



1. Дефинисати следеће појмове (а-г):

а) [0.5п] сличне матрице;

* Матрице A и B су сличне ($A \sim B$) ако постоји инвертибилна матрица P таква да је $A = P B P^{-1}$.

б) [0.5п] минимални полином матрице $A \in M_n(\mathbb{R})$;

* Минимални полином μ_A матрице A је моничан полином најмањег степена такав да је $\mu_A(A) = 0$.

в) [0.5п] ортогонални комплемент $W^\perp$ векторског потпростора W ;

* $W \leq V \Rightarrow W^\perp = \{v \in V \mid v \perp w, \forall w \in W\} = \{v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0, \forall w \in W\}$

г) [0.5п] ортонормирана база векторског простора V ;

* База B в. простора V је ортонормирана ако је:

1) ортогонална, тј. $\forall u_1, u_2 \in B$ важи $u_1 \perp u_2$

2) нормирана, тј. $\|u\| = 1, \forall u \in B$.

д) [1п] Навести геометријску интерпретацију векторског и мешовитог производа вектора у $\mathbb{R}^3$.

* $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = P_{\square}$
Дужина вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ једнака је површини паралелограма разанетог са $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

* $V_{\text{паралелепипеда}} = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$
Абсолютна вредност мешовитог производа $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ једнака је запремини паралелепипеда разанетог векторима $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$.

ђ) [1п] Навести формулу за растојање тачке $M(x_0, y_0, z_0)$ од равни $\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$. Израчунати растојање тачке $A(-2, 3, -2)$ од равни $\alpha: -x + 2y - 2z + 1300 = 0$.



$$d(M, \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$d(A, \alpha) = \frac{|-(-2) + 2 \cdot 3 - 2 \cdot (-2) + 1300|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{1312}{3}$$

2. Нека је дата матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R}$.

а) [3п] Испитати за које вредности реалног параметра a је матрица A дијагоналног типа.

б) [5п] За $a = 2$ израчунати $A^n, n \in \mathbb{N}$.

$$\textcircled{a} \varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & a-\lambda & 0 \\ -2 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 0 & a-\lambda \end{vmatrix} = [(3-\lambda)(1-\lambda)(a-\lambda)]$$

$$1) \boxed{a \neq 1, a \neq 3} \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = a \Rightarrow \mu_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-a)(\lambda-3)$$

нема вишеструке нуле

$\Rightarrow A$ дијаг. типа

$$2) \boxed{a = 1} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_3 = 1, \lambda_2 = 3 \Rightarrow \mu_A^1(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-3) \text{ или } \mu_A^2(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-3)$$

$$\mu_A^1(A) = (A-E)(A-3E) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0 \Rightarrow A \text{ није дијагоналног типа}$$

$$3) \boxed{a = 3} \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 3 \Rightarrow \mu_A^3(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-3) \text{ или } \mu_A^4(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-3)^2$$

$$\mu_A^3(A) = (A-E)(A-3E) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \neq 0 \Rightarrow A \text{ није дијаг. типа}$$

$\Rightarrow A$ је дијаг. типа за $a \neq 1, a \neq 3$

$$\textcircled{b} a = 2 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3, A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = 3$$

$$(A-E)u = 0 \quad (A-2E)u = 0 \quad (A-3E)u = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$$

$$b=0, c=a \quad -a-b=0 \Rightarrow b=-a \quad b=0, a=0$$

$$\Rightarrow u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad c=0 \quad \Rightarrow u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \dots \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^n = P D^n P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2^n & 0 \\ 0 & -2^n & 0 \\ 1 & 0 & 3^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} 1 & 1-2^n & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 1-3^n & 1-3^n & 3^n \end{bmatrix}, n \in \mathbb{N}$$

3. Дат је векторски простор W решења система једначина $a - b + 2c = 0$, $a + b - 2c - d = 0$.

а) [2п] Наћи базу и димензију W и $W^\perp$ у односу на стандардни скаларни производ у $\mathbb{R}^4$.

б) [3п] Ком од векторских потпростора W и $W^\perp$ је вектор $v = (4, 4, -1, 0)$ ближи?

а) $W = \{ (a, b, c, d) \mid \begin{matrix} a - b + 2c = 0 \\ a + b - 2c - d = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = b - 2c \\ d = 2b - 4c \end{matrix} \}$ $\dim W = 2$

$$= \{ (b - 2c, b, c, 2b - 4c) \mid b, c \in \mathbb{R} \} = \mathcal{L}((1, 1, 0, 2), (-2, 0, 1, -4))$$

$$W = \{ (a, b, c, d) \mid \begin{matrix} (a, b, c, d) \cdot (1, -1, 2, 0) = 0 \\ (a, b, c, d) \cdot (1, 1, -2, -1) = 0 \end{matrix} \} = \mathcal{L}((1, -1, 2, 0), (1, 1, -2, -1))^\perp$$

$$\Rightarrow W^\perp = \mathcal{L}((1, -1, 2, 0), (1, 1, -2, -1)), \dim W^\perp = 2$$

б) $u = u_1 + u_2, u_1 \in W, u_2 \in W^\perp, W = \mathcal{L}(f_1, f_2)$

$$u = \alpha f_1 + \beta f_2 + u_2 \quad / \cdot f_1 \quad / \cdot f_2$$

$$\begin{matrix} 8 = 6\alpha - 10\beta & / \cdot 10 \\ -9 = -10\alpha + 21\beta & / \cdot 6 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 26 = 26\beta \\ \beta = 1 \end{matrix} \Rightarrow \alpha = 3$$

$$u_1 = 3f_1 + f_2 \Rightarrow u_1 = (1, 3, 1, 2)$$

$$u_2 = u - u_1 = (3, 1, -2, -2)$$

$$d(u, W) = d(u, u_1) = \|u_2\| = \sqrt{9+1+4+4} = \sqrt{18}$$

$$d(u, W^\perp) = d(u, u_2) = \|u_1\| = \sqrt{1+9+1+4} = \sqrt{15} \Rightarrow u \text{ ближе } W^\perp$$

4. Дате су праве $p: -3x + 4y - 1 = 0$, $q: 5x - 12y + 7 = 0$ и $r: x - 2y + 1312 = 0$.

а) [3п] Одредити једначине симетрала углова између правих p и q .

б) [3п] Одредити једначину нормале n на праву r из пресечне тачке правих p и q .

а) $M(x_0, y_0) \in \Delta$ $\Rightarrow d(M, p) = d(M, q)$

$$\frac{|-3x_0 + 4y_0 - 1|}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} = \frac{|5x_0 - 12y_0 + 7|}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}}$$

$$\Rightarrow \Delta_{1,2}: 13(-3x + 4y - 1) = \pm 5(5x - 12y + 7)$$

$$\Delta_1: -39x + 52y - 13 = 25x - 60y + 35$$

$$\Delta_2: -39x + 52y - 13 = -25x + 60y - 35$$

$$\Rightarrow \Delta_1: 64x - 112y + 48 = 0 \quad / : 16 \Rightarrow \Delta_1: 4x - 7y + 3 = 0$$

$$\Delta_2: 14x + 8y - 22 = 0 \quad / : 2 \Rightarrow \Delta_2: 7x + 4y - 11 = 0$$

б) $p \cap q: \begin{matrix} -3x + 4y = 1 \\ 5x - 12y = -7 \end{matrix} \quad / \cdot 3 \quad / \cdot 4$

$$\begin{matrix} -4x = -4 \\ x = 1 \end{matrix} \quad y = 1$$

$$\Rightarrow p \cap q = A(1, 1)$$

$n \perp r, A \in n, n \perp r \Rightarrow \vec{n} = \vec{n}_r = (1, -2)$

$$\Rightarrow n: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} \Rightarrow n: y = -2x + 3$$

5. Дате су праве $p: \frac{x-1}{0} = \frac{y-\lambda}{1} = \frac{z-1}{-2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ и $q: \frac{x+4}{-1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z+2}{3}$.

а) [3п] Одредити вредност параметра λ тако да се праве p и q секу, као и координате пресечне тачке.

б) [4п] За $\lambda = 3$ наћи једначину заједничке нормале, као и растојање мимоилазних правих p и q .

а) $p: \begin{cases} x=1 \\ y=t+\lambda \\ z=-2t+1 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad q: \begin{cases} x=-\lambda-4 \\ y=-2 \\ z=3\lambda-2 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$

$p \cap q = A(1, -2, -17)$

б) $P(1, t+3, -2t+1) \in p$ произв., $Q(-\lambda-4, -2, 3\lambda-2) \in q$ произв., $\vec{p} = (0, 1, -2)$, $\vec{q} = (-1, 0, 3)$
 $\Rightarrow \vec{QP} = (\lambda+5, t+5, 3-2t-3\lambda)$

1) $\vec{QP} \cdot \vec{p} = 0 \Rightarrow t+5-6+4t+6\lambda=0 \Rightarrow 5t+6\lambda=1 \quad / \cdot 6 \uparrow$
 2) $\vec{QP} \cdot \vec{q} = 0 \Rightarrow -\lambda-5+t-9\lambda=0 \Rightarrow -6t-10\lambda=-4 \quad / \cdot 5 \uparrow$

$\Rightarrow P(1, 2, 3) \quad Q(-5, -2, 1) \Rightarrow \vec{QP} = (6, 4, 2) \parallel (3, 2, 1)$

$\Rightarrow n = p \times q: \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$

$d(p, q) = \|\vec{QP}\| = \sqrt{6^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$

6. [5п] Нека су U и W векторски потпростори унитарног векторског простора V са скаларним производом $\langle \cdot, \cdot \rangle$, такви да је $U \cap W = \{0\}$. Доказати да је са

$$\langle u_1 + w_1, u_2 + w_2 \rangle_{\oplus} = \langle u_1, u_2 \rangle + \langle w_1, w_2 \rangle, \quad u_1, u_2 \in U, \quad w_1, w_2 \in W,$$

дефинисан скаларни производ на векторском потпростору $U \oplus W$.

1) $\langle \alpha(u_1 + w_1) + \beta(u_2 + w_2), u_3 + w_3 \rangle_{\oplus}$
 $= \langle \alpha u_1 + \beta u_2 + \alpha w_1 + \beta w_2, u_3 + w_3 \rangle_{\oplus}$
 $= \langle \alpha u_1 + \beta u_2, u_3 \rangle + \langle \alpha w_1 + \beta w_2, w_3 \rangle$
 $\stackrel{\text{линеарност}}{=} \alpha \langle u_1, u_3 \rangle + \beta \langle u_2, u_3 \rangle + \alpha \langle w_1, w_3 \rangle + \beta \langle w_2, w_3 \rangle$
 $= \alpha (\langle u_1, u_3 \rangle + \langle w_1, w_3 \rangle) + \beta (\langle u_2, u_3 \rangle + \langle w_2, w_3 \rangle)$
 $= \alpha \langle u_1 + w_1, u_3 + w_3 \rangle_{\oplus} + \beta \langle u_2 + w_2, u_3 + w_3 \rangle_{\oplus}$

2) $\langle u_1 + w_1, u_2 + w_2 \rangle_{\oplus} = \langle u_1, u_2 \rangle + \langle w_1, w_2 \rangle$
 $\stackrel{\text{комутат.}}{=} \langle u_2, u_1 \rangle + \langle w_2, w_1 \rangle = \langle u_2 + w_2, u_1 + w_1 \rangle_{\oplus}$

3) $\langle u_1 + w_1, u_1 + w_1 \rangle_{\oplus} = \underbrace{\langle u_1, u_1 \rangle}_{\geq 0} + \underbrace{\langle w_1, w_1 \rangle}_{\geq 0} \geq 0$
 $\langle u_1 + w_1, u_2 + w_2 \rangle_{\oplus} = 0 \Leftrightarrow \langle u_1, u_1 \rangle = 0, \langle w_1, w_1 \rangle = 0$

$\Leftrightarrow u_1 = 0, w_1 = 0 \Leftrightarrow u_1 + w_1 = 0$

1), 2), 3) $\Rightarrow \langle \cdot, \cdot \rangle_{\oplus}$ скаларни производ на $U \oplus W$