = \frac{2 dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Пример:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} &= \int \frac{\frac{2}{1+t^2} dt}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2} dt}{\frac{1+t^2+2t+1-t^2}{1+t^2}} \\ &= \int \frac{dt}{t+1} = \ln |t+1| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right| + C \end{aligned}$$

8. **Интеграли облика** $\int R\left(x, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^{p_1/n_1}, \dots, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^{p_k/n_k}\right) dx$

Смена: $\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} = t^n$, $n = \text{НЗС}(n_1, n_2, \dots, n_k) \Rightarrow x = \frac{\delta t^n - \beta}{\alpha - \gamma t^n}$

Пример:

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}} \\ & \left\{ \alpha = 2, \beta = -1, \gamma = 0, \delta = 1, p_1 = p_2 = 1, n_1 = 2, n_2 = 4 \Rightarrow \text{смена } t = \sqrt[4]{2x-1} \right\} \\ & \int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}} = \int \frac{2t^3}{t^2 - t} dt = 2 \int \frac{t^2}{t-1} dt = 2 \int \left(t + 1 + \frac{1}{t-1} \right) dt \\ & = t^2 + 2t + 2 \ln |t-1| + C = \sqrt{2x-1} + 2\sqrt[4]{2x-1} + \ln |\sqrt[4]{2x-1} - 1| + C \end{aligned}$$

Наредна два типа интеграла не радимо на вежбама из Математике 1 и није потребно да их учите за испит, али чисто да знате да постоји и то, ако вам затреба некада.

9. **Интеграли биномних диференцијала** $I_{mnp} = \int x^m (a + bx^n)^p dx$, $m, n, p \in \mathbb{Q}$

- 1) Ако $p \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ смена $x = t^\lambda$, где је λ најмањи заједнички садржалац именилаца бројева m и n

Пример:

$$\begin{aligned} & \int \sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})^{-1} dx = \int x^{\frac{1}{2}} \left(1 + x^{\frac{1}{3}}\right)^{-1} dx \\ & \left\{ m = \frac{1}{2}, n = \frac{1}{3}, p = -1 \in \mathbb{Z}, \lambda = \text{НЗС}(2, 3) = 6 \Rightarrow \text{смена: } x = t^6, dx = 6t^5 dt \right\} \\ & \int \sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})^{-1} dx = \int t^3(1 + t^2)^{-1} \cdot 6t^5 dt = 6 \int \frac{t^8}{1 + t^2} dt \\ & = 6 \int \left(t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{1 + t^2} \right) dt = \frac{6}{7}t^7 - \frac{6}{5}t^5 + 2t^3 - 6t + 6 \arctg t + C \\ & = \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} - \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} + 2x^{\frac{1}{2}} - 6x^{\frac{1}{6}} + 6 \arctg x^{\frac{1}{6}} + C \end{aligned}$$

- 2) Ако $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ смена $x = \left(\frac{t^\nu - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$, ν - именилац броја p

Пример:

$$\begin{aligned} & \int \frac{x}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}} dx = \int x \left(1 + x^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} dx \\ & \left\{ m = 1, n = \frac{2}{3}, p = -\frac{1}{2}, \frac{m+1}{n} = 3 \in \mathbb{Z}, \nu = 2 \Rightarrow \text{смена: } x = (t^2 - 1)^{\frac{3}{2}} \right\} \\ & \int \frac{x}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}} dx = \int \frac{(t^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}{t} \cdot 3t(t^2 - 1)^{\frac{1}{2}} dt = 3 \int (t^2 - 1)^2 dt \\ & = \frac{3}{5}t^5 - 2t^3 + 3t + C = \frac{3}{5}(x^{\frac{2}{3}} + 1)^{\frac{5}{2}} - 2(x^{\frac{2}{3}} + 1)^{\frac{3}{2}} + 3(x^{\frac{2}{3}} + 1)^{\frac{1}{2}} + C \end{aligned}$$

- 3) $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ смена $x = \left(\frac{a}{t^\nu - b}\right)^{\frac{1}{n}}$, ν - именилац броја p

Пример:

$$\begin{aligned}\int \sqrt[3]{3x - x^3} dx &= \int x^{\frac{1}{3}} (3 - x^2)^{\frac{1}{3}} \\ \left\{ m = \frac{1}{3}, n = 2, p = \frac{1}{3}, \frac{m+1}{n} + p = 1 \in \mathbb{Z}, \nu = 3 \Rightarrow \text{смена: } x = \left(\frac{3}{t^3 + 1} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \\ \int \sqrt[3]{3x - x^3} dx &= \int \left(\frac{3}{t^3 + 1} \right)^{\frac{1}{6}} \left(3 - \frac{3}{t^3 + 1} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{-3\sqrt{3}}{2} \frac{t^2}{(t^3 + 1)^{\frac{3}{2}}} dt \\ &= -\frac{9}{2} \int \frac{t^3}{(t^3 + 1)^2} dt = \dots (\text{интеграл рационалне функције}) \dots\end{aligned}$$

10. Интеграли облика $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ – Ојлерове смене

$R = R(u, v)$ рационална функција, $ax^2 + bx + c = 0$ нема двоструко решење

1) I Ојлерова смена

Уколико је $a > 0$, узимамо смену $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm \sqrt{ax}$

Пример:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} &= \left\{ \begin{array}{l} a = 1 > 0 \Rightarrow \text{смена: } \sqrt{x^2 + x + 1} = t - x \\ x^2 + x + 1 = t^2 - 2tx + x^2 \Rightarrow x = \frac{t^2 - 1}{1 + 2t} \\ dx = \frac{2t(1+2t) - (t^2 - 1)2}{(1+2t)^2} dt = \frac{2(t^2 + t + 1)}{(1+2t)^2} dt \end{array} \right\} \\ &= \int \frac{2t^2 + 2t + 2}{t(1+2t)^2} dt = \int \left(\frac{2}{t} - \frac{3}{1+2t} - \frac{3}{(1+2t)^2} \right) dt \\ &= 2 \ln |t| - \frac{3}{2} \ln |1+2t| + \frac{3}{2(1+2t)} + C = \frac{3}{2(1+2t)} + \frac{1}{2} \ln \frac{t^4}{|1+2t|^3} + C \\ &= \frac{3}{2(1+2x+2\sqrt{x^2+x+1})} + \frac{1}{2} \ln \frac{(x + \sqrt{x^2+x+1})^4}{|1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}|^3} + C\end{aligned}$$

2) II Ојлерова смена

Уколико је $c > 0$, узимамо смену $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}$

Пример:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}} &= \left\{ \begin{array}{l} c = 1 > 0 \Rightarrow \text{смена: } \sqrt{1 - 2x - x^2} = tx - 1 \\ 1 - 2x - x^2 = t^2 x^2 - 2tx + 1 \Rightarrow x = \frac{2t-2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2(1+t^2) - (2t-2)2t}{(1+t^2)^2} dt = \frac{-2t^2 + 4t + 2}{(1+t^2)^2} dt \end{array} \right\} \\ &= \int \frac{\frac{-2t^2 + 4t + 2}{(1+t^2)^2}}{\frac{2t-2}{1+t^2}} dt = \int \frac{-t^2 + 2t + 1}{t(t-1)(1+t^2)} dt = \dots \text{рационална функција} \dots \\ &= - \int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{t-1} + 2 \int \frac{dt}{1+t^2} = \ln \left| \frac{t-1}{t} \right| + 2 \operatorname{arctg} t + C \\ &= \ln \left| \frac{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2} - x}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}} \right| + 2 \operatorname{arctg} \frac{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}{x} + C\end{aligned}$$

3) III Ојлерова смена

Уколико је $ax^2 + bx + c = a(x - \lambda)(x - \mu)$, $\lambda \neq \mu$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

узимамо смену $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \lambda) \vee t(x - \mu)$

Пример:

$$\int \sqrt{2x - x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} 2x - x^2 = x(2 - x) \Rightarrow \text{смена: } \sqrt{2x - x^2} = tx \\ 2x - x^2 = t^2 x^2 \Rightarrow x = \frac{2}{1+t^2} \\ dx = \frac{-4t}{(1+t^2)^2} dt \end{array} \right\}$$

$$= \int t \frac{2}{1+t^2} \frac{-4t}{(1+t^2)^2} dt = \dots \text{рационална функција} \dots$$

Сада ћемо урадити пар задатака са испита:

Задатак 9.1 (Сеп-3, 2018) Израчунати $\int \frac{\sqrt[3]{x+2}}{x-3\sqrt[3]{x+2}} dx$.

Решење: Ово је интеграл из типа 8., па знамо коју смену узимамо:

$$I = \int \frac{\sqrt[3]{x+2}}{x-3\sqrt[3]{x+2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена:} \\ \sqrt[3]{x+2} = t \Rightarrow x = t^3 - 2 \\ dx = 3t^2 dt \end{array} \right\} = \int \frac{t}{t^3 - 2 - 3t} \cdot 3t^2 dt$$

$$= 3 \int \frac{t^3 - 3t - 2 + 3t + 2}{t^3 - 3t - 2} dt = 3 \int \left(1 + \frac{3t + 2}{t^3 - 3t - 2} \right) dt$$

Добили смо интеграл рационалне функције и понављамо познате кораке од раније:

$$\begin{aligned} \frac{3t+2}{t^3-3t-2} &= \frac{3t+2}{(t-2)(t+1)^3} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{(t+1)^2} \\ &= \frac{A(t^2+2t+1) + B(t^2-t-2) + C(t-2)}{(t-2)(t+1)^2} \\ &= \frac{(A+B)t^2 + (2A-B+C)t + (A-2B-2C)}{(t-2)(t+1)^2} \end{aligned}$$

Изједначавањем коефицијената лево и десно добијамо:

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ 2A - B + C &= 3 \\ A - 2B - 2C &= 2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{8}{9}, \quad B = -\frac{8}{9}, \quad C = \frac{1}{3},$$

па је

$$\begin{aligned} I &= 3 \left(\int 1 dt + \frac{8}{9} \int \frac{dt}{t-2} - \frac{8}{9} \int \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{3} \int \frac{dt}{(t+1)^2} \right) \\ &= 3t + \frac{8}{3} \ln|t-2| - \frac{8}{3} \ln|t+1| - \frac{1}{t+1} + C \\ &= 3\sqrt[3]{x+2} + \frac{8}{3} \ln|\sqrt[3]{x+2}-2| - \frac{8}{3} \ln|\sqrt[3]{x+2}+1| - \frac{1}{\sqrt[3]{x+2}+1} + C. \end{aligned}$$

■

Задатак 9.2 (Јул, 2018) Израчунати $\int \frac{\sin 2x + \cos x}{\sin^2 x + 1} dx$.

Решење:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin 2x + \cos x}{\sin^2 x + 1} dx &= \int \frac{2 \sin x + 1}{\sin^2 x + 1} \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} 7.2) \Rightarrow \text{смена:} \\ \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{2t + 1}{t^2 + 1} dt \\ &= \int \frac{2t}{1 + t^2} dt + \int \frac{dt}{1 + t^2} = \ln(1 + t^2) + \operatorname{arctg} t + C = \ln(1 + \sin^2 x) + \operatorname{arctg}(\sin x) + C. \end{aligned}$$

■

Задатак 9.3 (Јун, 2018) Израчунати $\int \frac{\sin x}{\cos x \sqrt{1 + \sin^2 x}} dx$.**Решење:**

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x}{\cos x \sqrt{1 + \sin^2 x}} dx &= \left\{ \begin{array}{l} 7.1) \Rightarrow \text{смена:} \\ \cos x = t \Rightarrow \sin^2 x = 1 - t^2 \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{-dt}{t \sqrt{2 - t^2}} dt \\ &= \int \frac{-t dt}{t^2 \sqrt{2 - t^2}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена:} \\ 2 - t^2 = u^2 \\ -2t dt = 2u du \end{array} \right\} = \int \frac{u du}{(2 - u^2)u} = \int \frac{du}{2 - u^2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + u}{\sqrt{2} - u} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2 - t^2}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - t^2}} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1 + \sin^2 x}}{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \sin^2 x}} \right| + C \end{aligned}$$

■

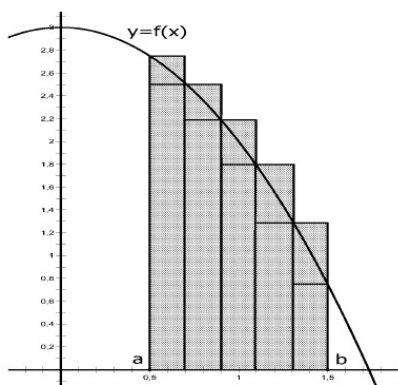
Задатак 9.4 (Сеп-2, 2018) Израчунати $\int (x^2 + 3x - 4) \sin 2x dx$.**Решење:**

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 3x - 4) \sin 2x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = x^2 + 3x - 4 \Rightarrow du = (2x + 3) dx \\ dv = \sin 2x dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array} \right\} \\ &= -\frac{1}{2} (x^2 + 3x - 4) \cos 2x + \frac{1}{2} \int (2x + 3) \cos 2x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 2x + 3 \Rightarrow du = 2 dx \\ dv = \cos 2x dx \Rightarrow v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right\} \\ &= -\frac{1}{2} (x^2 + 3x - 4) \cos 2x + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (2x + 3) \sin 2x - \int \sin 2x dx \right) \\ &= -\frac{1}{2} (x^2 + 3x - 4) \cos 2x + \frac{1}{4} (2x + 3) \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C \\ &= \frac{(-2x^2 - 6x + 9) \cos 2x + (2x + 3) \sin 2x}{4} + C. \end{aligned}$$

■

10 Одређени интеграли

Посматраћемо проблем одређивања површине P lika у равни ограниченог графиком позитивне функције f , x -осом и правама $x = a$ и $x = b$ ($a < b$). Поделићемо интервал $[a, b]$ на n једнаких делова, где је n природан број (на слици имамо $n = 5$). Означимо $x_0 = a$, $x_1 = a + \frac{b-a}{n}$, $x_2 = a + 2\frac{b-a}{n}$, ..., $x_n = b$.



Подручју чију површину желимо да одредимо уписујемо и описујемо правоугаонике као на слици.

Посматрајмо прво „уписане” правоугаонике: основна страница свих таквих правоугаоника је $\Delta_n = \frac{b-a}{n}$, док друга страница редом износи $f(c_1)$, $f(c_2)$, ..., $f(c_n)$, за неке $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Ако са s_n означимо суму површина свих таквих правоугаоника, очигледно је $s_n = \sum_{k=1}^n f(c_k) \cdot \Delta_n$.

Слично можемо посматрати „описане” правоугаонике: основна страница свих таквих правоугаоника је такође $\Delta_n = \frac{b-a}{n}$, док друга страница редом износи $f(C_1)$, $f(C_2)$, ..., $f(C_n)$, за неке $C_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Ако са S_n означимо суму површина свих таквих правоугаоника, очигледно је $S_n = \sum_{k=1}^n f(C_k) \cdot \Delta_n$.

Очигледно је да важи

$$s_n \leq P \leq S_n.$$

Сада је идеја да видимо шта се дешава када повећавамо број делова (не мора подударних) на које делимо интервал $[a, b]$, тј. кад $n \rightarrow +\infty$. Видимо да би природно било да у том случају важи

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = P = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n.$$

Међутим, ово не мора да важи увек. За функцију f посматрану на $[a, b]$ за коју ово важи кажемо да је **интеграбилна на интервалу $[a, b]$**

Дефиниција 10.1 Одређени интеграл интеграбилне функције f на интервалу $[a, b]$ означавамо са $\int_a^b f(x)dx$ и дефинишемо га са

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \cdot \Delta x_i,$$

где је $\max \Delta x_i$ највећа дужина свих подинтервала произвољно узете поделе $[a, b]$, а x_i^* произвољна тачка из $[x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

1. Основна својства

- (а) $\int_a^a f(x)dx = 0$;
- (б) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;
- (в) $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
- (г) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$;
- (д) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, $\forall c \in [a, b]$;
- (ђ) $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ ако је $f(x) \geq 0$ за све $x \in [a, b]$;
- (е) $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$ ако је f парна функција;
- (ж) $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$ ако је f непарна функција;
- (з) $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$ ако је f периодична функција са периодом T .

2. Њутн-Лајбницова формула

Теорема 10.1 Ако је f интеграбилна на интервалу $[a, b]$ и има на том интервалу примитивну функцију F (функцију за коју је $F'(x) = f(x)$), онда важи

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

3. Смена променљивих

Теорема 10.2 За непрекидну функцију f на интервалу $[a, b]$ и диференцијабилну функцију $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ такву да је φ' непрекидна и $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$ важи

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt.$$

4. Парцијална интеграција

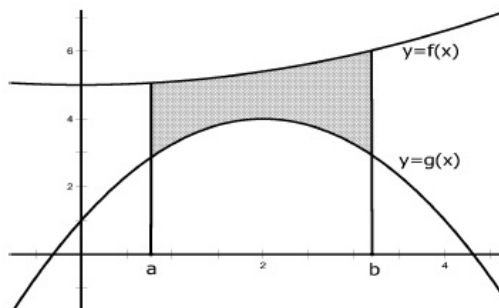
Ако су u и v диференцијабилне функције, тада важи

$$\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du.$$

5. Примена одређеног интеграла

(а) Рачунање површине lika у равни

Посматрамо у равни неки лик који је ограничен кривама $y = f(x)$ и $y = g(x)$ и правама $x = a$ и $x = b$ и желимо да израчунамо његову површину.



Са слике видимо да ту површину добијамо када од површине lika ограниченог са $x = a$, $x = b$ и $y = f(x)$ одузмемо површину lika ограниченог са $x = a$, $x = b$ и $y = g(x)$, па на основу дефиниције одређеног интеграла добијамо

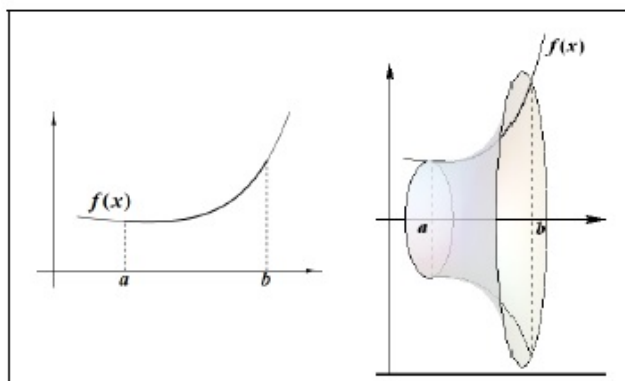
$$P = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx. \quad (17)$$

Формула (17) важи и када није $f(x) \geq 0$ и $g(x) \geq 0$ за све $x \in [a, b]$, али под условом да је $f(x) - g(x) \geq 0$, тј. да је график функције $f(x)$ „изнад” графика функције $g(x)$ на $[a, b]$.

(б) Рачунање запремине ротационих тела у простору

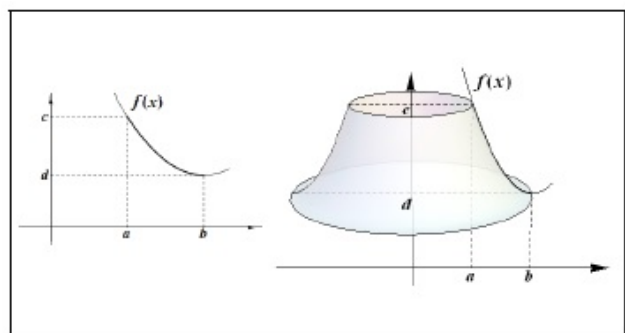
Запремина тела које настаје ротацијом око x -осе криве $y = f(x)$ на интервалу $[a, b]$ рачуна се помоћу формуле

$$V_x = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$



Запремина тела које настаје ротацијом око y -осе криве $y = f(x)$ за $x \in [a, b]$ рачуна се тако што изразимо x преко y , тј. $x = g(y)$ за $y \in [c, d]$ и применимо формулу

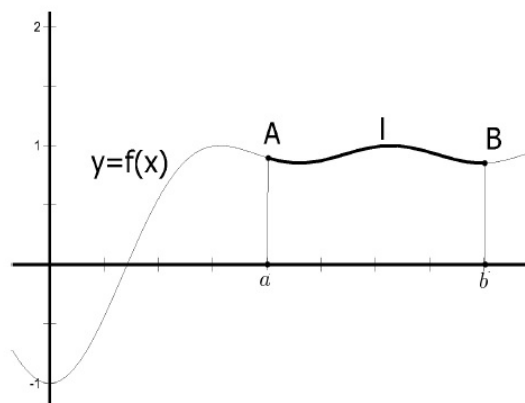
$$V_y = \pi \int_c^d g(y)^2 dy.$$



(в) Рачунање дужине лука криве

Дужина лука l криве $y = f(x)$ на интервалу $[a, b]$, тј. између тачака $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ се рачуна помоћу формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$



Сада ћемо видети како ово изгледа на конкретним примерима:

Задатак 10.1 (2.кол, 2018.) Израчунати површину lika у равни ограниченог кривама $y^2 = 9 - 3x$, $y = -\frac{1}{2}x + 3$ и $y = 0$.

Решење: Код ових задатака је доста битно скицирати криве како бисмо видели на који начин ћемо рачунати површину.

Означимо:

$$\mathcal{P} : y^2 = 9 - 3x$$

$$p : y = -\frac{1}{2}x + 3$$

$$q : y = 0$$

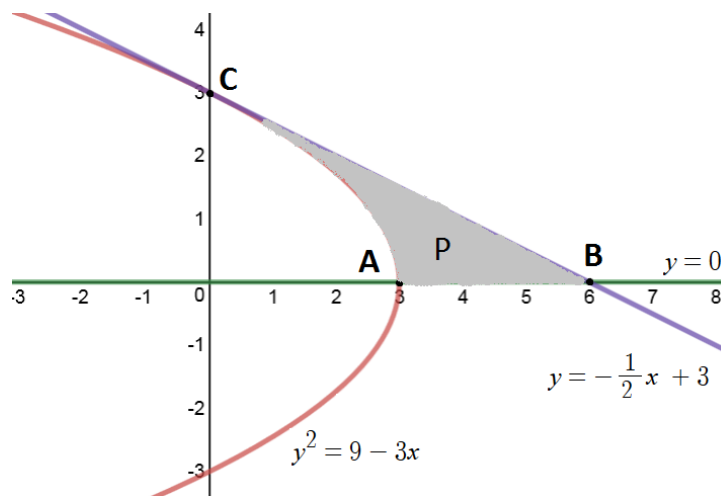
Тада је:

$$\mathcal{P} \cap q = A(3, 0)$$

$$p \cap q = B(6, 0)$$

$$\mathcal{P} \cap p = C(0, 3)$$

Површину P можемо рачунати на два начина.

I начин - интегралимо по x :

Ако посматрамо по x -оси, видимо да се тражена површина P за $x \in [0, 3]$ налази испод праве p и изнад параболе $\mathcal{P}$, док се за $x \in [3, 6]$ налази испод праве p и изнад праве q . Дакле, мораћемо да раздвојимо на два интеграла, тј. $P = P_1 + P_2$. Како нама за рачунање површине у овом случају треба $y = f(x)$, мораћемо да параболу „раздвојимо” на две гране $y = \sqrt{9 - 3x}$ и $y = -\sqrt{9 - 3x}$. Нама ће конкретно за P_1 требати грана $y = \sqrt{9 - 3x}$ ($y > 0$ на овом делу који нам треба па је зато то грана са предзнаком $+$). Дакле,

$$\begin{aligned} P_1 &= \int_0^3 \left(\left(-\frac{1}{2}x + 3\right) - \sqrt{9 - 3x} \right) dx = -\frac{x^2}{4} \Big|_0^3 + 3x \Big|_0^3 + \frac{2}{9}(9 - 3x)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^3 \\ &= -\left(\frac{3^2}{4} - 0\right) + (3 \cdot 3 - 3 \cdot 0) + \frac{2}{9} \left(0 - 9^{\frac{3}{2}}\right) = -\frac{9}{4} + 9 - \frac{2}{9} \cdot 27 = \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

$$P_2 = \int_3^6 \left(\left(-\frac{1}{2}x + 3 \right) - 0 \right) dx = -\frac{x^2}{4} \Big|_3^6 + 3x \Big|_3^6 = -\left(\frac{36}{4} - \frac{9}{4} \right) + 3(6 - 3) = \frac{9}{4}.$$

Дакле, добијамо да је тражена површина једнака

$$P = P_1 + P_2 = \frac{3}{4} + \frac{9}{4} = 3.$$

II начин - интегралимо по y :

Ако већ из $y^2 = 9 - 3x$ не можемо експлицитно изразити y као функцију по x , онда је лакше да изразимо x као функцију по y и да посматрамо површину по y -оси. Из $y^2 = 9 - 3x$, добијамо $x = 3 - \frac{y^2}{3}$, а видимо да и из $y = -\frac{1}{2}x + 3$ можемо изразити $x = 6 - 2y$. Ако посматрамо по y -оси, видимо да се P креће од 0 до 3, и да је свуда испод праве $p : x = 6 - 2y$ и изнад параболе $\mathcal{P} : x = 3 - \frac{y^2}{3}$, па нећемо морати да раздвајамо на два дела као у првом случају. Сада добијамо

$$P = \int_0^3 \left(6 - 2y - \left(3 - \frac{y^2}{3} \right) \right) dy = 3y \Big|_0^3 - y^2 \Big|_0^3 + \frac{y^3}{9} \Big|_0^3 = 9 - 9 + \frac{27}{9} = 3.$$

■

Задатак 10.2 (Јун, 2018.) Израчунати површину lika у равни ограниченог кривама $y = |x|$ и $y = \frac{2}{1+x^2}$.

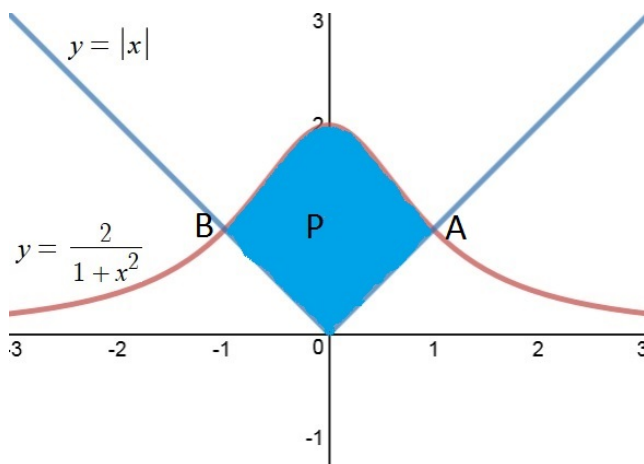
Решење:

Како је

$$y = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0, \end{cases} \quad \text{за}$$

пресечне тачке $y = |x|$ и $y = \frac{2}{1+x^2}$ добијамо $A(1, 1)$ и $B(-1, 1)$.

Са слике видимо да се P налази између -1 и 1 по x -оси, као и да је на том интервалу свуда испод $y = \frac{2}{1+x^2}$ и изнад $y = |x|$.



Дакле,

$$\begin{aligned} P &= \int_{-1}^1 \left(\frac{2}{1+x^2} - |x| \right) dx = 2 \int_0^1 \left(\frac{2}{1+x^2} - |x| \right) dx = 2 \int_0^1 \left(\frac{2}{1+x^2} - x \right) dx \\ &= 4 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} - 2 \int_0^1 x dx = 4 \arctg x \Big|_0^1 - x^2 \Big|_0^1 = \pi - 1, \end{aligned}$$

где смо за прву једнакост користили то што је $\frac{2}{1+x^2} - |x|$ парна функција. ■

Задатак 10.3 (Јан, 2018.) Израчунати запремину тела насталог ротацијом $y = x^2 + x - 6$ и $x - y - 2 = 0$ око x -осе.

Решење:

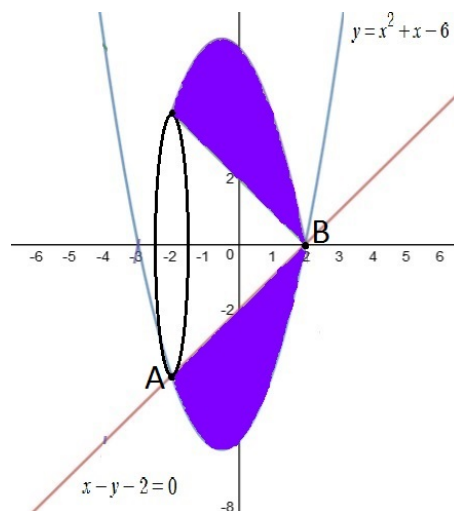
Означимо

$$\mathcal{P} : y = x^2 + x - 6$$

$$p : y = x - 2$$

Тада $\mathcal{P} \cap p$ добијамо решавањем система ове две једначине, па су пресечне тачке $A(-2, -4)$ и $B(2, 0)$.

Дакле, ротацију ћемо вршити око x -осе на интервалу $[-2, 2]$. Тражену запремину ћемо добити тако што ћемо од запремине тела које настаје ротацијом $\mathcal{P}$ око x -осе на $[-2, 2]$ одузети запремину тела које настаје ротацијом p око x -осе на $[-2, 2]$. Дакле, $V = V_1 - V_2$, где је



$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_{-2}^2 (x^2 + x - 6)^2 dx = \pi \int_{-2}^2 (x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x + 36) dx \\ &= \pi \left(\frac{x^5}{5} \Big|_{-2}^2 + 2 \frac{x^4}{4} \Big|_{-2}^2 - 11 \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^2 - 12 \frac{x^2}{2} \Big|_{-2}^2 + 36x \Big|_{-2}^2 \right) \\ &= \pi \left(\frac{64}{5} - 11 \frac{16}{3} + 36 \cdot 4 \right) = \frac{1472}{15} \pi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \int_{-2}^2 (x - 2)^2 dx = \pi \int_{-2}^2 (x^2 - 4x + 4) dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^2 - 4 \frac{x^2}{2} \Big|_{-2}^2 + 4x \Big|_{-2}^2 \right) \\ &= \pi \left(\frac{16}{3} + 4 \cdot 4 \right) = \frac{64}{3} \pi = \frac{320}{15} \pi, \end{aligned}$$

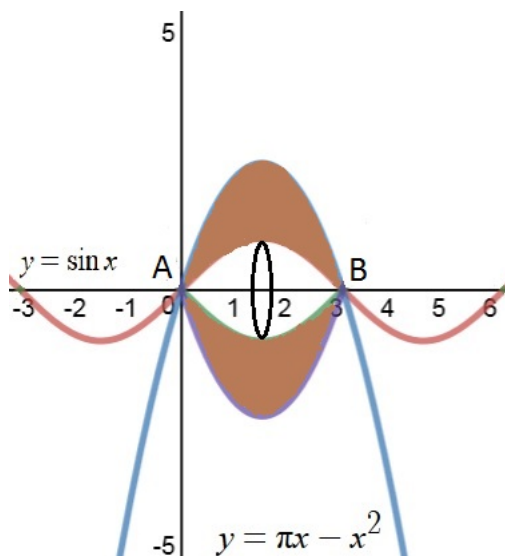
па добијамо $V = \frac{1472}{15} \pi - \frac{320}{15} \pi = \frac{1152}{15} \pi = \frac{384}{5} \pi$. ■

Задатак 10.4 (Феб, 2018.) Израчунати запремину тела насталог ротацијом $y = \sin x$ и $y = \pi x - x^2$ око праве $y = 0$.

Решење:

Као и у претходним примерима, потребно је да видимо пресечне тачке ових кривих. У овом случају је најлакше скицирати $y = \sin x$ и $y = \pi x - x^2$ и са графика видети пресечне тачке. Добијамо да су пресечне тачке $A(0, 0)$ и $B(\pi, 0)$.

Тражену запремину ћемо добити тако што ћемо од запремине тела које настаје ротацијом $y = \pi x - x^2$ око x -осе на $[0, \pi]$ одузети запремину тела које настаје ротацијом $y = \sin x$ око x -осе на $[0, \pi]$.



Дакле, $V = V_1 - V_2$, где је

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_0^\pi (\pi x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^\pi (\pi^2 x^2 - 2\pi x^3 + x^4) dx = \pi \left(\pi^2 \frac{x^3}{3} \Big|_0^\pi - 2\pi \frac{x^4}{4} \Big|_0^\pi + \frac{x^5}{5} \Big|_0^\pi \right) \\ &= \pi \left(\frac{\pi^5}{3} - \frac{\pi^5}{2} + \frac{\pi^5}{5} \right) = \frac{10 - 15 + 6}{30} \pi^6 = \frac{\pi^6}{30}, \\ V_2 &= \pi \int_0^\pi (\sin x)^2 dx = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \pi \left(\frac{x}{2} \Big|_0^\pi - \frac{\sin 2x}{4} \Big|_0^\pi \right) = \frac{\pi^2}{2}, \end{aligned}$$

па добијамо

$$V = V_1 - V_2 = \frac{\pi^6}{30} - \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{30} (\pi^4 - 15).$$

■

Задатак 10.5 Израчунаати дужину лука криве $y = \ln \cos x$ на $[0, \frac{\pi}{6}]$.

Решење: Ако означимо $f(x) = \ln \cos x$, онда је $f'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x}$, па је дужина криве $y = f(x) = \ln \cos x$ на $[0, \frac{\pi}{6}]$ једнака

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos x} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x dx}{\cos^2 x} = \left\{ \begin{array}{c} \text{смена:} \\ \sin x = t \Rightarrow \cos x dx = dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 0, \quad x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{2} \end{array} \right\} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{1 - t^2} \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln 3. \end{aligned}$$

■

Задатак 10.6 Израчунаати дужину лука криве $y = \sqrt{81 - x^2}$ на $[3, 9]$.

Решење: Ако означимо $f(x) = \sqrt{81 - x^2}$, онда је $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{81 - x^2}}$, па је дужина криве $y = f(x) = \sqrt{81 - x^2}$ на $[3, 9]$ једнака

$$\begin{aligned} l &= \int_3^9 \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \int_3^9 \sqrt{1 + \frac{x^2}{81 - x^2}} dx = \int_3^9 \sqrt{\frac{81}{81 - x^2}} dx = 9 \int_3^9 \frac{dx}{\sqrt{81 - x^2}} \\ &= \int_3^9 \frac{dx}{\sqrt{1 - (\frac{x}{9})^2}} = \left\{ \begin{array}{c} \text{смена:} \\ \frac{x}{9} = t \Rightarrow dx = 9dt \\ x = 3 \Rightarrow t = \frac{1}{3}, \quad x = 9 \Rightarrow t = 1 \end{array} \right\} = \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{9dt}{\sqrt{1 - t^2}} \\ &= 9 \arcsin t \Big|_{\frac{1}{3}}^1 = 9 \left(\arcsin 1 - \arcsin \frac{1}{3} \right) = 9 \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{1}{3} \right). \end{aligned}$$

Напомена: Интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{81 - x^2}}$ се може решити и сменом $t = 9 \sin x$ која је главна идеја код неких коренова оваквог облика.

■

11 Несвојствени интеграли

Дефиниција 11.1 Нека је функција f дефинисана на $(a, b]$, где a може бити и $-\infty$, и нека је f интеграбилна на сваком $[\alpha, b] \subseteq (a, b]$. Ако постоји $\lim_{\alpha \rightarrow a+} \int_{\alpha}^b f(x)dx$, називамо га **несвојственим интегралом функције f на $(a, b]$** и пишемо

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha \rightarrow a+} \int_{\alpha}^b f(x)dx.$$

Тачка a назива се **сингуларитетом**.

Дефиниција 11.2 Нека је функција f дефинисана на $[a, b)$, где b може бити и $+\infty$, и нека је f интеграбилна на сваком $[a, \beta] \subseteq [a, b)$. Ако постоји $\lim_{\beta \rightarrow b-} \int_a^{\beta} f(x)dx$, називамо га **несвојственим интегралом функције f на $[a, b)$** и пишемо

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\beta \rightarrow b-} \int_a^{\beta} f(x)dx.$$

Тачка b назива се **сингуларитетом**.

Дефиниција 11.3 Уколико је $\int_a^b f(x)dx = \pm\infty$, кажемо да овај несвојствени интеграл **дивергира**, а уколико је једнак неком коначном броју кажемо да **конвергира**.

Сада ћемо видети како све ово изгледа на конкретним примерима:

Задатак 11.1 (2.кол, 2018.) *Израчунати $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^{-x} + e^x}$.*

Решење:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^{-x} + e^x} &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_0^{\beta} \frac{dx}{e^{-x} + e^x} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_0^{\beta} \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}} = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена:} \\ e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = \beta \Rightarrow t = e^{\beta} \end{array} \right\} \\ &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_1^{e^{\beta}} \frac{dt}{1 + t^2} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \arctg t|_1^{e^{\beta}} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \arctg e^{\beta} - \arctg 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

■

Задатак 11.2 (Јан, 2018.) *Израчунати $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2}$.*

Решење: Како је

$$\int \frac{dx}{x^2 + x - 2} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C,$$

добивамо

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2} &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_2^{\beta} \frac{dx}{x^2 + x - 2} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| \Big|_2^{\beta} \\ &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \ln \left| \frac{\beta-1}{\beta+2} \right| - \frac{1}{3} \ln \left| \frac{2-1}{2+2} \right| = -\frac{1}{3} \ln \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \ln 4 = \frac{2}{3} \ln 2. \end{aligned}$$

■

Задатак 11.3 (Феб, 2018.) Израчунати $\int_0^{+\infty} \frac{e^{\operatorname{arctg} x} dx}{1+x^2}$.

Решење:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{e^{\operatorname{arctg} x} dx}{1+x^2} &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_0^{\beta} \frac{e^{\operatorname{arctg} x} dx}{1+x^2} = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена:} \\ t = \operatorname{arctg} x \Rightarrow dt = \frac{dx}{1+x^2} \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \beta \Rightarrow t = \operatorname{arctg} \beta \end{array} \right\} \\ &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_0^{\operatorname{arctg} \beta} e^t dt = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} e^t \Big|_0^{\operatorname{arctg} \beta} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} e^{\operatorname{arctg} \beta} - e^0 = e^{\frac{\pi}{2}} - 1. \end{aligned}$$

■

Задатак 11.4 (Јан, 2017.)

Испитати конвергенцију несвојственог интеграла $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Решење: Подинтегрална функција није дефинисана у $x = 1$, па је та тачка сингуларитет. Како је

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \lim_{\beta \rightarrow 1-} \int_0^{\beta} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{смена:} \\ t = \arcsin x \Rightarrow dt = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \beta \Rightarrow t = \arcsin \beta \end{array} \right\} \\ &= \lim_{\beta \rightarrow 1-} \int_0^{\arcsin \beta} t dt = \lim_{\beta \rightarrow 1-} \frac{t^2}{2} \Big|_0^{\arcsin \beta} = \lim_{\beta \rightarrow 1-} \frac{\arcsin^2 \beta}{2} - 0 = \frac{(\frac{\pi}{2})^2}{2} = \frac{\pi^2}{8}, \end{aligned}$$

добивамо да $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ конвергира.

■

Закључак

Уколико сте разумели бар 90 % градива обрађеног у скрипти, онда је велика вероватноћа да нећете проћи као у примеру са наредне слике :)

Me: I feel prepared for my exam.
Exam:

