



Пре израде задатака, на вежбанци **ОБАВЕЗНО** попунити назив предмета, име и презиме, број индекса (број досијеа) као и групу задатака коју радите (у пољу ознака задатка)!
Остала поља не морате попуњавати.

1. Дефинисати следеће појмове (а-г):

а) [0.5п] линеарни омотач (линеал) скупа вектора $\mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_k)$;

б) [0.5п] инверз матрице $B \in M_n(\mathbb{R})$;

в) [0.5п] координате вектора v у бази $B = \{v_1, \dots, v_k\}$;

г) [0.5п] линеарно пресликавање $L : U \rightarrow V$;

д) [1п] Дефинисати појам базе и димензије векторског простора V .

Наведите примере канонских база векторских простора $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ и $\mathbb{R}^3[x]$.

ђ) [1п] Дате су матрице A типа 5×3 , B типа 3×3 и C и D типа 3×2 . Испитати који од следећих израза су дефинисани и који је тип резултујуће матрице: A^2 , B^3 , CD , $A + C$, ABD и $BC + D$.

2. [5п] Дати су вектори $\vec{a} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\vec{b} = (5, -2, 5, -2)$ и $\vec{c} = (2, -2, 0, 5)$, при чему је

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 2, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 0, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &= 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 6. \end{aligned}$$

Одредити угао између вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, као и растојање вектора $\vec{a}$ и $\vec{c}$.

3. Нека је $U = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$, где је $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, и $W = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}$.

а) [2п] Доказати да су U и W векторски потпростор од $M_3(\mathbb{R})$.

б) [4п] Одредити бар по једну базу, као и димензије U и W .

в) [1п] Испитати да ли је $M_3(\mathbb{R}) = U + W$. Да ли је сума директна?

4. Нека је $G : \mathbb{R}^3[x] \rightarrow \mathbb{R}^3$ пресликавање дато са $G(p) = (p(1), p'(1), p''(1))$.

а) [4п] Наћи матрицу G у односу на базе $S = \{p_1 = x^3 + 1, p_2 = -2x^2 + x, p_3 = 2x - 5, p_4 = x^3 + x^2 + x\}$ и $S' = \{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (1, 0, -1)\}$ простора $\mathbb{R}^3[x]$ и $\mathbb{R}^3$.

б) [4п] Наћи базу и димензију за $\text{Im } G$ и $\text{Ker } G$.

5. [5п] Израчунати

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2025 & 2026 \\ 1 & 8 & 3 & 4 & \dots & 2025 & 2026 \\ 1 & 2 & 12 & 4 & \dots & 2025 & 2026 \\ 1 & 2 & 3 & 16 & \dots & 2025 & 2026 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 8100 & 2026 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2025 & 8104 \end{vmatrix}.$$

6. а) [4п] Нека је U тродимензиони, а W четвородимензиони векторски потпростор шестодимензионог векторског простора V . Одредити могуће вредности за $\dim(U + W)$ и $\dim(U \cap W)$. Навести пример за сваку од вредности.

б) [2п] Ако вектори u_1 , u_2 и u_3 чине базу векторског простора U , испитати да ли и вектори $u_1 - 2u_2 + u_3$, $-u_1 + 3u_2$ и $u_1 + 3u_3$ чине базу за U .



Пре израде задатака, на вежбанци **ОБАВЕЗНО** попунити назив предмета, име и презиме, број индекса (број досијеа) као и групу задатака коју радите (у пољу ознака задатка)!
Остала поља не морате попуњавати.

1. Дефинисати следеће појмове (а-г):

а) [0.5п] линеарни омотач (линеал) скупа вектора $\mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_n)$;

б) [0.5п] инверз матрице $A \in M_n(\mathbb{R})$;

в) [0.5п] координате вектора v у бази $B = \{v_1, \dots, v_n\}$;

г) [0.5п] линеарно пресликавање $L : U \rightarrow W$;

д) [1п] Дефинисати појам базе и димензије векторског простора V .

Наведите примере канонских база векторских простора $M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$ и $\mathbb{R}^3[x]$.

ђ) [1п] Дате су матрице A типа 3×3 , B типа 3×4 и C и D типа 2×3 . Испитати који од следећих израза су дефинисани и који је тип резултујуће матрице: A^2 , B^3 , DAB , CD , $A + B$, и $CA + D$.

2. [5п] Дати су вектори $\vec{a} = (5, -2, 5, -2)$, $\vec{b} = (2, -2, 0, 5)$ и $\vec{c} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, при чему је

$$-x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 2,$$

$$2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0,$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2,$$

$$3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 6.$$

Одредити угао између вектора $\vec{a}$ и $\vec{c}$, као и растојање вектора $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

3. Нека је $U = \{X \in M_3(\mathbb{R}) \mid XT = TX\}$, где је $T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, и $W = \{X \in M_3(\mathbb{R}) \mid X^T = -X\}$.

а) [2п] Доказати да су U и W векторски потпростор од $M_3(\mathbb{R})$.

б) [4п] Одредити бар по једну базу, као и димензије U и W .

в) [1п] Испитати да ли је $M_3(\mathbb{R}) = U + W$. Да ли је сума директна?

4. Нека је $F : \mathbb{R}^3[x] \rightarrow \mathbb{R}^3$ пресликавање дато са $F(p) = (p(1), p'(1), p''(1))$.

а) [4п] Наћи матрицу F у односу на базе $S = \{q_1 = x^3 + x^2 + x, q_2 = x^3 + 1, q_3 = 2x - 5, q_4 = -2x^2 + x\}$ и $S' = \{u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (1, 1, 1), u_3 = (1, 0, -1)\}$ простора $\mathbb{R}^3[x]$ и $\mathbb{R}^3$.

б) [4п] Наћи базу и димензију за $\text{Im } F$ и $\text{Ker } F$.

5. [5п] Израчунати

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2025 & 2026 \\ 1 & 6 & 3 & 4 & \dots & 2025 & 2026 \\ 1 & 2 & 9 & 4 & \dots & 2025 & 2026 \\ 1 & 2 & 3 & 12 & \dots & 2025 & 2026 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 6075 & 2026 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2025 & 6078 \end{vmatrix}.$$

6. а) [4п] Нека је U четвородимензиони, а W тродимензиони векторски потпростор шестодимензионог векторског простора V . Одредити могуће вредности за $\dim(U + W)$ и $\dim(U \cap W)$. Навести пример за сваку од вредности.

б) [2п] Ако вектори w_1 , w_2 и w_3 чине базу векторског простора W , испитати да ли и вектори $w_1 - 2w_2 + w_3$, $-w_1 + 3w_2$ и $2w_1 + 6w_3$ чине базу за W .