



1. Дефинисати следеће појмове (а-д): ...

б) [2п] Нека су A и B симетричне матрице. Доказати да је AB симетрична матрица ако и само ако матрице A и B комутирају;

▲ A и B симетричне $\Rightarrow A^T = A, B^T = B$ *

$\Rightarrow$ знамо AB симетрична т.д. $(AB)^T = AB$. Показујемо $AB = BA$.

$AB \stackrel{\downarrow}{=} (AB)^T = B^T A^T \stackrel{\circledast}{=} BA \Rightarrow A$ и B комутирају

$\Leftarrow$ знамо $AB = BA$. Показујемо $(AB)^T = AB$:

$(AB)^T = B^T A^T \stackrel{\circledast}{=} BA \stackrel{\circledast}{=} AB \Rightarrow AB$ симетрична

е) [3п] Испитати да ли су вектори $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (1, 1, -2)$ и $\vec{c} = (5, 8, 5)$ копланарни. Ако јесу, вектор $\vec{c}$ изразити као линеарну комбинацију вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а уколико нису копланарни, израчунати запремину паралелепипеда разапетог векторима $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

▲ $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & | & 1 & 1 \\ 5 & 8 & 5 & | & 5 & 8 \end{vmatrix} = 5 - 20 + 24 - 15 + 16 - 10 = 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ копланарни

$\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} \Rightarrow (5, 8, 5) = (\alpha, 2\alpha, 3\alpha) + (\beta, \beta, -2\beta)$

$\begin{cases} \alpha + \beta = 5 \\ 2\alpha + \beta = 8 \\ 3\alpha - 2\beta = 5 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 3 \Rightarrow \beta = 2 \Rightarrow \vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$

2. [10п] Нека је $U \leq \mathbb{R}^3[x]$ генерисан полиномима $p_1 = 1 + 2x + x^3$, $p_2 = 1 + x + x^2$ и $p_3 = x - x^2 + x^3$, а $W \leq \mathbb{R}^3[x]$ генерисан са $q_1 = 1 + x^2$, $q_2 = 1 + 3x + x^3$ и $q_3 = 3x - x^2 + x^3$. Наћи бар по једну базу за U , W , $U + W$ и $U \cap W$.

▲ У СТАНДАРДНОЈ БАЗИ $(1, x, x^2, x^3)$ ПРОСТОРА $\mathbb{R}^3[x]$ ИМАМО

У $\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow U = \mathcal{L}(p_1, p_2)$
 $\dim U = 2$

W $\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow W = \mathcal{L}(q_1, q_2)$
 $\dim W = 2$

U+W $\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1, R_3 - R_1, R_4 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 \cdot (-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow U+W = \mathcal{L}(p_1, p_2, q_1)$
 $\dim(U+W) = 3$
 $U \cap W = \mathcal{L}(p_1 + p_2) = \mathcal{L}(2 + 3x + x^2 + x^3)$

3. [10п] Одредити карактеристични и минимални полином матрице $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & 4 & -1 \end{bmatrix}$.

Затим одредити сопствене вредности и сопствене векторе матрице A . Испитати да ли је A дијагоналног типа и ако јесте наћи инвертибилну матрицу P и дијагоналну D такве да је $D = P^{-1}AP$.

▲ $\varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 5-\lambda & -2 \\ 4 & 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 3-\lambda \\ 2 & 5-\lambda & 0 \\ 4 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 3-\lambda \\ 2 & 5-\lambda & 0 \\ \lambda & 3 & 0 \end{vmatrix} = (3-\lambda) \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 5-\lambda \\ \lambda & 3 \end{vmatrix}$
 $= (3-\lambda) [6 - 5\lambda + \lambda^2] = -(\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-3) = -(\lambda-2)(\lambda-3)^2$
 $\Rightarrow \mathcal{M}_A^1(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-3)$ и и $\mathcal{M}_A^2(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-3)^2$

$$M_A^1(A) = (A - 2E)(A - 3E) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow M_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

$$\lambda_1 = 2 \Rightarrow A \text{ алгебраична}$$

$$(A - 2E)u = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2a + b - c = 0 \\ 2a + 3b - 2c = 0 \\ 4a + 4b - 3c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b - c = 0 \\ 2b - c = 0 \\ 2b - c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b - c = 0 \\ 2b - c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2a \\ c = 2b = 4a \end{cases} \Rightarrow u_2 = a(1, 2, 4)$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 3 \Rightarrow (A - 3E)u = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a + b - c = 0 \\ a + b - c = 0 \\ a + b - c = 0 \end{cases} \Rightarrow c = a + b \Rightarrow u_3 = (a, b, a + b) \Rightarrow E_3 = \mathcal{L}((1, 0, 1), (0, 1, 1))$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4. [10п] У векторском простору $M_2(\mathbb{R})$ са скаларним производом $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$ дат је векторски потпростор W са

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid 2a + b - 2c + d = 0, 5a + b - 3c + 3d = 0 \right\}.$$

Одредити растојање матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ од $W^\perp$ као и угао између A и W .

$$\begin{cases} 2a + b - 2c + d = 0 \\ 5a + b - 3c + 3d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b - 2c + d = 0 \\ 3a - c + 2d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -2a + 6a + 4d - d = 4a + 3d \\ c = 3a + 2d \end{cases}$$

$$\Rightarrow W = \left\{ \begin{bmatrix} a & 4a + 3d \\ 3a + 2d & d \end{bmatrix} \mid a, d \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{L} \left(\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$A = A_1 + A_2, A_1 \in W, A_2 \in W^\perp$$

$$A = \alpha W_1 + \beta W_2 + A_2 \quad / \cdot W_1 \quad / \cdot W_2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 10 &= 26\alpha + 18\beta \quad / :2 \\ 10 &= 18\alpha + 14\beta \quad / :2 \\ \hline 5 &= 13\alpha + 9\beta \quad / : -7 \\ 5 &= 9\alpha + 7\beta \quad / : 9 \end{aligned}$$

$$10 = -10\alpha \Rightarrow \alpha = -1, \beta = 2$$

$$\Rightarrow A_1 = -W_1 + 2W_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A_2 = A - A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$d(A, W^\perp) = d(A, A_2) = \|A_1\| = \sqrt{\text{tr} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}} = \sqrt{\text{tr} \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}} = \sqrt{10}$$

$$\cos \angle(A, W) = \cos \angle(A, A_1) = \frac{\langle A, A_1 \rangle}{\|A\| \cdot \|A_1\|} = \frac{10}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\langle A, A_1 \rangle = \text{tr} \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) = \text{tr} \begin{bmatrix} -2 & 12 \\ 2 & 12 \end{bmatrix} = 10$$

$$\langle A, A_2 \rangle = \text{tr} \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \right) = \text{tr} \begin{bmatrix} 2 & 18 \\ 2 & 18 \end{bmatrix} = 20$$

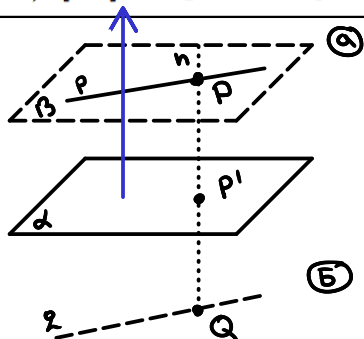
$$\Rightarrow \angle(A, W) = \pi/4$$

$$d(A, W^\perp) = \sqrt{10}$$

5. Дате су права $p: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{1}$ и раван $\alpha: x + y - 2z + 6 = 0$.

а) [4п] Одредити једначину равни β која садржи праву p и паралелна је равни α .

б) [6п] Одредити једначину праве q која је симетрична правој p у односу на раван α .



$$1) P(1, 1, 1) \in p \subset \beta \quad \checkmark$$

$$2) \beta \perp \alpha \Rightarrow \vec{n}_\beta = \vec{n}_\alpha = (1, 1, -2) \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \beta: 1(x-1) + 1(y-1) - 2(z-1) = 0$$

$$\beta: x + y - 2z = 0$$

$$б) 1) n \text{ т.н. } P \in n, n \perp \alpha$$

$$\vec{n} = \vec{n}_\alpha = (1, 1, -2)$$

$$\Rightarrow n: \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t + 1 \\ z = -2t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$2) P' = n \wedge \alpha: t+1+t+1+4t-2+6=0 \Rightarrow t=-1 \Rightarrow P'(0,0,3)$$

$$3) P' = S(PQ), P(1,1,1), P'(0,0,3) \Rightarrow Q(-1,-1,5)$$

$$4) P \parallel \alpha \Rightarrow Q \parallel P \Rightarrow \vec{Q} = \vec{P} = (2,0,1) \Rightarrow \boxed{Q: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-5}{1}}$$

$$Q(-1,-1,5) \in Q$$

6. Пресликавање $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ дато је са

$$F(x,y,z) = (xe^{(a-2)y} + \cos(cz)y - 3z, (\ln b)x^2 - 3by + a^2z, bx - ay + bz), \quad a,b,c \in \mathbb{R}.$$

а) [4п] Одредити вредности параметара a, b и c тако да пресликавање F буде линеарно.

б) [6п] За такве a, b и c одредити бар по једну базу за $\text{Ker } F$ и $\text{Im } F$, као и ранг и дефект пресликавања F .

▲ а) Да би F било линеарно све коорд. морају бити облика $Ax + By + Cz$
 $e^{(a-2)y} \Rightarrow a-2=0 \Rightarrow \boxed{a=2}$, $\cos(cz) \Rightarrow \boxed{c=0}$, $(\ln b)x^2 \Rightarrow \ln b=0 \Rightarrow \boxed{b=1}$

$$\Rightarrow F(x,y,z) = (x+y-3z, -3y+4z, x-2y+z)$$

✓ ипр можемо добити и из услова $F(\alpha u) = \alpha F(u), \forall \alpha$

$$F(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (\alpha x e^{(a-2)\alpha y} + \cos(c\alpha z)\alpha y - 3\alpha z, (\ln(\alpha b))(\alpha x)^2 - 3\alpha b\alpha y + \alpha^2\alpha z, \dots)$$

$$\alpha F(x,y,z) = (\alpha x e^{(a-2)y} + \alpha \cos(cz)y - \alpha 3z, \alpha(\ln b)x^2 - \alpha 3by + \alpha a^2z, \dots)$$

$$\Rightarrow \alpha x e^{(a-2)\alpha y} = \alpha x e^{(a-2)y} \Rightarrow \boxed{a=2} \quad \alpha(\ln b)x^2 = \ln(\alpha b)\alpha^2x^2 \Rightarrow \boxed{b=0}$$

$$\alpha \cos(cz)y = \cos(c\alpha z)\alpha y \Rightarrow \boxed{c=0}$$

Сада се лако види $F(u_1+u_2) = F(u_1) + F(u_2)$
 $F(\alpha u) = \alpha F(u) \Rightarrow F$ је линеарно

$$\text{б) } \text{Ker } F = \{ (x,y,z) \mid F(x,y,z) = 0 \}$$

$$\begin{cases} x+y-3z=0 \\ -3y+4z=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-3z=0 \\ -3y+4z=0 \\ -3y+4z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{3}z + 3z = \frac{5}{3}z \\ y = \frac{4}{3}z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Ker } F = \left\{ \left(\frac{5}{3}z, \frac{4}{3}z, z \right) \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{L}((5,4,3)) \Rightarrow \boxed{\delta(F) = 1}$$

$$\bullet \mathbb{R}^3 = \mathcal{L}(e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)) \Rightarrow \text{Im } F = \mathcal{L}(Fe_1, Fe_2, Fe_3)$$

$$Fe_1 = F(1,0,0) = (1,0,1)$$

$$Fe_2 = F(0,1,0) = (1,-3,-2)$$

$$Fe_3 = F(0,0,1) = (-3,4,1)$$

$$\begin{matrix} Fe_1 \\ Fe_2 \\ Fe_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 - R_1 \\ R_3 + R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot \frac{4}{3}} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Im } F = \mathcal{L}((1,0,1), (1,-3,-2)) \Rightarrow \boxed{\rho(F) = 2}$$

провера: $\boxed{\rho(F) + \delta(F) = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3} \quad \checkmark$