



Пре израде задатака, на вежбанци **ОБАВЕЗНО** попунити назив предмета, име и презиме, број индекса (број досијеа) као и име асистента код кога сте распоређени на Хипатији (у пољу задатак прегледао)! Остала поља не морате попуњавати.

1. Дефинисати следеће појмове (а-д):

- а) [1п] транспонована матрица A^T и траг матрице $A \in M_n(\mathbb{R})$;
- б) [1п] векторски потпростор U векторског простора V ;
- в) [1п] формулисати теорему о рангу и дефекту линеарног пресликавања $L : U \rightarrow V$;
- г) [1п] сопствена вредност и сопствени вектор матрице A ;
- д) [1п] скаларни производ на векторском простору V ;
- ђ) [2п] Нека су u и v међусобно ортогонални вектори. Доказати $\|u\|^2 + \|v\|^2 = \|u + v\|^2$;
- е) [3п] Одредити једначину нормале n из тачке $A(7, 3)$ на праву $p : -3x + 4y = 6$, као и растојање тачке A од праве p .

2. [10п] Нека су U и W векторски потпростори од $M_2(\mathbb{R})$ дати са

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid b + c + d = 0 \right\},$$

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a + b = 0, c - 2d = 0 \right\}.$$

Одредити базе и димензије потпростора U , W , $U \cap W$ и $U + W$.

3. [10п] Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A .

Испитати да ли је A дијагоналног типа и ако јесте наћи инвертибилну матрицу P и дијагоналну D такве да је $D = P^{-1}AP$. Израчунати A^{2026} .

4. [10п] Нека је

$$U = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R} \mid 2a + b + c + 3d = 0, 3a + 2b + 2c + d = 0, a + 2b + 2c - 9d = 0\}.$$

Одредити базу и димензију векторских простора U и $U^\perp$ у односу на стандардни скаларни производ у $\mathbb{R}^4$. Ком од потпростора U и $U^\perp$ је вектор $v = (7, -4, -1, 2)$ ближи?

5. Дате су праве $p : \frac{x-7}{1} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-1}{1}$ и $q : \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-1}{2}$ и тачка $L(2, -3, 1)$.

- а) [3п] Одредити пројекцију M тачке L на праву p .
- б) [7п] Одредити једначину праве ℓ која садржи тачку L и сече праве p и q .

6. За линеарно пресликавање $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ важи

$$L(1, -1, 1) = (0, 2, 1), \quad L(2, 0, a) = (-2, 6, 4) \quad L(a, 2, a) = (2, 2, 0).$$

а) [3п] Одредити вредности реалног параметра a за које је пресликавање L јединствено одређено.

б) [7п] За $a = 0$ одредити $L(x, y, z)$, а затим наћи $\text{Im}L$ и $\text{Ker}L$.